应用数学丛书

逼近论

徐利治　周蕴时　孙玉柏　编著

国防工业出版社

应用数学丛书

逼　近　论

徐利治　周蕴时　孙玉柏 编著

国防工业出版社

内容简介

本书用泛函分析的观点阐述了函数逼近理论的基本内容。为了给技术实践提供有力的工具，用了较多的篇幅（六，七两章）介绍了一些切实可行的逼近方法，特别是较系统地介绍了多元样条函数方法和多元插值方法。本书可以作为科技人员的参考书，也可以作为计算数学专业高年级学生（研究生）的选修课（专业基础课）教材。

应用数学丛书
逼　近　论
徐利治　周蕴时　孙玉柏　编著
*
国防工业出版社出版
新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售
国防工业出版社印刷厂印装
*
850×1168 1/32　印张 9 3/8　246 千字
1985年6月第一版　1985年6月第一次印刷　印数：0,001—5,700册
统一书号：15034·2778　定价：1.95元

出版说明

近二十年来电子工程、控制工程、系统工程及其它领域都获得巨大发展。众所周知，这些科学技术领域的发展是与现代逐渐形成的应用数学学科紧密相关，相辅相成。尤其近年发展起来的边缘学科，更是与数学紧密结合。但一般数学专著比较偏重于论证严谨，全面系统，篇幅较大，理论较深。广大科技工作者学习此类著作，往往需时较多，与工作结合不紧，收效不大。本丛书将为目前在电子工程、控制工程、系统工程等领域工作的同志在数学基础的提高上，提供适合其工作特点的数学参考书。

本丛书是一种介于现代应用数学专著与工程专业理论书籍之间的桥梁参考著作。更着重于科技工作中应用较多的数学概念，分析和解题的基本技巧。也包括一部分适合于实际工作者为学习更高深的现代应用数学专著所需之基础知识。

本丛书选材包括三个方面：基础数学，应用数学有关领域的基础介绍，应用于科技中的典型基础专业理论。出版采用分册形式，各册内容独立，自成体系，但仍有少量交叉，分期分批出版。

丛书可供大专院校有关专业研究生、教师、从事科研生产的工程师参考。

前　言

函数逼近论是一门历史悠久、内容丰富而且实践性很强的数学。正因为它和现代计算数学的发展需要密切联系，所以二十多年来它继续不断取得新的进展。如果说逼近论发展的古典时期，是以单变量的函数构造论作为探讨重点，那么现代函数逼近论的主攻方向，可以说已经逐步转向多元逼近和各种构造性逼近工具的研究方面。例如，多元插值、样条函数、有理逼近和沃尔什分析等等已经成为人们越来越有兴趣的领域。

本书以介绍函数逼近论的基本内容为目的，所以属于古典逼近论范畴的最佳一致逼近、平方逼近、函数类与逼近阶的连系以及一元函数插值法等均在本书中占有相当篇幅。但是为了突出本书部分题材内容的构造特征和实践性，我们还是用了较大篇幅讲述现行有效的多元逼近方法。例如，在第六章的后四节，专门介绍了崔锦泰（美籍华裔教授）和王仁宏在多元样条分析方面的工作。第七章介绍了现行的一些多元插值方法。特别，§7.1系取材于梁学章 1965 年的研究生毕业论文，其目的是为了让读者从一个角度去了解一下多元插值法的轮廓。在这最后一章中，我们还介绍了为工程师们所乐于采用的矩形区域上与三角形区域上的超限插值方法。事实上，这一章给出了许多简明具体的插值方法，它们都是可以直接服务于数值计算的多元逼近公式。

近些年来，国内逼近论界甚为活跃，队伍之大，成果之多是前所未有的。为了向有兴趣的读者介绍 1978 年以来的新成果，本书设置了一个附录（即徐利治 1983 年访问美国时所做的学术报告）以供参考。

