

高等学校教学参考书

# 高等数学讲义

(1958年版)

上册

樊映川等编

人民教育出版社

20

高等学校教学参考书

# 高等数学讲义

(1958年版)

上册

樊映川等编

人民教育出版社

257457

013  
20

本书是同济大学数学教研组教师为了教学上的需要,根据前高等教育部 1954 年颁布的高等工业学校高等数学教学大纲集体编写的。

本书分上、下两册。上册内容包括解析几何学,函数、极限,一元函数的微分学和积分学。

几年来,本书在教学实践中经过多次的修订与补充。先后参加这项编写与修订工作的,有樊映川、张国隆、陆振邦、侯希忠、方淑姝、王福楹、王福保、王嘉善等。

本书重印时作了少量的修改,可作为高等院校教学参考书。

206/29  
16

高等学校教学参考书  
**高等数学讲义**  
上册  
樊映川等编

人民教育出版社出版  
新华书店上海发行所发行  
上海商务印刷厂印装

787×1092 1/32 印张 14 字数 337,000  
1958 年 3 月第 1 版 1979 年 2 月第 26 次印刷  
印数 682,001—1,182,000  
书号 13012·0236 定价 1.00 元

# 上册目次

## 第一篇 解析几何

### 第一章 平面上的直角坐标、曲线

#### 及其方程 .....1

§ 1.1 轴和轴上的线段 .....1

§ 1.2 直线上的坐标 数轴 .....3

§ 1.3 平面上的笛卡儿直角坐标 .....4

§ 1.4 坐标变换问题 .....6

§ 1.5 轴的平移 .....7

§ 1.6 轴的旋转 .....8

§ 1.7 两点间的距离 .....9

§ 1.8 线段的定比分点 .....10

§ 1.9 三角形的面积 .....12

§ 1.10 平面上曲线方程的概念 .....14

§ 1.11 两曲线的交点 .....19

§ 1.12 曲线的参数方程 .....20

§ 1.13 参数方程的作图法 .....23

### 第二章 直线 .....24

§ 2.1 过定点有定斜率的直线方程 .....24

§ 2.2 直线的斜截式方程 .....26

§ 2.3 线性函数的图形是一条直线 .....27

§ 2.4 直线的一般方程 .....28

§ 2.5 直线的两点式方程 .....29

§ 2.6 直线的截距式方程 .....30

§ 2.7 直线的法线式方程 .....31

§ 2.8 直线的参数方程 .....33

§ 2.9 点到直线的距离 .....34

§ 2.10 两直线的夹角 .....35

§ 2.11 两直线平行及垂直的条件 .....37

§ 2.12 直线束 .....39

### 第三章 二次曲线 .....42

§ 3.1 圆 .....42

§ 3.2 椭圆的定义及其标准方程 .....43

§ 3.3 椭圆形状的讨论 .....44

§ 3.4 椭圆的参数方程 .....48

§ 3.5 双曲线的定义及其标准方程 .....49

§ 3.6 双曲线形状的讨论 .....50

§ 3.7 反比关系的图形 等边双曲线 .....55

§ 3.8 抛物线的定义及其标准方程 .....56

§ 3.9 抛物线形状的讨论 .....57

§ 3.10 二次三项式的图形是抛物线 .....60

§ 3.11 利用轴的平移简化二次方程 .....61

§ 3.12 利用轴的旋转简化二次方程 .....65

§ 3.13 一般二次方程的简化 .....69

