多变量线性控制系统

● 程鹏 编 ● 北京航空航天大学出版社 ● DUOBIANLIANG … NGZHI

多变量线性控制系统

程 鹏 编

北京航空航天大学出版社

内 容 简 介

本书讲述了以多项式矩阵为基础的多变量系统的代数方法和频率域方法，包括系统的描述、可控性与可观测性、系统的零点与极点、动态补偿器设计的代数方法，逆乃奎斯特阵列方法、特征轨迹方法和奇异值分解方法。

本书注重系统概念和工程设计方法的论述，每章有适当数量的习题，便于读者学习时参考。

本书可作为系统和控制专业的大学高年级学生和研究生的教材，也可供有关领域的科技工作者参考。

北京航空航天大学出版社出版　　　　责任编辑　樊　毅

多变量线性控制系统

DUOBIANLIANG XIANXING KONGZHIXITONG

程　鹏　编

新华书店总店科技发行所发行　　　各地新华书店经销

昌平建华印刷厂排版　　朝阳科普印刷厂印刷

850×1168　1/32　印张：11.75　字数：315千字

1990年11月第一版　1990年11月第一次印刷　印数：2000册

ISBN 7-81012-205-3/TP·039　　　定价：2.70元

前　言

本教材是为自动控制系研究生的选修课程《多变量系统理论》而编写的，它包括以多项式矩阵为基础的多变量系统代数方法和现代频率域方法。

单输入、单输出系统的复数域和频率域研究构成了经典控制理论的主要内容，基于传递函数、频率响应特性这两个基本概念发展起来的系统设计方法（如乃奎斯特方法、伯德图法以及根轨迹方法），至今仍然是设计单变量系统行之有效的方法。自从六十年代卡尔曼提出控制系统（A、B、C)模型，概括出可控性、可观测性等概念之后，状态空间方法获得了迅速的发展，特别是它与最优控制理论相结合，可以成功地阐明线性系统控制的许多有意义的问题，它广泛的成功应用，也显示了现代控制理论的生命力与优越性。如何将状态空间的研究成果和经典的控制理论联系起来？如何将经典的复数域、频率域的概念和设计方法推广到多变量的情况？这不仅是控制领域理论工作者更是从事实际系统设计工作的工程师们所关心的问题。

从1970年左右开始发展起来的以多项式矩阵为工具的多变量系统理论，不仅借助了状态空间方法所取得的成果，而且沿袭与扩展了经典控制理论的主要概念和方法。它的基本结果被认为较好地沟通了现代控制理论和经典控制理论。特别是设计系统的频率域方法具有鲜明的物理概念，更易为工程技术人员所接受和使用，目前现代频率域方法已经成功地用于化工、造纸、飞机发动机、自动驾驶仪、核反应堆、机器人控制等领域的控制系统设计。由于多变量系统理论已经显示了它的优越性和广泛的应用前景，因此目前仍处在迅速的发展之中。

为了使读者了解这一领域的基本结果，本书选择了英国学者罗森布卢克教授等的开创性工作作为基本内容加以介绍。全书由八章组成，第一章作为数学准备，介绍了多项式矩阵和有理函数矩阵。第二章至第四章介绍了一般的系统理论，包括系统的描述、可控性与可观测性及系统的零点和极点。第五章讨论了以解多项式矩阵方程为手段的系统补偿器设计问题。第六章至第八章介绍系统设计的几种频率域方法，包括逆乃奎斯特阵列法、特征轨迹法和奇异值分解的应用。各章的篇末均附有少量的练习题。

本书编写过程中曾参考了国内外许多专家与学者所写的论文与著作。这里特别应该提到，黄琳、吴麒、韩京清、王朝珠、王恩平等国内学者的著作给了编者很大的帮助，在此一并表示感谢。还应当感谢严拱天、姜长生同志，他们曾先后给本书的编写提纲提过许多宝贵的意见。