我们的多年亲密同事李荣华、王仁宏和常玉堂诸同志曾分别审阅了本书原稿的第一章、第六章和第二章。特在此表示感谢！

由于写作时间和水平的限制，书中的缺点和错误谅必难免，敬希国内同行和广大读者批评指正为幸！

目　录

第一章 预备知识

§1.1 距离空间

在近代数学中，人们将一些抽象元素构成的集合叫做抽象空间。现在让我们介绍一种重要的抽象空间——距离空间。

随着数学各分支的发展，就集合而言，人们看出在许多重要的基本概念中已没有必要将它只理解为实数集或其他数集。若将它理解为全体具有某种属性的抽象元素，则我们就可能用统一的观点处理许多早期孤立讨论过的数学问题。距离空间就是在观察了初等分析学中的一些极限过程的基础上概括出来的。若撇开具体的数学对象，则极限过程可以一般地被描述为：一个元素序列 $\{x_n\}$（元素 x_n 可以是数，矢量，函数）收敛于元素 x 意指当 n 变大时 x_n 无限地靠近 x，换言之，当 n 变大时 x_n 与 x 之间的距离越来越小。

在上面的叙述中，隐含着靠近或距离的度量问题。在初等分析学中，我们曾接触过一些不同的度量方式。例如，在考虑数对 (a_1, b_1) 和 (a_2, b_2) 的靠近程度时，我们曾将

$$\Delta = \sqrt{(a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2}$$

看成它们之间的距离。根据实际问题的需要有时也将

$$\Delta = \max\{|a_1-a_2|,\ |b_1-b_2|\} \text{ 或 } \Delta = |a_1-a_2|+|b_1-b_2|$$

看成它们之间的距离。又如，在考虑定义在区间 $[a, b]$ 上的连续函数 $f(x)$，$g(x)$ 的靠近程度时，我们曾将

$$\Delta = \max_{a\leqslant x\leqslant b} |f(x)-g(x)|$$

作为元素 $f(x)$ 与 $g(x)$ 之间的距离。根据实际问题的需要有时也将总体平均偏离

$$\Delta=\sqrt{\int_a^b[f(x)-g(x)]^2dx} \quad 或 \quad \int_a^b|f(x)-g(x)|dx$$

作为元素 f 与 g 之间的距离来观察 f 与 g 的靠近程度。可见，由于对距离的不同理解就会导出不同的收敛概念。

为了用统一的观点来审视不同的极限过程，自然想到应该对于刻画元素之间靠近程度的距离予以概括。通过对上述例子的观察发现这个量有以下几个特征：（1）它是一个非负实数，（2）当两个元素恒等时它为零，否则为正，（3）元素 x 到元素 y 的距离等于 y 到 x 的距离，（4）元素 x 到 y 的直线距离不大于 x 通过另一个中间元素 z 到达 y 的折线距离。这些思想的抽象体现即是距离空间的概念。

定义1.1.1 设 X 是一个非空集合。若对于 X 中的任意一对元素 x, y，都给定一个实数 $\rho(x, y)$ 与之对应，而且适合如下条件

（1） $\rho(x, y)\geqslant 0$，又 $\rho(x, y)=0$ 当且仅当 $x=y$；（恒等公理）

（2） $\rho(x, y)\leqslant\rho(x, z)+\rho(y, z)$ （$z\in X$）（三角形公理）

那末称 $\rho(x, y)$ 是元素 x 和 y 之间的距离，又称 X 按照距离 $\rho(x, y)$ 作成距离空间或度量空间。记为 (X, ρ) 或简记 X，X 中的元素也叫做它的点。

由条件（1）与（2）可以推出距离还有对称性，即对 X 中任意 x, y，成立着

（3） $\rho(x, y)=\rho(y, x)$。

事实上，在（2）中取 $z=x$，就有 $\rho(x, y)\leqslant\rho(x, x)+\rho(y, x)$，由（1）知道 $\rho(x, x)=0$，所以得到

$$\rho(x, y)\leqslant\rho(y, x)$$

由于 x, y 是任意的，在上面不等式中，互换 x, y 后，又得到

$$\rho(y, x)\leqslant\rho(x, y)$$

两式结合起来便得到（3）。

距离空间X的任何一个非空子集M，若以空间X中的距离ρ作为M中的距离，显然也是距离空间，通常称M为X的子空间。

显然，对任何非空集合，都可以通过引进距离：$\rho(x, x)=0$；$\rho(x, y)=1$，若$x\neq y$，使之成为距离空间。还应该注意，如果在一个空间X中同时定义了两个距离$\rho(x, y)$和$\rho_1(x, y)$且$\rho(x, y)\neq\rho_1(x, y)$，则$X$按$\rho(x, y)$所成的距离空间$(X, \rho)$与$X$按$\rho_1(x, y)$所成的距离空间$(X, \rho_1)$是不同的距离空间。一般地说，如果$X$中不少于2个点，那末在$X$中可以引进许多距离，使其成为不同的距离空间。