§ 3.14 椭圆、双曲线和抛物线是圆锥曲线 .....72

§ 3.15 椭圆及双曲线的准线 .....73

### 第四章 极坐标 .....77

§ 4.1 极坐标概念 .....77

§ 4.2 极坐标概念的扩充 .....	77	§ 7.1 曲面方程的概念 .....	139
§ 4.3 极坐标与直角坐标的关 系 .....	79	§ 7.2 球面方程 .....	140
§ 4.4 曲线的极坐标方程 .....	80	§ 7.3 母线平行于坐标轴的柱 面方程 .....	141
§ 4.5 圆锥曲线的极坐标方程 .....	84	§ 7.4 曲线方程 .....	142
<b>第五章 行列式及线性方程组</b> .....	86	§ 7.5 投影柱面 .....	143
§ 5.1 二阶行列式和二元线性 方程组 .....	86	<b>第八章 空间的平面及直线</b> .....	146
§ 5.2 三阶行列式 .....	89	§ 8.1 过一点并已知一法线矢 量的平面方程 .....	146
§ 5.3 三阶行列式的主要性质 .....	91	§ 8.2 平面的一般方程的研究 .....	148
§ 5.4 三元线性方程组 .....	96	§ 8.3 平面的截距式方程 .....	150
§ 5.5 齐次线性方程组 .....	99	§ 8.4 平面的法线式方程 .....	151
*§ 5.6 高阶行列式概念 .....	105	§ 8.5 点到平面的距离 .....	153
<b>第六章 空间直角坐标及向量代 数初步</b> .....	106	§ 8.6 两平面的夹角 .....	154
§ 6.1 空间点的直角坐标 .....	106	§ 8.7 直线作为两平面的交 线 .....	156
§ 6.2 基本问题 .....	107	§ 8.8 直线的方程 .....	156
§ 6.3 向量与数量 .....	111	§ 8.9 两直线的夹角 .....	159
§ 6.4 矢量的加减法 .....	112	§ 8.10 直线与平面的夹角 .....	160
§ 6.5 向量与数量的乘法 .....	114	§ 8.11 直线与平面的交点 .....	162
§ 6.6 向量在轴上的投影 投 影定理 .....	116	§ 8.12 平面束的方程 .....	163
§ 6.7 向量在直角坐标轴上的 投影 矢量的坐标 .....	119	§ 8.13 杂例 .....	164
§ 6.8 矢量的模及矢量的方向 余弦 .....	122	<b>第九章 二次曲面</b> .....	169
§ 6.9 两矢量的数量积 .....	123	§ 9.1 旋转曲面 .....	169
§ 6.10 两矢量间的夹角 .....	127	§ 9.2 椭球面 .....	171
§ 6.11 两矢量的矢量积 .....	129	§ 9.3 单叶双曲面 .....	173
§ 6.12 三矢量的乘积 .....	134	§ 9.4 双叶双曲面 .....	175
<b>第七章 曲面方程与曲线方程</b> .....	139	§ 9.5 椭圆抛物面 .....	176
		§ 9.6 双曲抛物面 .....	178
		§ 9.7 二次锥面 .....	179
		§ 9.8 二次柱面 .....	180

## 第二篇 数学分析

<b>第一章 函数及其图形</b> .....	182	§ 1.3 实数的绝对值 .....	185
§ 1.1 实数与数轴 .....	182	§ 1.4 常量与变量 .....	187
§ 1.2 区间 .....	184	§ 1.5 函数概念 .....	188

