高等数学引论

余篇

华罗庚

科学出版社

51·61
73

高等数学引论

余篇

华罗庚

中国科学院电子学研究所
1984.8
图书館藏

科学出版社
1984

1111612

DS98/3/7 01

高等数学引论

余篇

华罗庚

*

科学出版社出版
北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1984年7月第一版　开本：787×1092 1/16
1984年7月第一次印刷　印张：11 1/4
印数：精 1—6,100　插页：精 2
　　　平 1—6,950　字数：253,000

统一书号：13031·2589
本社书号：3557·13—1

定价：布脊精装 2.80 元
　　　平　　装 1.80 元

序　言

原来准备写一部《高等数学引论》，共六、七卷．其中第一卷第一、二分册已于 1963 年问世．但由于十年浩劫，其它手稿大部分遭到一“抄”，二“盗”，三“失散”的命运．现在检查劫余，已所剩无几了．于 1981 年出版了第二卷第一分册．本拟鼓其余勇完成原来计划，但实事求是地估计之后，看来所散失的手稿归来无望，重新补写完成全书，诚恐是时不我待，力不从心的愿望了．无已，作两步打算，先把 1962 年在中国科技大学讲授过的，铅印而未逸散的部分出版，以后，再就力所能及进行写作，陆续出版(在同一或不同书名下)．

好在这一部分是有它的独立性的，讲授时的客观情况是：既要照顾到初学同学的水平，又要使前者不越级，后者不觉得是简单重复，总的原则是重用矩阵，实现“1，2，3；n；∞”讲授法的第二步．即，准备前几卷是讲一、二、三个变数，一、二、三维空间；而这一卷是讲 n 个变数或 n 维空间．本卷原稿缺第十、十一、十二，三章，据回忆这三章是讲 n 维空间微分几何学的，原稿虽失，但读者不妨以第一卷空间曲线的微分几何为模型，运用正交群下斜对称方阵的分类而获得 n 维空间曲线的微分性质．这是一个好习题，如果能做得出，则可把正交群改为其它群，而研究其微分不变性质．

岁月无多，不得不计日图效，错谬之处请读者指正．

华罗庚

1981 年 10月11日

又　序

我非常感谢科学出版社能够出版这残余的手稿．这是对科学工作的珍视．但编辑就为此增加了不少麻烦，花费了不少精力，我在此致谢．

当年，在科技大学编写此书时，龚昇同志给我许多帮助，在寻找遗失稿件时，他还多方尽力．

对龚昇同志和负责校对的裴定一同志，我在此敬致谢忱．

华罗庚

1983年 9 月 9 月

目　　录

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

第一章 线性方程组与行列式(复习提纲)

§1. 线性方程组

考虑齐次方程组:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0, \quad i = 1, \cdots, n, \tag{1}$$

这儿 a_{ij} 是复数(或实数) $x_1, \cdots, x_n$ 是未知数. 方程组(1)显然有一个解

$$x_1 = \cdots = x_n = 0. \tag{2}$$

这个解称为显见解.

研究齐次方程组的基本问题是: 除显见解外,(1)是否还有其他解? 能否定出所有的解来?

非齐次方程组

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n \tag{3}$$

的基本问题是: (3) 是否有解? 能否定出所有的解来.

如果 (3) 有一个解 $(x_1^0, \cdots, x_n^0)$, 即

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^0 = b_i,$$

则

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_j - x_j^0) = 0.$$

命 $y_j = x_j - x_j^0$, 则 y_j 是 (1) 的解. 所以解非齐次方程组的问题一变而为两个: 首先是是否有解,其次定出齐次方程组 (1) 的所有的解来.

关于是否有解有次之重要结果:

如果(1)有非显见解,则(3)不能对所有的 $b_1, \cdots, b_n$ 都有解.

如果(1)仅有显见解,则(3)对任意的 $b_1, \cdots, b_n$ 都有解.