利用距离，可以在距离空间X中引进极限的概念。

定义1.1.2 令x，$x_n\in X$（$n=1, 2, \cdots$），若当$n\to\infty$时数列$\rho(x_n, x)\to 0$，就说点列$\{x_n\}$按照距离$\rho(x, y)$收敛于x，记作

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x$$

或$x_n\to x$（$n\to\infty$）。这时称$\{x_n\}$为收敛点列，x称为$\{x_n\}$的极限。

由距离空间的条件（1）、（2）和（3）及极限定义，易知距离空间中收敛点列的极限是唯一的。

距离空间中的一个集合M称为闭集，若M中的每一个收敛点列的极限也在M中。闭集的余集称为开集。集合A说成是在集合B中稠密，若对每一个$x\in B$和任给$\varepsilon>0$，都有$y\in A$，使$\rho(x, y)<\varepsilon$。这样，B的所有元素都可以用A的元素近似表示。

容易证明距离$\rho(x, y)$是x, y的连续函数，即若$x_n\to x_0$，$y_n\to y_0$，那末$\rho(x_n, y_n)\to\rho(x_0, y_0)$。事实上，由三角形公理有

$$\rho(x_n, y_n)\leqslant\rho(x_n, x_0)+\rho(x_0, y_0)+\rho(y_n, y_0)$$
$$\rho(x_0, y_0)\leqslant\rho(x_0, x_n)+\rho(x_n, y_n)+\rho(y_n, y_0)$$

从而有

$$|\rho(x_n, y_n)-\rho(x_0, y_0)|\leqslant\rho(x_n, x_0)+\rho(y_n, y_0)$$

令 $n\to\infty$，即得所要的结论。

定义1.1.3 设 x_0 是距离空间 X 中的点，对于正数 r，称集 $S(x_0, r)=\{x; x\in X, \rho(x, x_0)<r\}$ 为开球，称集 $\overline{S}(x_0,r)=\{x; x\in X, \rho(x,x_0)\leqslant r\}$ 为闭球。x_0 称为中心，r 称为半径。任一个以 x 为中心的开球叫做 x 点的邻域。

定义1.1.4 设 M 是距离空间 X 中的点集，如果 M 包含在某个开球 $S(x_0, r)$ 内，则称 M 是 X 中的有界集。

不难看出距离空间中的收敛点列一定是有界的。下面举几个距离空间的例子。

例 1 令 R_1 是实数集，对任意的点 $x, y\in R_1$，定义距离 $\rho(x, y)=|x-y|$，则 R_1 是距离空间。该空间中点列的收敛是通常的数列收敛。

例 2 令 R_n 是 n 维欧几里得空间，对于任意的 $x=(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$，$y=(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$ 规定距离

$$\rho(x, y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\eta_i)^2}$$

则 R_n 是距离空间。

设 $x_k=(\xi_1^{(k)}, \xi_2^{(k)}, \cdots, \xi_n^{(k)})$，由于

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\xi_i^{(k)}-\xi_i)^2}=0$$

的充要条件是 $\lim\limits_{k\to\infty}\xi_i^{(k)}=\xi_i$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ 所以该空间的点列的收敛是依坐标收敛。