§ 1.6	函数的表示法	191	§ 4.10	微分应用于近似计算及 误差的估计	283
§ 1.7	函数的几种特性	193	§ 4.11	高阶导数	286
§ 1.8	反函数概念	195	§ 4.12	高阶微分	290
§ 1.9	基本初等函数的图形	198	§ 4.13	曲线的参数方程	291
<b>第二章 数列的极限及函数的极 限</b>			<b>第五章 中值定理 导数在函数 研究上的应用</b>		
§ 2.1	数列的极限	205	§ 5.1	中值定理	296
§ 2.2	函数的极限	210	§ 5.2	罗彼塔法则	301
§ 2.3	无穷大	216	§ 5.3	泰勒公式	309
§ 2.4	无穷小	218	§ 5.4	函数的单调增减性的判 定法	314
§ 2.5	关于无穷小的定理 极 限运算法则	220	§ 5.5	函数的极值及其求法	317
§ 2.6	例题	225	§ 5.6	最大值及最小值的求法	322
§ 2.7	极限存在的准则	227	§ 5.7	曲线的凹性及其判定法	325
§ 2.8	双曲函数	233	§ 5.8	曲线的拐点	328
§ 2.9	无穷小的比较	236	§ 5.9	曲线的渐近线	331
<b>第三章 函数的连续性</b>			§ 5.10	函数图形的描绘方法	334
§ 3.1	函数连续性的定义	240	§ 5.11	由已给 $y=f(x)$ 的曲线 描绘导数 $y'=f'(x)$ 的曲线	338
§ 3.2	函数的间断点	242	§ 5.12	方程的近似解	340
§ 3.3	连续函数的基本性质	245	<b>第六章 不定积分</b>		
§ 3.4	连续函数的和、积及商的 连续性	247	§ 6.1	不定积分的概念	346
§ 3.5	反函数的连续性	248	§ 6.2	不定积分的性质	350
§ 3.6	复合函数及其连续性	249	§ 6.3	基本积分表	351
§ 3.7	初等函数的连续性	251	§ 6.4	分部积分法	354
<b>第四章 导数及微分</b>			§ 6.5	换元积分法	356
§ 4.1	几个物理学上的概念	256	§ 6.6	有理函数的积分	367
§ 4.2	导数概念	258	§ 6.7	三角函数的有理式的积 分	382
§ 4.3	导数的几何意义	261	§ 6.8	最简单代数无理式的积 分	384
§ 4.4	求导数例题	263	§ 6.9	二项微分式的积分	387
§ 4.5	函数的和、积、商的导数	268	§ 6.10	关于积分问题的一些补 充说明	389
§ 4.6	反函数的导数	271			
§ 4.7	复合函数的导数	273			
§ 4.8	微分概念	278			
§ 4.9	微分的求法 微分形式 不变性	280			

<b>第七章 定积分</b> .....	391	§ 7.8 定积分的近似公式	411
§ 7.1 曲边梯形的面积	391	§ 7.9 广义积分	416
§ 7.2 变力所作的功	393	<b>第八章 定积分的应用</b> .....	420
§ 7.3 定积分的概念	394	§ 8.1 平面图形的面积	420
§ 7.4 定积分的简单性质 中 值定理	398	§ 8.2 体积	425
§ 7.5 定积分与不定积分之间 的关系	402	§ 8.3 曲线的弧长	428
§ 7.6 用分部积分法计算定积 分	405	§ 8.4 均匀平面薄片的静力矩 及重心	434
§ 7.7 用换元法计算定积分	408	§ 8.5 曲率	438
		§ 8.6 曲率半径 曲率中心	441
		§ 8.7 渐屈线	442

# 第一篇 解析几何

## 第一章 平面上的直角坐标、 曲线及其方程

### § 1.1 轴和轴上的线段

任意一条直线，它有两个相反的方向，可以随意指定其中的一个叫做它的正向，这样指定了正向的直线称为轴。图 1.1 表示一个轴。

图 1.1

它的正向是自左至右的，为了表示这正向，我们在右端加一箭头。

设有任意两点  $A$  和  $B$ ，用直线联结  $A$  和  $B$  得一线段，在几何及力学的许多问题中，不但线段的长度值得注意，同时线段的方向也有着重大的意义。这就是说，认清  $A$  和  $B$  中哪一个是起点，哪一个是终点这件事是有意义的。从起点到终点的方向是线段的方向。有方向的线段叫做有向线段。用记号  $\overline{AB}$  表示以  $A$  为起点以  $B$  为终点的有向线段。这样， $\overline{AB}$  和  $\overline{BA}$  表示两个不同的有向线段，因为  $\overline{AB}$  和  $\overline{BA}$  的长度虽然相同，但是  $\overline{AB}$  的方向是从  $A$  到  $B$ ，而  $\overline{BA}$  的方向是从  $B$  到  $A$ 。