§2. 消 去 法

解线性方程组(3)的方法我们着重复习一下 Gauss 消去的原则. 以四个未知数、四个方程为例

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = a_{15}, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = a_{25}, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = a_{35}, \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = a_{45}. \end{cases} \tag{1}$$

1111612

将(1)中的第一个方程除以系数 a_{11} (它叫做“主导”元素)并令

$$b_{1j}=\frac{a_{1j}}{a_{11}} \quad (j>1), \tag{2}$$

则得一个新的方程

$$x_1+b_{12}x_2+b_{13}x_3+b_{14}x_4=b_{15}. \tag{3}$$

再由方程(3)及(1)中的后面三个方程消去 x_1，这样便得到了一个辅助方程组，它包括具有三个未知数的三个方程，此种消去法易于施行，只须顺次将方程(3)乘以 a_{21}，a_{31}，a_{41} (也就是乘以第二、第三和第四行的“主导”元素)，再由(1)中的对应方程减去此式即可，消去一个未知数以后所得的新方程组，其系数用 $a_{ij,1}$ 代表:

$$a_{ij,1}=a_{ij}-a_{i1}b_{1j}(i,\ j\geqslant 2). \tag{4}$$

其次将新方程组中的第一式除以它的“主导”元素 $a_{22,1}$，则得方程

$$x_2+b_{23,1}x_3+b_{24,1}x_4=b_{25,1}. \tag{5}$$

其中

$$b_{2j,1}=\frac{a_{2j,1}}{a_{22,1}} \quad (j>2), \tag{6}$$

然后仿照前面的方法继续进行，我们便得到了一组具有两个未知数的两个方程，它们的系数呈如次的形式:

$$a_{ij,2}=a_{ij,1}-a_{i2,1}b_{2j,1} \quad (i,\ j\geqslant 3). \tag{7}$$

将这组方程的第一式除以主导元素 $a_{33,2}$，并令

$$b_{3j,2}=\frac{a_{3j,2}}{a_{33,2}} \quad (j>3), \tag{8}$$

则得方程

$$x_3+b_{34,2}x_4=b_{35,2}.$$

最后再做一步，即可得出一个方程，它只含一个未知数，而其系数为 $a_{44,3}$，将这个方程除以 $a_{44,3}$，则得

$$x_4=b_{45,3}.$$

将具有系数 $b_{ij,i-1}$ $(j>i)$ 的一切方程合并，便得到一个三角形的方程组，它与原有的方程组等价；它的解就是原有方程组的解，我们要注意，上述方法只有当所有的“主导”元素都不等于零时才能使用.

我们把求三角形方程组的系数的手续称为正面过程，而把求三角形方程组的解的手续称为反面过程(参看附表).

我们还要讲一下验算的方法，用代换 $\bar{x}_i=x_i+1$，则我们得到一组以 $\bar{x}_i$ 为变数的方程组，它的系数与原来的方程相同，而它的常数项等于原方程的系数与常数项之和，我们可以同时计算这两个方程组，求出解 $\bar{x}_i$，并视其是否等于 x_i+1，这就是验算方法.

现在简单地说明一下附表:

正面过程是用如下方法来施行的，写出矩阵系数(包括常数项与核验和)将第一行除以主导元素，并将结果写成矩阵最末一行，再求出第一个辅助系数 $a_{ij,1}(i,\ j\geqslant 2)$：从已知矩阵任取一个元素，由它减去一个乘积——就是上述元素所在的那一行的主导元素与上述元素所在的那一列的最末元素的乘积，重复施行这种手续，当我们得出了仅含一行的矩阵时，正面过程便完成了.