由于编者水平的限制，书中失误和疏漏之处难以避免，敬请读者指正。

北京航空航天大学　程　鹏

1989.10

目　　录

第一章 数学准备知识

在单变量系统的复数域（或简称 s 域）的研究中，多项式和有理函数占有重要的地位，但在多变量系统的研究中，需要用多项式矩阵与有理函数矩阵代替多项式和有理函数。根据本书的内容需要，本章将介绍以下几方面的基础知识：多项式和多项式方程、多项式矩阵和有理函数矩阵。在叙述方法上将力求通俗易懂，而不注重数学上的严格概念。

§1-1 多项式与多项式方程

多项式是单变量系统研究中最基本的对象之一，著名的劳斯判据、霍尔维茨判据就是研究多项式的零点是否位于复平面的左半部这样一个问题；而某些补偿器的设计也可以归结为求解某一个多项式方程。本节简单介绍系数在实数域中的一元多项式的基本知识。

多项式及其运算 设a_0，a_1，…，a_n是$n+1$个实数，s是一个符号，则表达式

$$p(s)=a_n+a_{n-1}s+\cdots+a_1s^{n-1}+a_0s^n \qquad (1\text{-}1)$$

称为实数域上的一元多项式。若$a_0\neq 0$，则称a_0为$p(s)$的首项系数，这时n称为$p(s)$的次数，记为$\partial p(s)=n$。又若$a_0=1$，则称$p(s)$为n次首一多项式。

按矩阵的乘法，（1-1）式可形式地写成

9110102

$$p(s)=(a_n\ \ a_{n-1}\cdots a_1 a_0)\begin{bmatrix}1\\ s\\ s^2\\ \vdots\\ s^n\end{bmatrix}=(1\ \ s\cdots\ \ s^n)\begin{bmatrix}a_n\\ a_{n-1}\\ \vdots\\ a_0\end{bmatrix}\qquad(1\text{-}2)$$

（1-2）式中的向量（$a_n\ \ a_{n-1}\ \ \cdots\ \ a_1\ \ a_0$）或其转置称为$p(s)$的系数向量。多项式的四则运算可以在系数向量之间来进行，具体做法如下：

设有两个多项式

$$p(s)=a_n+a_{n-1}s+\cdots+a_1s^{n-1}+a_0s^n$$

$$q(s)=b_m+b_{m-1}s+\cdots+b_1s^{m-1}+b_0s^m$$

并假定$n\geqslant m$，这时$p(s)\pm q(s)$的系数向量为

$$[a_n\cdots a_{n-m}\ \ a_{n-m-1}\cdots a_1\ \ a_0]\pm[b_m\ \ b_{m-1}\cdots b_0\ 0\ \ 0\cdots 0]$$

设α是任意实数，则$\alpha p(s)$的系数向量为

$$[\alpha a_n\ \ \alpha a_{n-1}\cdots\ \alpha a_1\ \ \alpha a_0]$$

$p(s)$和$q(s)$乘积$p(s)q(s)$的系数向量可按下列方式来确定：首先定出$sp(s)$，$s^2p(s)$，$\cdots$，$s^mp(s)$的系数向量分别为

$$\begin{array}{l}[0\quad a_n\quad a_{n-1}\quad\cdots\quad a_1\ \ a_0]\\ [0\quad 0\quad a_n\quad\cdots\quad a_1\ \ a_0]\\ \qquad\qquad\vdots\\ [\underbrace{0\ \cdots\ 0}_{m\text{个}}\ a_n\ \ a_{n-1}\ \cdots\ \ a_1\ \ a_0]\end{array}$$