例 3 令 $C[a, b]$ 表示全体于闭区间 $[a, b]$ 上连续的函数做成的集合，对于任意的 $f, g\in C[a, b]$，我们规定距离

$$\rho(f, g)=\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)-g(x)|$$

则 $C[a, b]$ 是距离空间。该空间上点列的收敛是闭区间 $[a, b]$

上的一致收敛。

在研究数列极限时，常常应用柯西准则。现在把这一概念移植于距离空间。

定义1.1.5 设$\{x_n\}$是距离空间X中的点列。如果对于任给的$\varepsilon>0$，存在正数N_ε，使当自然数m，$n\geqslant N_\varepsilon$时

$$\rho(x_m, x_n)<\varepsilon$$

则称$\{x_n\}$是X中的基本序列或柯西序列。

显然，距离空间X中的收敛点列必定是基本序列。但是存在这样的距离空间，其中有不收敛的基本点列。例如，设X是由全体定义在$[0,1]$上的多项式构成的空间，并定义f，$g\in X$之间的距离为

$$\rho(f,g)=\max_{0\leqslant x\leqslant 1}|f(x)-g(x)|$$

又设$\{f_n(x)\}$ $(n=1,2,\cdots)$ 是一个一致收敛于非多项式的多项式序列。显然，$\{f_n(x)\}$是一个基本序列，但在空间X内无极限。

定义1.1.6 如果距离空间X中的基本序列均收敛于X中的点，则称X是完备空间。

例如，n维欧几里得空间在例2中所给的距离意义下是完备的。又如，距离空间$C[0,1]$也是完备的。事实上，设给定了一个基本序列$\{\varphi_k(x)\}$，其中$\varphi_k(x)\in C[0,1]$，$k=1,2,\cdots$，由函数序列一致收敛的柯西准则知$\{\varphi_k(x)\}$是收敛的。设$\varphi(x)$是这个序列的极限，则$\varphi(x)$仍为$[0,1]$上的连续函数，故$\varphi(x)\in C[0,1]$。这说明$C[0,1]$在例3中所给的距离意义下是完备的。

现在，我们介绍空间与集合的紧致性概念。这个概念实际上是分析学中数直线上的有界点列必有收敛子列这一重要结论的拓广。

定义1.1.7 设M是距离空间X中的集合，如果M中的任何点列必有在X中收敛的子序列，则称M是X中的列紧集。简称M

是列紧的。特别，如果极限元素还属于M，则称M是紧集。或称M是紧的。显然，对于全空间X来说，列紧的和紧的概念没有区别。如果距离空间X是紧的，则称X为紧空间。由此不难得出紧空间是完备空间。

下面给出关于紧集的几个基本结论。有的结论在这里只给出而不予以证明，感兴趣的读者可以做为习题来作。

（1）闭区间$[a,b]$是紧的。

（2）距离空间X中的紧集M看成X的子空间时是完备的。

事实上，紧集M中任意的基本序列$\{x_n\}$必有在M中收敛的子序列，即有$\{x_n\}$的子序列$\{x_{n_k}\}$使$\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}=x_0$且$x_0\in M$。再由$\rho(x_n, x_0)\leqslant\rho(x_n, x_{n_k})+\rho(x_{n_k}, x_0)$，可知$\{x_n\}$也收敛于$x_0$。就是说$M$中任意基本序列必收敛到$M$中，所以$M$是完备的子空间。

（3）在距离空间中，紧集的闭子集是紧的。

事实上，设F是紧集M的一个闭子集，如果$\{x_n\}$是F中的任一序列，由M是紧集，知有收敛于$x_0\in M$的子序列$\{x_{n_k}\}$，因F是闭的，所以$x_0\in F$。

（4）设M是距离空间X中的紧集，则对于任意的$x\in X$，总有M中的点，它到x有最小距离。

设f是从一个距离空间X到另一个距离空间的映射。如果对每一个序列$x_n\to x$都有$f(x_n)\to f(x)$，则称f在点x处连续。若f在X上每一点都连续，则称f在X上连续。如果任给$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，对一切$x, y\in X$，只要$\rho(x,y)<\delta$，便有$\rho_1[f(x), f(y)]<\varepsilon$。则称$f$在$X$上一致连续。对实值函数，所用的距离应理解为通常的绝对值。