附　表　1

x_1	x_2	x_3	x_4		Σ						Σ
a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}	1.00	0.42	0.54	0.66	0.3	2.92
a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}	a_{26}	0.42	1.00	0.32	0.44	0.5	2.68
a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}	a_{36}	0.54	0.32	1.00	0.22	0.7	2.78
a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	a_{45}	a_{46}	0.66	0.44	0.22	1.00	0.9	3.22
1	b_{12}	b_{13}	b_{14}	b_{15}	b_{16}	1	0.42	0.54	0.66	0.3	2.92
	$a_{22,1}$	$a_{23,1}$	$a_{24,1}$	$a_{25,1}$	$a_{26,1}$		0.82360	0.09320	0.16280	0.37400	1.45360
	$a_{32,1}$	$a_{33,1}$	$a_{34,1}$	$a_{35,1}$	$a_{36,1}$		0.09320	0.70840	−0.13640	0.53800	1.20320
	$a_{42,1}$	$a_{43,1}$	$a_{44,1}$	$a_{45,1}$	$a_{46,1}$		0.16280	−0.13640	0.56440	0.70200	1.29280
	1	$b_{23,1}$	$b_{24,1}$	$b_{25,1}$	$b_{26,1}$		1	0.11316	0.19767	0.45410	1.76493
		$a_{33,2}$	$a_{34,2}$	$a_{35,2}$	$a_{36,2}$			0.69785	−0.15482	0.49568	1.03871
		$a_{43,2}$	$a_{44,2}$	$a_{45,2}$	$a_{46,2}$			−0.15482	0.53222	0.62807	1.00547
		1	$b_{34,2}$	$b_{35,2}$	$b_{36,2}$			1	−0.22185	0.71030	1.48844
			$a_{44,3}$	$a_{45,3}$	$a_{46,3}$				0.49787	0.73804	1.23591
			1	x_4	$\bar{x}_4$				1	1.48240	2.48240
		1		x_3	$\bar{x}_3$			1		1.03917	2.03916
	1			x_2	$\bar{x}_2$		1			0.04348	1.04348
1				x_1	$\bar{x}_1$	1				−1.25780	−0.25779

在反面过程中，我们利用包含 1 的各行而由最末一行开始，精确地说，在这些行的最后一行里，我们从常数项的一列中得到了最后一个未知量的值，而在核验列中得到了核验值，然后可以逐次得出各个未知量的值，只要由倒数第二列的元素减去对应系数 b 与前面所得未知量 i 值的乘积即可，在表格的末尾写出 1 字，可以帮助我们找出在所要各行中对应于已知 x 的系数，例如

$$\begin{aligned} x_2 &= b_{25,1} - b_{23,1}x_3 - b_{24,1}x_4 \\ &= 0.45410 - 0.11316 \times 1.03917 - 0.19767 \times 1.48240 = 0.04348. \end{aligned}$$

最后，我们还要指出用这种方法解 n 个变数的线性方程组所需的乘法与除法的运算次数为 $\dfrac{n}{3}(n^2 + 3n - 1)$.

§3. 消去法的几何解释

先看两个变数的情况.

$$l:\quad ax + by = c, \qquad l':\quad a'x + b'y = c',$$

在平面上各表示一条直线，两个直线有一交点：消去 y，得出仅有 x 的方程，这是这个交点在 x 轴上的投影.

也可以这样看：第一、二方程各表示一条直线 l 与 l'. 由方程

$$\lambda(ax + by - c) + \mu(a'x + b'y - c') = 0$$

定义出一族直线，这些直线由 $\lambda l+\mu l'$ 表示，这些直线有一个重要性质，就是通过 l 与 l' 的交点，不难证明：反过来，凡是通过 l 与 l' 的交点的直线也在这族之中，在这族直线中有一条平行于 y 轴的. 这条直线便是消去 y 后的方程.

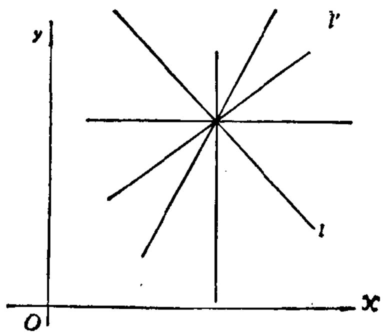

图 1

再看三个变数的情况.

l: $\quad ax+by+cz=d,$

l': $\quad a'x+b'y+c'z=d',$

l'': $\quad a''x+b''y+c''z=d''.$

这表示三个平面，平面族

$$\lambda l+\mu l'=0$$

代表通过 l 与 l' 的交线的所有的平面. 由 l 与 l' 中消去 x 而得出的方程可以看成为：它代表通过交线而平行于 x 轴的平面，也可以看成为：这条交线在 (y, z) 平面上的投影，就是 y, z 平面上的一条直线，再从 l, l'' 中消去 x，又得 y, z 平面上的一条直线.

因此，消去 x，可以看作把三维空间的三个平面求交点的问题变为在 y, z 平面上求两条直线的交点的问题. 这两条直线，正是两条空间直线(平面的交线)的投影.