因而$p(s)q(s)$可表成

$$[b_m\ b_{m-1}\ \cdots\ b_1\ \ b_0]\begin{bmatrix}1\\ s\\ \vdots\\ s^m\end{bmatrix}p(s)$$

$$=b_m\ [b_{m-1}\cdots b_1\ b_0]\begin{bmatrix} p(s)\\ sp(s)\\ \vdots\\ s^m p(s)\end{bmatrix}$$

$$=[b_m\ b_{m-1}\ \cdots b_1\ b_0]$$

$$\cdot\begin{bmatrix} a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 & & & 0\\ & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 & & \\ & & \ddots & & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1\\ s\\ \vdots\\ s^n\\ \vdots\\ s^{n+m}\end{bmatrix}$$

或者可表成

$$[a_n\ a_{n-1}\ \cdots a_1\ a_0]$$

$$\cdot\begin{bmatrix} b_m & b_{m-1} & \cdots & b_1 & b_0 & & & 0\\ & b_m & b_{m-1} & \cdots & b_1 & b_0 & & \\ & & \ddots & & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & b_m & b_{m-1} & \cdots & b_1 & b_0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1\\ s\\ \vdots\\ s^m\\ \vdots\\ s^{m+n}\end{bmatrix}$$

因此乘积$p(s)q(s)$的系数向量为

$$[b_m\ b_{m-1}\ \cdots\ b_1\ b_0]\left.\begin{bmatrix} a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 & & & 0\\ & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 & & \\ & & \ddots & & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 \end{bmatrix}\right\}m+1\text{行}$$

或者

$$[a_n\ a_{n-1}\ \cdots\ a_1 a_0]\left.\begin{bmatrix} b_m & b_{m-1} & \cdots & b_1 & b_0 & & & 0\\ & b_m & b_{m-1} & \cdots & b_1 & b_0 & & \\ & & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & b_m & b_{m-1} & & b_1 & b_0 \end{bmatrix}\right\}n+1\text{行}$$

关于多项式的除法，有如下的带余除法定理：设有n次多项式$p(s)$，m次多项式$q(s)$，$n>m$，这时必存在唯一的多项式$r(s)$及$d(s)$满足

$$p(s)=d(s)q(s)+r(s)$$

且$\partial r(s)<\partial q(s)$。$d(s)$叫做$p(s)$除以$q(s)$时的商式，$r(s)$叫做余式。$d(s)$和$r(s)$的系数向量可根据综合除法进行的过程来确定。记为

$$a^0=[a_n \ a_{n-1} \ \cdots \ a_1 \ a_0]$$

$$b^0=[0 \cdots 0 \ \ b_m \ b_{m-1} \ \cdots \ b_1 \ b_0]$$

$$b^i=[0 \cdots 0 \ \ b_m \ \cdots \ b_1 \ b_0 \ 0 \cdots 0]$$

这里a^0，b^0，b^i都是$n+1$维向量，且b^i元素中b_0右边零的数目为i。从a^0减去d_0b^0，使a^0的最后一个元素化为零，得a^1；从a^1减去d_1b^1，使a^1的倒数第二个元素为零，得a^2；依次做下去可将a^0化为$[c_{m-1} \ c_{m-2} \ \cdots \ c_1 \ c_0 \ \ 0 \cdots 0]$，这时余式和商式的系数向量分别为$[c_{m-1} \ c_{m-2} \ \cdots \ c_1 \ c_0]$和$d_{n-m} \ \cdots \ d_1 \ d_0]$。

例1-1 设有$p(s)=2s^4+s^3-s^2+4s-5$，$q(s)=2s^2+s-3$，求其商式和余式的系数向量。

解 因为$n=4$，$m=2$，故按上述做法，可写出

$$a^0=[-5 \quad 4 \quad -1 \quad 1 \quad 2]$$

$$b^0=[\ \ 0 \quad 0 \quad -3 \quad 1 \quad 2]$$

$$b^1=[\ \ 0 \quad -3 \quad 1 \quad 2 \quad 0]$$

$$b^2=[-3 \quad 1 \quad 2 \quad 0 \quad 0]$$

取$d_0=1$，$d_1=0$，$d_2=1$，可化a^0为$[-2 \quad 3 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$，于是余式和商式的系数向量分别为