设  $A$  和  $B$  是一个轴上的任意两点，这样， $\overline{AB}$  便是轴上的有向线段了。我们规定这样一个数叫做轴上有向线段  $\overline{AB}$  的值，这数的绝对值等于  $\overline{AB}$  的长度（这里当然假定预先已指定了单位长度），这数的符号则这样决定：如果  $\overline{AB}$  的方向和轴的正向相同，就取正号；如果  $\overline{AB}$  的方向和轴的正向相反，就取负号。用记号  $AB$  表示  $\overline{AB}$  的值，用记号  $|AB|$  表示  $\overline{AB}$  的长度。显然， $|AB| =$



$|BA|$ ，但是  $AB = -BA$ 。

在图 1.2 中表示着一个轴  $a$  和轴上的四个点  $A, B, C, D$ ； $E_1E_2$  是单位长度。假设点  $A, B, C, D$  是这样排列的： $A$  和  $B$  间的距离等于 2， $C$  和  $D$  间的距离等于 3；从  $A$  到  $B$  的方向和轴的正向相同，从  $C$  到  $D$  的方向和轴的方向相反。在这种情况下，就有：

$$AB = 2, \quad BA = -2, \quad |AB| = |BA| = 2;$$

$$CD = -3, \quad DC = 3, \quad |CD| = |DC| = 3.$$

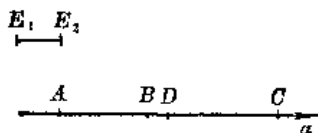


图 1.2

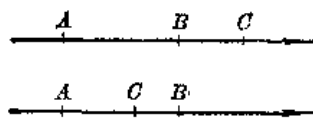


图 1.3

如图 1.3，设  $A, B, C$  是轴上任意三点，则  $\overline{AB}$ ， $\overline{BC}$  和  $\overline{AC}$  的值  $AB$ ， $BC$  和  $AC$  间成立下面关系式：

$$AB + BC = AC. \quad (1)$$

值得注意，这关系式的成立并不受  $A, B, C$  三点在轴上排列的情形所限制。因此，要证明这关系式成立，必须证明它对于一切可能的排列情形都成立。我们可以把  $A, B, C$  在轴上排列的情形分成两类：

1°  $\overline{AB}$  和  $\overline{BC}$  的方向相同；

2°  $\overline{AB}$  和  $\overline{BC}$  的方向相反。

下面来证明(1)式在这两种场合中都成立。如果  $\overline{AB}$  和  $\overline{BC}$  的方向相同，则  $|AC| = |AB| + |BC|$  且  $AB$ ， $BC$  和  $AC$  的符号相同，因此(1)式成立。如果  $\overline{AB}$  和  $\overline{BC}$  的方向相反，则  $|AC|$  为  $|AB|$  和  $|BC|$  之差。 $AC$  的符号和  $\overline{AB}$ ， $\overline{BC}$  中较长者的值的符号相同。因此，根据代数中的加法原则，知道(1)式也成立。

(1)式可以推广。设  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$  是轴上任意的  $n$  个

点, 则  $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \dots, \overline{A_{n-1}A_n}, \overline{A_1A_n}$  的值  $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n, A_1A_n$  之间有下面关系式:

$$A_1A_2 + A_2A_3 + \dots + A_{n-1}A_n = A_1A_n. \quad (2)$$

事实上, 只要应用数学归纳法并利用(1)式, 则(2)式便可得证.

## § 1.2 直线上的坐标 数轴

下面将提出一种用数来决定直线上点的位置的方法.

设有任一直线. 首先, 指定它的正向, 这样, 这直线成为一个轴了. 再在直线上任意取定一点.

用字母  $O$  表示这一点. 此外, 取定一单位长度(图 1.4). 设  $P$  为这直线(轴)上的任一点. 规定点  $P$  和

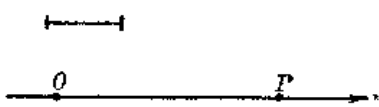


图 1.4

这样的数  $x$  对应, 这数  $x$  等于这轴上以  $O$  为起点, 以  $P$  为终点的有向线段  $\overline{OP}$  的值  $OP$ :

$$OP = x.$$

这数  $x$  称为点  $P$  在直线上的坐标. 依照这种规定, 已知直线上任意一点  $P$ , 必有一确定的数  $x$  作为它的坐标. 反过来, 已知一数  $x$ , 可在直线上决定一点  $P$ , 这点  $P$  的坐标是等于  $x$  的.