一般讲来：一个

$$a_{11}x_1+\cdots+a_{1m}x_n=b_n$$

可以看成为 n 维空间的超平面. 消去法便是把 n 从空间 m 个超平面求交点的问题化为 $n-1$ 维空间 $n-1$ 个超平面求交点的问题.

§4. 消去法的力学解释

在一条两端固定的弦线上取 n 点 $P_1, \cdots, P_n$，在这 n 点各加一重物，也就是在这些点各有一向下的力 $F_1, \cdots, F_n$，我们来研究这些点的垂度 $y_1, \cdots, y_n$.

我们假定弦线上的力适合于“线性叠加原则”.

1°. 两组力叠加，其对应的垂度也相加.

2°. 所有力都乘以同一实数，则所有的垂度也乘上这一个相同的数.

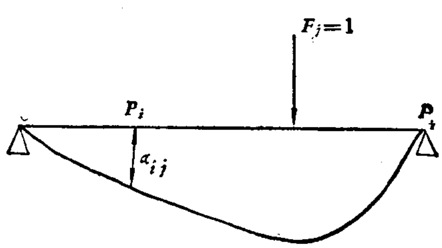

图 2

以 a_{ij} 表示当在 P_j 点上作用一个单位力时点 P_i 的垂度. 这样，力 $F_1, \cdots, F_n$ 的联合作用后的垂度 $y_1, \cdots, y_n$ 等于

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}F_j=y_i \quad (i=1, 2, \cdots, n). \tag{1}$$

解线性方程组的问题，也就是给了垂度 $y_1, \cdots, y_n$ 要求出力 $F_1, \cdots, F_n$ 的问题了.

在 P_1 点加一个反作用力 R，这样单位力作用于 P_j 时，P_i 点的垂度等于

$$b_{ij}=a_{ij}+Ra_{i1}.$$

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

考虑把弦线固定于 P_1 的情况，也就是

$$b_{1j}=0,\qquad a_{1j}+Ra_{11}=0,$$
$$R=-a_{1j}/a_{11}.$$

也就是在 P_j 点加一个单位力，如果要在 P_1 加一个力使 P_1 固定，这个力是 $-a_{1j}/a_{11}$，这时

$$b_{ij}=a_{ij}-a_{1j}a_{i1}/a_{11}.$$

从 (1) 式消去 F_1，得

$$\sum_{j=2}^{n}(a_{ij}-a_{1j}a_{i1}/a_{11})F_j=y_i-a_{i1}y_1/a_{11}. \qquad (2)$$

这就是加支点后的平衡方程，在 P_1 加了支点，在 P_j 作用一个单位力，b_{ij} 就是 P_i 的垂度. 逐步消去，就是逐步加支点的过程.

§5. 经 济 平 衡

假定有 n 种生产品 $P_1,\cdots,P_n$ 生产一个单位 P_j 需要 a_{ij} 单位 P_i，如果各产品的数量是 $x_1,\cdots,x_n$，为了生产这些产品，P_i 类产品的总消耗是

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j,\quad 1\leqslant i\leqslant n.$$

能够供给市场的数量是

$$x_i-\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i.$$

因此，知道了市场需要 $b_1,\cdots,b_n$，反回来考虑给各工业的生产指标 $x_1,\cdots,x_n$ 也是一个解线性方程的问题.

这类方程当然可以用消去法解，但更好是用叠代法解，关于叠代法将来再谈.

§6. 线性迴归分析

某一变量 ξ 决定于 n 个因素

$$\eta_1,\cdots,\eta_n.$$

我们已经做了 N 次实验得出的实验数据是

$$\xi^{(i)},\ \eta_1^{(i)},\ \eta_2^{(i)},\cdots,\ \eta_n^{(i)},\quad i=1,\cdots,N.$$

我们考虑线性关系

$$\xi=\sum_{j=1}^{n}a_j\eta_j$$

问题是怎样的线性关系，差方和最小，也就是，如果使

$$\zeta^{(i)}=\sum_{j=1}^{n}a_j\eta_j^{(i)},$$

求怎样的 a_j 使

$$\sum_{i=1}^{N}(\xi^{(i)}-\zeta^{(i)})^2$$

最小即求

$$F(a_1\cdots,a_n)=\sum_{i=1}^{N}\left(\xi^{(i)}-\sum_{j=1}^{n}a_j\eta_j^{(i)}\right)^2 \tag{1}$$

的极小值.