$$[-2 \quad 3], \qquad [1 \quad 0 \quad 1]$$

即有

$$d(s)=s^2+1, \ r(s)=3s-2$$

两个多项式的公因式及互质 设$p(s)$是多项式，$r(s)$为另一个非零多项式，如果存在一个多项式$p_1(s)$满足

$$p(s)=p_1(s)r(s)$$

则称$p(s)$被$r(s)$除尽，记为$r(s)|p(s)$。而$r(s)$称为$p(s)$的一个因式。

设$p_1(s)$和$p_2(s)$是两个多项式，如果$r(s)$满足

$$r(s)\mid p_1(s), \qquad r(s)\mid p_2(s)$$

则称$r(s)$为$p_1(s)$和$p_2(s)$的一个公因式。若$r(s)$是$p_1(s)$、$p_2(s)$的公因式，且对任意$p_1(s)$、$p_2(s)$的公因式$r_1(s)$均有$r_1(s)\mid r(s)$，则称$r(s)$为$p_1(s)$、$p_2(s)$的最大公因式。

设$p_1(s)$、$p_2(s)$是次数不为零的多项式，若它们的最大公因式是一常数，则称$p_1(s)$和$p_2(s)$是互质的多项式，简称$p_1(s)$和$p_2(s)$互质。

定理1-1 $p_1(s)$和$p_2(s)$互质的充要条件是：存在多项式$\varphi(s)$和$\psi(s)$，$\partial\varphi(s)<\partial p_2(s)$，$\partial\psi(s)<\partial p_1(s)$，使得

$$p_1(s)\varphi(s)+p_2(s)\psi(s)=1 \tag{1-3}$$

这一定理的证明可以用辗转相除法，在普通的高等代数教材中可找到这个证明。设

$$p_1(s)=a_n+a_{n-1}s+\cdots+a_1s^{n-1}+a_0s^n$$

$$p_2(s)=b_m+b_{m-1}s+\cdots+b_1s^{m-1}+b_0s^m$$

可以用$p_1(s)$和$p_2(s)$的系数向量来表示它们互质的条件。为此，定义下列$(m+n)\times(m+n)$矩阵，并称之为$p_1(s)$和$p_2(s)$的结式矩阵：

$$M=\left[\begin{array}{cccccccccc}
a_n & a_{n-1} & & \cdots\cdots & & a_1 & a_0 & 0 & \cdots & 0\\
0 & a_n & a_{n-1} & & \cdots\cdots & & a_1 & a_0 & \ddots & \vdots\\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \ddots & & \ddots & \ddots & 0\\
0 & \cdots & 0 & a_n & a_{n-1} & \cdots & & & a_1 & a_0\\
b_m & b_{m-1} & & \cdots & & b_1 & b_0 & 0 & \cdots & 0\\
0 & b_m & b_{m-1} & & \cdots\cdots & & b_1 & b_0 & \ddots & \vdots\\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \ddots & & \ddots & \ddots & 0\\
0 & \cdots & 0 & b_m & b_{m-1} & & \cdots\cdots & & b_1 & b_0
\end{array}\right]\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} m\text{行}\\ \left.\begin{array}{l}\\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} n\text{行}\end{array} \tag{1-4}$$

定理1-2 $p_1(s)$和$p_2(s)$互质的充要条件是

$$\det M \neq 0 \tag{1-5}$$

证明　充分性：考虑方程组

$$[x_{m-1}\,x_{m-2}\cdots x_1\,x_0\,y_{n-1}\cdots y_1\,y_0]M=[1\ 0\cdots 0]$$

因为$\det M\neq 0$，上述方程组有解，用乘法系数向量公式，可知这个方程相当于

$$x(s)p_1(s)+y(s)p_2(s)=1$$

由定理1-1知$p_1(s)$和$p_2(s)$互质。

必要性：用反证法，若$p_1(s)$与$p_2(s)$互质，但$\det M=0$，即有$x(s)p_1(s)+y(s)p_2(s)=0$。显然$x(s)\not\equiv 0$，否则$y(s)$也恒为零，这与$x(s)$和$y(s)$的系数向量非零相矛盾，因此有