点  $O$  称为原点. 如果这轴的位置是水平的, 且正向是自左至右, 则容易明白, 在点  $O$  之右的点, 它们的坐标都是正数, 在点  $O$  之左的点, 它们的坐标都是负数. 点  $O$  的坐标是零.

上面我们使数和直线上的点之间建立了一一对应的关系. 所谓数轴, 就是这样的直线, 这直线上的点和数之间已建立起一一对应关系的.

下面来证明一个很有用的公式. 设  $P_1, P_2$  是直线上任意两点.  $P_1$  的坐标为  $x_1$ ,  $P_2$  的坐标为  $x_2$ , 则  $\overline{P_1P_2}$  的值  $P_1P_2$  等于  $x_2 - x_1$ , 即

$$P_1P_2 = x_2 - x_1. \quad (1)$$

证明 根据 § 1.1 的(1)式

$$OP_1 + P_1P_2 = OP_2,$$

由此

$$P_1P_2 = OP_2 - OP_1.$$

但

$$OP_2 = x_2, \quad OP_1 = x_1,$$

所以

$$P_1P_2 = x_2 - x_1.$$

例 已知直线上点  $A, B, C, D$  的坐标依次为 5, -1, -8, 2; 求  $\overline{AB}$ ,  $\overline{CD}$  和  $\overline{DB}$  的值及长度.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad AB &= -1 - 5 = -6, & |AB| &= 6. \\ CD &= 2 - (-8) = 10, & |CD| &= 10. \\ DB &= -1 - 2 = -3, & |DB| &= 3. \end{aligned}$$

### § 1.3 平面上的笛卡儿直角坐标

在直线上的点和数之间已建立起一一对应关系的基础上, 下面提出一种用数来决定平面上点的位置的方法.

在平面上选定两条互相垂直的直线, 分别指定这两条直线的正向. 这样, 这两条直线已成为两个轴了. 按任意次序把这两个轴编号, 一个称为第一轴, 另一个称为第二轴. 此外, 取定一单位长度<sup>①</sup>, 并把两轴的交点作为第一轴的原点, 同时也作为第二轴的原点. 用字母  $O$  表示这共同原点. 这样, 按照 § 1.2 所说明的方法, 现在这两个轴都已成为数轴了. 这就是说, 第一轴上任意点  $P$  有确定的数  $x$  与之对应,  $x$  即  $P$  在第一轴上的坐标. 同样地, 第二轴上任意点  $Q$  也有确定的数  $y$  与之对应,  $y$  即  $Q$  在第二轴上的坐标.

通常, 第一轴取水平位置, 正向自左至右; 第二轴取铅直位置, 正向自下至上. 第一轴也称横轴或 $x$ 轴, 第二轴也称纵轴或 $y$ 轴.

<sup>①</sup> 一般两轴上取同一个单位长度, 但也可以各取不同的单位长度.

在描出的  $x$  轴及  $y$  轴末端, 分别写上字母  $x$  及  $y$ .

现在我们可以使平面上任意一点  $M$  的位置用两个有一定次序的数来决定. 过点  $M$  向第一轴作垂线得垂足  $P$ .  $P$  称为点  $M$  在第一轴上的投影. 如图 1.5

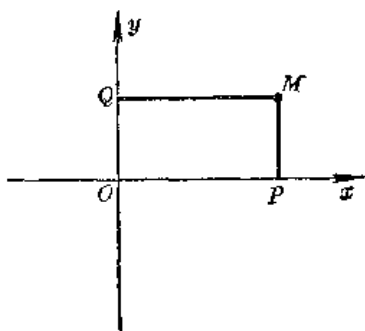


图 1.5

设点  $P$  在第一轴上的坐标为数  $x$ , 则称数  $x$  为点  $M$  的第一坐标或横标. 同样地, 过点  $M$  向第二轴作垂线得垂足  $Q$ .  $Q$  称为点  $M$  在第二轴上的投影. 设点  $Q$  在第

二轴上的坐标为数  $y$ , 则称数  $y$  为点  $M$  的第二坐标或纵标. 记号  $M(x, y)$  表示点  $M$  的横标为  $x$  而纵标为  $y$ .