命

$$a_{jk}=\sum_{i=1}^{N}\eta_j^{(i)}\eta_k^{(i)},\qquad b_k=\sum_{i=1}^{N}\xi^{(i)}\eta_k^{(i)}.$$

我们现在证明

$$\sum_{j=1}^{n}a_{jk}x_j=b_k,\qquad k=1,2,\cdots,n \tag{2}$$

的解答 $x_j=a_j$ 使 (1) 取最小值.

我们现在来证明这一点：如果 $a_1,\cdots,a_n$ 并不适合于(2). 例如：有一个 k 使

$$\sum_{j=1}^{n}a_{jk}a_j-b_k=-\alpha_k\neq 0.$$

我们考虑

$$\begin{aligned}
&F(a_1,\cdots,a_{k-1},a_k+\varepsilon,a_{k+1},\cdots,a_n)\\
&=\sum_{i=1}^{N}\left(\xi^{(i)}-\sum_{i=1}^{n}a_j\eta_j^{(j)}+\varepsilon\eta_k^{(i)}\right)^2\\
&=\sum_{i=1}^{N}\left(\xi^{(i)}-\sum_{j=1}^{n}a_j\eta_j^{(i)}\right)^2+2\varepsilon\sum_{i=1}^{N}\left(\xi^{(i)}-\sum_{j=1}^{n}a_i\eta_j^{(i)}\right)\eta_k^{(i)}+\varepsilon^2\sum_{i=1}^{n}(\eta_k^{(i)})^2\\
&=\sum_{i=1}^{N}\left(\xi^{(i)}-\sum_{j=1}^{n}a_j\eta_i^{(i)}\right)^2+2\varepsilon\left(b_k-\sum_{j=1}^{n}a_{jk}a_j\right)+\varepsilon^2a_{kk}\\
&=F(a_1,\cdots,a_k)+2\varepsilon\alpha_k+\varepsilon^2a_{kk}.
\end{aligned}$$

凑方得

$$\begin{aligned}
&F(a_1,\cdots,a_{k-1},a_k+\varepsilon,a_k,\cdots,a_n)\\
&\qquad=F(a_1,a_2,\cdots,a_n)+a_{kk}\left(\varepsilon+\frac{\alpha_k}{a_{kk}}\right)^2-\frac{\alpha_k^2}{a_{kk}}.
\end{aligned} \tag{3}$$

如果 $\alpha_k\neq 0$，则 $F(a_1,\cdots,a_n)$ 不是最小值，因为在 (3) 式中取 $\varepsilon=-\alpha_k|a_{kk}$，则

$$F(a_1,\cdots,a_{k-1},a_k+\varepsilon,a_k,\cdots,a_n)$$

的数值小于 $F(a_1,\cdots,a)$ 的数值了.

因此：求迴归平面的问题一变而为解线性方程的问题了.

致于要证明，适合于 (2) 的解一定使 F 取最小值，这一点的证明不难，如果 (2) 仅有一个解，当然毫无问题，因为由 (3) 可知不适合 (2) 的都不可能使 F 极小.（读者自证：(2)一定有解，并处理 (2) 有不止一个解的情况.）

方程组 (2) 当然可以用消去法来解，但是这是一个有对称系数的联立方程式，即

$$a_{jk}=a_{kj},$$

关于这样的方程组我们另有较好的计算方法.

以上的证明的优点之一，也许有人会指出，它避开了微积分，直接用初等的"凑方"法来处理了，实际上，更好的优点在于这个方法介绍了计算数学上的一个重要方法——松弛法.

特别在计算逥归分析时，松弛法更有价值，方法是：

1）先任意地取一组 $a_1,\cdots,a_n$.

2）任意地算一个

$$\alpha_k=\sum_{j=1}^{n}a_{jk}a_j-b_k,$$

如果 $\alpha_k\neq 0$，把

$$a_1,\cdots,a_{k-1},a_k+\varepsilon,\cdots,a_n$$

作为原出发点，如果 $\alpha_k=0$，则要换一个 k.

3）一般的办法是 $k=1,2,\cdots,n,1,2,\cdots,n,\cdots$ 周而复始地进行计算，这样便可以得出所求的解答了.