$$p_1(s)=-\frac{y(s)}{x(s)}p_2(s)$$

上式中$x(s)$和$y(s)$可假定无公因式，这时必有$x(s)\,|\,p_2(s)$，即存在$r(s)$，且$\partial r(s)\geqslant 1$使得

$$p_2(s)=r(s)x(s),\quad p_1(s)=-y(s)r(s)$$

成立，这与$p_1(s)$、$p_2(s)$互质矛盾。

例1-2　设有$p_1(s)=s^3-4s^2+5s+6$，$p_2(s)=2s^3-2s+1$。按照（1—4）式可得

$$M=\begin{bmatrix} 6 & 5 & -4 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 6 & 5 & -4 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 6 & 5 & -4 & 1\\ 1 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 2 \end{bmatrix},\quad \det M=3677$$

所以$p_1(s)$与$p_2(s)$互质。

多项式方程　若$D(s)$与$N(s)$是两个多项式，$\partial D(s)=n$，$\partial N(s)\leqslant n$，对次数小于等于$n+m$的任意多项式$D_f(s)$，是否存在多项式$D_c(s)$和$N_c(s)$，$\partial D_c(s)\leqslant m$，$\partial N_c(s)\leqslant m$，使得

$$D_f(s)=D_c(s)D(s)+N_c(s)N(s) \tag{1-6}$$

成立？（1-6）式通常称为Diophantine方程。

定理1-3 多项式方程(1-6)有解的充要条件为$D(s)$和$N(s)$互质，且$m \geqslant n-1$。

证明 设$D_f(s)$、$D(s)$、$N(s)$、$D_c(s)$和$N_c(s)$的系数向量分别可表示为$[D_{f\,m+n}\ \ D_{f\,n+m-1}\cdots D_{f1}\ \ D_{f0}]$、$[D_n\ D_{n-1}\cdots D_1\ \ D_0]$、$[N_n\ \ N_{n-1}\cdots N_1\ \ N_0]$、$[D_{cm}\cdots D_{c1}\ \ D_{c0}]$和$[N_{cm}\cdots N_{c1}\ \ N_{c0}]$，这时式（1-6）可表为

$$[D_{f\,n+m}\cdots D_{f1}\ \ D_{f0}]=[D_{cm}\cdots D_{c1}\ \ D_{c0}N_{cm}\cdots N_{c1}\ \ N_{c0}]M \tag{1-7}$$

式中M是由$D(s)$和$N(s)$的系数向量组成的下列 $2(m+1)\times(n+m+1)$矩阵：

$$M=\begin{bmatrix} D_n & D_{n-1} & \cdots & D_0 & & & 0 \\ & D_n & D_{n-1} & \cdots & D_0 & & \\ 0 & & \ddots & & \ddots & & \ddots \\ & & & D_n & D_{n-1} & \cdots & D_0 \\ N_n & N_{n-1} & \cdots & N_0 & & & 0 \\ & N_n & N_{n-1} & \cdots & N_0 & & \\ 0 & & \ddots & & \ddots & & \ddots \\ & & & N_n & N_{n-1} & \cdots & N_0 \end{bmatrix}\begin{matrix} \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} m+1\text{行} \\ \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} m+1\text{行} \end{matrix}$$