依照上述方法, 当平面上取定了  $x$  轴和  $y$  轴之后, 如果已知平面上任意一点  $M$  的位置, 则点  $M$  的坐标  $(x, y)$  便可确定. 反过来, 如果已知平面上某点  $M$  的坐标为  $(x, y)$ , 则点  $M$  的位置也可确定. 方法是这样的: 在横轴上取定以数  $x$  为坐标的点  $P$ . 在纵轴上取定以数  $y$  为坐标的点  $Q$ . 过  $P$  作平行纵轴的直线. 过  $Q$  作平行横轴的直线. 这两直线的交点即点  $M$  的位置.

上述使平面上点的位置可用两个有序的数(即点的坐标)来决定的方法, 是十七世纪法国数学家笛卡儿所提出的, 因此这种点的坐标便称为平面上点的笛卡儿直角坐标. 在平面上取定  $x$  轴和  $y$  轴而使平面上点的位置可用它的坐标  $(x, y)$  来决定这件事, 称为在平面上导入坐标系  $xOy$ . 以后我们常假定平面上已导入坐标系  $xOy$  而不再声明.

必须指出: 在平面上导入坐标系  $xOy$  后可使平面上的点和一对有序的实数  $(x, y)$  之间建立一一对应关系, 这件事是有头等重要意义的, 因为它是解析几何学的基础.

$x$ 轴和 $y$ 轴都称为坐标轴。两轴的公共原点 $O$ 称为坐标原点。两轴将平面分成四个部分，这些部分称为象限。四个象限有一定的次序。在正的 $x$ 半轴和正的 $y$ 半轴之间的称为第I象限。在正的 $y$ 半轴和负的 $x$ 半轴之间的称为第II象限。在负的 $x$ 半轴和负的 $y$ 半轴之间的称为

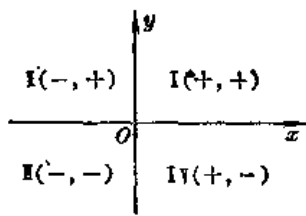


图 1.6

在负的 $y$ 半轴和正的 $x$ 半轴之间的称为第IV象限 (图 1.6)。

设点 $M$ 的坐标为 $(x, y)$ 。如果 $x > 0, y > 0$ ，则 $M$ 在第I象限。如果 $x < 0, y > 0$ ，则 $M$ 在第II象限。如果 $x < 0, y < 0$ ，则 $M$ 在第III象限。如果 $x > 0, y < 0$ ，则 $M$ 在第IV象限。

设点 $M$ 的坐标为 $(x, y)$ ，根据初等几何上点的轴对称与中心对称的定义，容易知道 $(x, y)$ 与 $(x, -y)$ 关于 $x$ 轴相对称； $(x, y)$ 与 $(-x, y)$ 关于 $y$ 轴相对称； $(x, y)$ 与 $(-x, -y)$ 关于原点对称。

### § 1.4 坐标变换问题

平面上点的坐标是与平面上所导入的坐标系有关的。平面上同一点 $M$ 对不同的坐标系 $xOy$ 和 $x'O'y'$ 会有不同的坐标 $(x, y)$ 和 $(x', y')$ 。

所谓坐标变换的问题是：平面上有两个不同的坐标系 $xOy$ 和 $x'O'y'$ ，平面上任意一点 $M$ ，它在坐标系 $xOy$ 下的坐标是 $(x, y)$ ，在坐标系 $x'O'y'$ 下的坐标是 $(x', y')$  (图 1.7)， $x, y$ 和 $x', y'$ 间的关系如何？或者说，如何用 $x', y'$ 来表示 $x$ 和 $y$ ？反过来，如何用 $x, y$ 来表示 $x'$ 和 $y'$ ？