这方法之所以命名为松弛法的原因固在于此，另一点是如果算错了，不必从头算，依错算下去，依然得出正确的结果来（即从错了的 $(a_1,\cdots,a_n)$ 再开始算下去，依然能得出结果来的）.

当然，并不是说常常错，而是说偶然算错了关系不大而已.

虽然"松弛"，但偶而略为紧张些可以帮我们更有效地解决问题，例如：比较一下

$$\alpha_k/a_{kk},\qquad k=1,2,\cdots,n$$

谁大，取使这值最大的整数 k 出发最有利，因为由(3)可知在 F 上减得多了，这方法一定可以逐步逼近原解答的.

§7. 行　列　式

建议从 §1 的关系引进行列式，也就是用数学归纳法来定义行列式，即行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}.$$

此处 A_{ij} 是由原行列中划掉第 i 行，第 j 列所得出的 $n-1$ 行的行列式的数值，再乘以 $(-1)^{i+j}$.

A_{ij} 称为 a_{ij} 的余因子.

行列式的重要性质：

(1) 一行(列)同以 k 乘之，则行列式的数值是原来的 k 倍.

(2) 把一行(列)的 h 倍加到另一行(列)上，行列式的数值不变.

(3) 两行(列)互换，行列式变号，由此可知两行相等，行列式之值为 0.

解方程式的 Cramer 法则：

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i$$

的解答是

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}}{|a_{ij}|},$$

x_i 有相似的表达式，但这个是把 $|a_{ij}|$ 中的第 1 列换为"b"，而那个是把第 i 列换为"b"。

齐次方程的基本定理：

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0, \quad i = 1, \cdots, n.$$

有非显见解的必要且充分条件是

$$|a_{ij}| = 0.$$

简单推论 1. 如果 $n > m$，方程组

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0, \quad i = 1, \cdots, m$$

一定有非显见解，因为我们可以虚加上 $n-m$ 个方程

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0, \quad i = m+1, \cdots, n.$$

其中 $a_{ij} = 0$，$m+1 \leqslant i \leqslant n$，$1 \leqslant j \leqslant n$.

简单推论 2. 如果 $n \leqslant m$，则方程组

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_j = 0, \quad i = 1, \cdots, m \tag{1}$$

有非显见解，一定是其中任意 n 个方程的行列式都等于 0。

比基本定理较一般些的结果是，如果任意 n 个方程式的行列式都等于 0，则 (1) 有一个非显见解.

证明 1) 由假定可知

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & \cdots, & a_{1n} \\ a_{22}, & \cdots, & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-11}, & \cdots, & a_{n-1n} \\ a_{i1}, & \cdots, & a_{in} \end{vmatrix} = 0.$$

把这式子展开得

$$a_{i1}A_1 + \cdots + a_{in}A_n = 0, \qquad A_n = \begin{vmatrix} a_{11}, & \cdots, & a_{1n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix}.$$

如果 $A_1, \cdots, A_n$ 不全等于 0，则方程组 (1) 显然有解 $x_i = A_i$.

2) 如果经过重排方程的次序，或重编 x_i 的号码，使

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-11} & \cdots & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix} \neq 0,$$

则由 1) 可知本定理正确.

3) 现在考虑 2) 没有包括进去的情况. 考虑 $x_n = 0$ 时的情况，现在有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots, & a_{1n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-21}, & \cdots, & a_{n-2n-1} \\ a_{i1}, & \cdots, & a_{in-1} \end{vmatrix} = 0.$$

展开得

$$a_{i1}B_1 + \cdots + a_{in-1}B_{n-1} = 0.$$

即取 $x_1 = B_1, \cdots, x_{n-1} = B_{n-1}, x_n = 0$ 就是解.

这样可以运用归纳法来证明本定理.

现在来研究 §1 中可提出的齐次方程组与非齐次方程组的关系.

首先：如果

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0, \quad i = 1, \cdots, n$$

有非显见解，则

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i = 0, \quad j = 1, \cdots, n \tag{2}$$

也有非显见解.