将（1-7）式的转置简记为

$$d_f=M^T g_c$$

其中，$d_f=[D_{f\,n+m}\ D_{f\,n+m-1}\cdots D_{f1}\ \ D_{f0}]^T$，$g_c=[D_{cm}\cdots D_{c1}\ \ D_{c0}\ \ N_{cm}\cdots N_{c1}\ \ N_{c0}]^T$。方程$d_f=M^T g_c$对任意的$d_f$有解当且仅当$d_f\in \mathrm{Im}(M^T)$，由$d_f$的任意性可知，应有$M^T$的列组成$(n+m+1)$维空间的基底。$M^T$共有$2(m+1)$列，因而有$2(m+1)\geqslant n+m+1$或$m\geqslant n-1$。当$m=n-1$时，$M^T$有$2n$列，这$2n$列应线性无关，由定理1-2可知$D(s)$和$N(s)$互质。当$m>n-1$时，利用习题1-16的结果可得同样结论。必要性证毕。充分

性容易由(1-7)式直接得到，并且可知当$m=n-1$时，(1-7)式有唯一解；当$m\geqslant n$时，(1-7)式的解具有$m-n+1$个自由量。

推论1-3 定理1-3中

(1)当$\partial N(s)<n$时，可以做到$\partial D_c(s)\geqslant\partial N_c(s)$

(2)当$\partial N(s)=n$时，若要求$\partial D_c(s)>\partial N_c(s)$，则需要$m\geqslant n$。

证明 (1)证$D_{c0}\neq 0$。因为$\partial N(s)<n$，所以$N_0=0$，由(1-7)式可知$D_{f0}/D_0=D_{c0}$，因$D_{f0}\neq 0$故有$D_{c0}\neq 0$。

(2)当$m=n-1$时，方程(1-7)的解唯一，这时不能保证$D_{c0}\neq 0$。当$m\geqslant n$时，方程数才小于未知数个数，选取$N_{c0}=0$，$D_{c0}=D_{f0}/D_0$，才可保证$\partial D_c(s)>\partial N_c(s)$。

定理1-3对于单变量系统补偿器的设计是基本的。而推论1-3则保证了补偿器传递函数的物理实现性。

§1-2 多项式矩阵

一个多项式矩阵$M(s)$，系指元素都是s的多项式的矩阵

$$M(s)=\begin{bmatrix} m_{11}(s) & m_{12}(s) & \cdots & m_{1p}(s) \\ m_{21}(s) & m_{22}(s) & \cdots & m_{2p}(s) \\ & \cdots & & \\ m_{q1}(s) & m_{q2}(s) & \cdots & m_{qp}(s) \end{bmatrix} \qquad (1\text{-}8)$$

式中$m_{ij}(s)$($i=1,2,\cdots,q$；$j=1,2,\cdots,p$)都是s的多项式。

多项式矩阵作为矩阵的一种类型，它的加法、数乘、乘积以及转置等的运算规则和一般数字矩阵相同。

多项式矩阵的行次和列次 (1-8)式的$M(s)$诸元素$m_{ij}(s)$中的最高次数称为$M(s)$的次数，记为$\partial M(s)$：

$$d=\partial M(s)=\max\{\partial m_{ij}(s)\ \ i=1,2,\cdots,q.\ j=1,2,\cdots,p.\} \qquad (1\text{-}9)$$

$m_{i1}(s)$，$m_{i2}(s)$，…，$m_{ip}(s)$的次数之最高者称为$M(s)$的第i行行次，记为$\partial_{hi}M(s)$。同样可定义$M(s)$的第j列列次，记为$\partial_{Lj}M(s)$。即有

$$\sigma_i=\partial_{hi}M(s)=\max\{\partial m_{ij}(s)\quad j=1,2,\cdots,p.\} \qquad (1\text{-}10)$$

$$\delta_j=\partial_{Lj}M(s)=\max\{\partial m_{ij}(s)\quad i=1,2,\cdots,q.\} \qquad (1\text{-}11)$$