（5）定义在距离空间中的一个紧集上的实值连续函数必能取到它在该集合上的下确界和上确界。

（6）从一个距离空间到另一个距离空间的连续映射将紧集映射成紧集。

（7）从一个距离空间到另一个距离空间的连续函数在每一

个紧集上一致连续。

在本节之末，让我们介绍一下空间的可分性概念。假如在距离空间X中存在一个处处稠密的元素序列

$$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n,\ \cdots$$

即对任意的$x\in X$和$\varepsilon>0$可于序列$\{x_n\}$中求出一个元素x_{n_0}使$\rho(x,\ x_{n_0})<\varepsilon$。则说空间$X$是可分的。下面举两个例子。

例 4 n维欧几里得空间R_n是可分的。事实上，在空间R_n中以有理数为坐标的所有点的集合R_n°即可数，又在R_n中稠密。

例 5 距离空间$C[a,b]$是可分的。在空间$C[a,b]$中以有理数为系数的所有多项式集P°是可数集合。还不难证明P°在$C[a,b]$中稠密。事实上，任取函数$f(x)\in C[a,b]$，由维尔斯特拉斯定理（见第二章§2.5）有多项式$p(x)$使得

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)-p(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

其中$\varepsilon>0$是任意给定的数。另一方面，显然可以求出一个$\tilde{p}(x)\in P^\circ$，使得

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}|\tilde{p}(x)-p(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

从而

$$\rho(f,\ \tilde{p})=\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)-\tilde{p}(x)|<\varepsilon$$

§1.2 线 性 空 间

上一节介绍了距离空间的概念。但是，只有距离空间的概念，对于了解空间中元素之间的关系还不够清楚。因为通常所考察的空间，例如函数空间，除去可引进极限概念外，它们同时又是一个代数系统，就是说空间中的元素间存在某种代数关系。当只着眼于空间中的代数结构，即元素之间的加法运算以及数与空

间中元素的乘法运算时，就必须引入线性空间的概念。下面先看几个例子。

我们熟知在 n 维欧几里得空间 R_n 中，有加法与数乘运算。若 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，$y=(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 是 R_n 中任意两个矢量，k 为任意实数，则 $x+y=(x_1+y_1, x_2+y_2, \cdots, x_n+y_n)\in R_n$，$kx=(kx_1, kx_2, \cdots, kx_n)\in R_n$。另外，加法有逆运算减法，加法满足交换律，结合律，数乘满足分配律，结合律。

从矩阵论中，我们知道，在所有 n 阶矩阵构成的集合 M 中，按矩阵的运算规则，若 A，$B\in M$，则 $A+B\in M$；若 k 为任意数，则 $kA\in M$。这说明集 M 中有加法与数乘两种运算，加法运算有逆运算减法。加法运算满足交换律，结合律。数乘运算满足分配律，结合律。

令 P 表示所有系数为实数的多项式做成的集合。显然，若 f，$g\in P$，则 $f+g\in P$，$kf\in P$（k 为实数）。这说明 P 中的多项式有加法，数乘两种运算，并且加法运算有逆运算减法。加法运算满足交换律，结合律。数乘运算满足分配律，结合律。

还可以举出许多常见的集合，它们均具有上述共同属性。因此，我们有必要撇开具体内容，抓住本质对这一类事物予以概括。

定义1.2.1 设 X 为一集合。又设在 X 中定义了加法运算及实数（或复数）与 X 中元素的数乘运算。如果对任何 $x, y, z\in X$ 及实数（或复数）α, β，有 $\alpha\cdot x\in X$，$x+y\in X$，并且满足

（1）$x+y=y+x$　　（交换律）

（2）$(x+y)+z=x+(y+z)$　　（结合律）

（3）$1\cdot x=x$

（4）$\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$　　（数乘结合律）

（5）$(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$
$\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$　　（数乘分配律）

此外 X 中存在唯一的零元素 θ，使得对于任何 $x\in X$，均有 $x+\theta=x$；又对每一个 $x\in X$，均有唯一的元素 $x'\in X$，使 $x+$

$x'=\theta$——称 x' 是 x 的逆元素，记做 $-x$。此时，称 X 为线性空间或矢量空间，其中的元素也可称为矢量。如果数乘运算对实数有意义，就称 X 为实线性空间，如果数乘对复数有意义，则称 X 为复线性空间。