这是显然的，因为行换为列，行列式的数值不变. 命

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i a_{ij} = 0,$$

并可假定 $\xi_1 \neq 0$ 如此则由

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \tag{3}$$

可知

$$\sum_{i=1}^{n} b_i\xi_i = \sum_{i=1}^{n} \xi_i\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\xi_i\right)x_j = 0.$$

显然 $b_1 = 1, b_2 = \cdots = b_n = 0$ 时，方程组(3)无解.

如果(2)仅有显见解，则

$$|a_{ij}| \neq 0.$$

由 Cramer 公式可知方程(2)有解.

注意 Cramer 公式虽然漂亮，但是真正解方程式时不常用它，因为其中运算的次数太多了.

§8. Vandermonde 行列式

定理 1

$$\Delta = \Delta(x_1, x_2, \cdots x_n) = \begin{vmatrix} 1, 1, & \cdots & 1 \\ x_1, x_2, & \cdots, & x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-1}, x_2^{n-1}, & \cdots, & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{n\geq i>j\geq 1} (x_i - x_j).$$

证明 1) 用归纳法，$n = 2$ 时，显然正确.

2) 在第 $2, 3, \cdots, n$ 行中各减前一行的 x_1 倍如此得

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_2 - x_1, \cdots, x_n - x_1 \\ x_2(x_2 - x_1), \cdots, x_n(x_n - x_1) \\ \cdots\cdots \\ x_2^{n-2}(x_2 - x_1), \cdots, x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix}$$

$$= (x_2 - x_1)\cdots(x_n - x_1)\begin{vmatrix} 1, & \cdots\cdots, & 1 \\ x_2, & \cdots\cdots, & x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_2^{n-2}, & \cdots\cdots, & x_2^{n-2} \end{vmatrix},$$

用归纳法即得所求.

附证　当 $x_i = x_j$ 时 $\Delta = 0$，因此 $x_i - x_j$ 可除尽 Δ，因此

$$\prod_{n\geqslant i>j\geqslant 1}(x_i - x_j)$$

可除尽 Δ，再比较 $x_n^{n-1}x_{n-1}^{n-2}\cdots x_2\cdot 1$ 的系数可得本定理.

这定理有以下的显然推广.

定理 2　命 $P_i(x)$是第 i 次多项式，其 x^i 的系数是 a_i. 如此则

$$\begin{vmatrix} P_0(x_1), & \cdots, & P_0(x_n) \\ P_1(x_1), & \cdots, & P_1(x_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ P_{n-1}(x_1), & \cdots, & P_{n-1}(x_n) \end{vmatrix} = a_0\cdots a_n \prod_{n\geqslant i>j\geqslant 1}(x_i - x_j). \tag{1}$$

这个结果的证明是容易的，首先，第一行全是 a_0，以 a_0 除这一行，得一同为 1 的行的行列式，命

$$P_2(x) = a_1x + a_1'$$

在第二行中减去第一行的 a_1' 倍，再除以 a_1，则第二行变为

$$x_1, \cdots\cdots, x_n.$$

命

$$P_2(x) = a_2x^2 + a_2'x + a_2''$$

在第三行中减去第一行的 a_2'' 倍，减去第二行的 a_2' 倍，再除以 a_2，第三行变为

$$x_1^2, \cdots\cdots, x_n^2.$$

依此绕行，即得所求的公式了.

定理 3　我们有

$$\begin{vmatrix} 1, & \cdots, & 1 \\ \cos\theta_1, & \cdots, & \cos\theta_n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cos(n-1)\theta_1, & \cdots, & \cos(n-1)\theta_n \end{vmatrix} = 2^{\frac{1}{2}(n-2)(n-1)} \prod_{n\geqslant i>j\geqslant 1}(\cos\theta_i - \cos\theta_j)$$

及

$$\begin{vmatrix} \sin\theta_1, & \cdots, & \sin\theta_n \\ \sin 2\theta_1, & \cdots, & \sin 2\theta n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \sin n\theta_1, & \cdots, & \sin n\theta_n \end{vmatrix} = 2^{\frac{1}{2}n(n-1)}\sin\theta_1\cdots\sin\theta_n \prod_{n\geqslant i>j\geqslant 1}(\cos\theta_i - \cos\theta_j).$$

证明　由于

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta,$$

因此

$$2\cos n\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^n + (\cos\theta - i\sin\theta)^n$$

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com