$M(s)$的行次项系数矩阵$\Gamma_h M(s)$是一个$q\times p$的常数矩阵，其构造方法如下：若$\partial m_{ij}(s)<\sigma_i$，就取零；若$\partial m_{ij}(s)=\sigma_i$，就取$m_{ij}(s)$的最高次项的系数，即$\Gamma_h M(s)$的第$i$个行向量是由$M(s)$第$i$行中$s$的$\sigma_i$次幂的系数组成的。同样，也可以定义列次项系数矩阵$\Gamma_L M(s)$。如果$\Gamma_h M(s)$是满秩阵，则称$M(s)$为行正则，如果$\Gamma_L M(s)$是满秩阵，则称$M(s)$为列正则。这里，满秩是指秩等于min$(p,q)$。有的文献上把行正则称为行既约的，把列正则称为列既约的。

例1-3 设有多项式矩阵

$$M(s)=\begin{bmatrix} s^2-3 & 1 & 2s \\ 4s+2 & s & 0 \\ -s^2 & s+3 & -3s+2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

易见：$d=2$；$\sigma_1=2$，$\sigma_2=1$，$\sigma_3=2$，$\sigma_4=0$；$\delta_1=2$，$\delta_2=1$，$\delta_3=1$，且

$$\Gamma_h M(s)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix},\qquad \Gamma_L M(s)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

所以$M(s)$是列正则的，但不是行正则的。

定理1-4 设P是$q\times q$的可逆常值方阵，Q是$p\times p$的可逆常值方阵，则

$$\partial_{hi}[M(s)Q]=\partial_{hi}M(s)\quad (i=1,2,\cdots,q.) \qquad (1\text{-}12)$$

$$\partial_{Lj}[PM(s)]=\partial_{Lj}M(s)\quad (j=1,2,\cdots,p.) \qquad (1\text{-}13)$$

证明　设$\Gamma_h M(s)$的第i行为a_i^T，它如果是零向量，则说明$M(s)$的第i行是零向量，$\partial_{hi}M(s)=0$，这时$M(s)Q$的第i行也是零向量，故有$\partial_{hi}[M(s)Q]=0$；如果a_i^T是非零向量，由于它是$M(s)$第i行中各多项式的σ_i次幂的系数所组成，而Q可逆，$a_i^TQ\neq 0$，所以$M(s)Q$的第i行的最高次幂仍是σ_i，（1-12）式得证。同理可证（1-13）式。

这一定理说明，若$M(s)$右乘一个可逆常值阵不会改变其行次；同样$M(s)$左乘一个可逆常值阵也不会改变其列次。由定理1-4可以得到有关多项式矩阵次数的以下推论：

推论1-4

$$\partial M(s)=\partial[PM(s)]=\partial[M(s)Q]=\partial[PM(s)Q]$$

证明

$$\begin{aligned}\partial M(s)&=\max[\partial_{L1}M(s),\cdots,\partial_{Lp}M(s)]\\&=\max[\partial_{L1}(PM(s)),\cdots,\partial_{L1}(PM(s))]\\&=\partial[PM(s)]\end{aligned}$$

同理有$\partial M(s)=\partial[M(s)Q]$及$\partial[M(s)Q]=\partial[PM(s)Q]$.

为了说明以上概念在系统分析中的一个应用，举例如下：

例1-4　给定系统矩阵为（A、B、C），其传递函数矩阵

$$G(s)=M(s)/\det(sI-A)$$

这里　$M(s)=C\operatorname{adj}(sI-A)B=C[R_{n-1}s^{n-1}+\cdots+R_1s+R_0]B$

现考虑$M(s)$的第i行为

$$c_iR_{n-1}Bs^{n-1}+\cdots+c_iR_1Bs+c_iR_0B$$

上式中c_i为矩阵C的第i行。所以，$M(s)$的第i行的行次

$$\sigma_i=\max_{0\leqslant k\leqslant n-1}\{k,\ c_iR_kB\neq 0\}$$

即　$c_iR_{\sigma_i}B\neq 0$，$c_iR_kB=0$　（$k=\sigma_i+1,\cdots,n-1$）

再利用R_i应满足的递推公式，可以证明

$$\sigma_i=n-d_i-1$$