在本书中，我们主要讨论实线性空间。下面举几个线性空间的例子，它们有的在本节之初已经提到，重提的目的是为了让大家注意加法与数乘的定义。

例 1 实平面矢量集 R_2。即

$$R_2=\{(x_1,\ x_2);\ x_1,\ x_2 \text{ 是实数}\}$$

定义其加法为对应的坐标分量相加，数乘是数与坐标分量相乘。具体地讲对于给定的实数 α 和矢量 $x=(x_1,\ x_2)$，$y=(y_1,\ y_2)$，则加法与数乘分别是

$$x+y=(x_1+y_1,\ x_2+y_2);\ \alpha x=(\alpha x_1,\ \alpha x_2)$$

R_2 的零元素为 $\theta=(0,0)$，$x=(x_1,\ x_2)$ 的逆元素为 $-x=(-x_1,\ -x_2)$。显然，R_2 在上述的加法和数乘意义下构成实线性空间。

例 2 现在考虑§1.1中提到的集合 $C[a,b]$。α 是任意实数，$f,g\in C[a,b]$，定义加法与数乘运算如下

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x) \qquad a\leqslant x\leqslant b$$
$$(\alpha f)(x)=\alpha f(x) \qquad a\leqslant x\leqslant b$$

$C[a,b]$ 中的零元素 θ 为在 $[a,b]$ 上恒为零的函数，$f(x)$ 的逆元素为 $-f(x)$。依连续函数的性质，易知 $C[a,b]$ 是实线性空间。

例 3 次数 $\leqslant n$ 的实系数多项式 $p_n(x)$ 可以写成

$$p_n(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$$

其中 a_i（$i=0,1,\cdots,n$）是给定的实数。当 $a_n\neq 0$ 时，$p_n(x)$ 才是真实的 n 次多项式，$3x^3+2x+7$ 可以说成是四次多项式，但其真实次数是3。令

$$P_n[a,\ b]=\{a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n;\ a_i(i=0,1,\cdots,n) \text{ 为实数，} a\leqslant x\leqslant b\}$$

其加法和数乘运算定义为通常的多项式相加和数乘。则 $P_n[a, b]$ 是一个实线性空间。

显然，$P_n[a, b] \subset C[a, b]$，即线性空间 $P_n[a, b]$ 是线性空间 $C[a, b]$ 的子集。

以后会发现，我们对线性空间中某些被称为子空间的子集特别感兴趣。设 M 是线性空间 X 的一个子集，如果对于 M 中的任意两个元素 x，y 和数 α，β，均有 $\alpha x+\beta y\in M$，则称 M 是 X 的线性子空间。简称子空间。显然 X 的任何线性子空间本身也是线性空间。例如，通过原点的直线是平面 R_2 的线性子空间。

§1.3 巴拿赫空间

巴拿赫空间是一类重要的线性空间。在引进这个空间之前，让我们先介绍赋范线性空间。

定义1.3.1 设 X 是实数（或复数）域 R 上的线性空间。如果 X 上的实函数 $p(x)$ 满足下列条件

（1） $p(x)\geqslant 0$

（2） $p(\alpha x)=|\alpha|p(x) \quad x\in X \quad \alpha\in R$

（3） $p(x+y)\leqslant p(x)+p(y) \quad x, y\in X$

则称 $p(x)$ 是 x 的半范数或称为拟范数。

如果半范数 $p(x)$ 又满足条件

（4） 若 $p(x)=0$ 则 $x=\theta$

便称 $p(x)$ 是 x 的范数。通常记 x 的范数为 $\|x\|$，且说 X 按这个范数 $\|\cdot\|$ 构成赋范线性空间。简称赋范空间。

由于零矢量 $\theta=0\cdot x$，所以由（2）有

$$\|\theta\|=0$$

因此，对于 x 的范数 $\|x\|$，有 $\|x\|=0$ 的充要条件是 $x=\theta$。

从定义可以看出，范数是定义在线性空间 X 上的实函数。上节介绍的线性空间，通过适当地赋以范数 $\|\cdot\|$，都可以成为赋范线性空间。例如，对实平面矢量集 R_2，可以取