可以设想，坐标系 $x'O'y'$ 是由坐标系 $xOy$ 经过两种运动后所

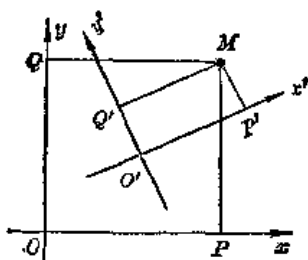


图 1.7

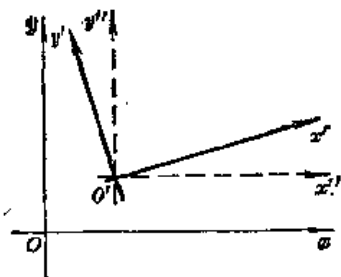


图 1.8

得到的(图 1.8).

(1) 坐标轴的方向不变, 原点从  $O$  移至  $O'$ . 这样,  $xOy$  先运动到  $x''O'y''$ . 这种坐标轴的运动, 称为轴的平移.

(2) 原点不动, 坐标轴旋转某一角度. 这样,  $x''O'y''$  运动到  $x'O'y'$ . 这种坐标轴的运动, 称为轴的旋转.

当然, 也可设想先有轴的旋转而后有轴的平移, 结果还是一样的.

下面我们来分别讨论: 在轴的平移和轴的旋转下,  $x, y$  和  $x', y'$  间的关系如何?

### § 1.5 轴的平移

设有原点不同而轴的方向相同的两个坐标系  $xOy$  和  $x'O'y'$ . 为

了方便起见, 我们称坐标系  $xOy$  为旧系, 坐标系  $x'O'y'$  为新系, 因为可以设想新系是由旧系经轴的平移得到的.

点  $O'$  在旧系下的坐标设为  $(a, b)$ , 在新系下的坐标当然为  $(0, 0)$ . 平面上任意点  $M$  在旧系下的坐标为  $(x, y)$ , 在新系下的坐标为  $(x', y')$ . 现在来研究坐标  $(x, y)$  和坐标  $(x', y')$  之间的关系(图 1.9).

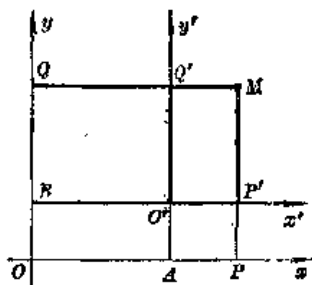


图 1.9

设点  $M$  在  $x$  轴和  $x'$  轴上的投影依次为  $P$  和  $P'$ , 又点  $O'$  在  $x$  轴上的投影为  $A$ , 则  $OP = x$ ,  $O'P' = x'$ ,  $OA = a$ . 根据 § 1.1 的 (1) 式得

$$OP = OA + AP,$$

但

$$AP = O'P',$$

因此

$$OP = OA + O'P',$$

即

$$x = a + x',$$

用同样方法可得

$$y = b + y'.$$

这样就得到了在轴的平移下用新系的坐标表示旧系的坐标的公式:

$$\begin{cases} x = x' + a, \\ y = y' + b. \end{cases} \quad (1)$$

将 (1) 式移项便可以得到在轴的平移下用旧系坐标表示新系坐标的公式:

$$\begin{cases} x' = x - a, \\ y' = y - b. \end{cases} \quad (2)$$

## § 1.6 轴的旋转

设平面上有一坐标系  $xOy$ . 现在原点  $O$  不动. 将两轴都旋转  $\alpha$  角, 这样就得到一新的坐标系  $x'Oy'$ .

平面上任意点  $M$  在旧系和新系下的坐标依次用  $(x, y)$  和  $(x', y')$  表示. 现在来研究坐标  $(x, y)$  和坐标  $(x', y')$  之间的关系 (图 1.10).

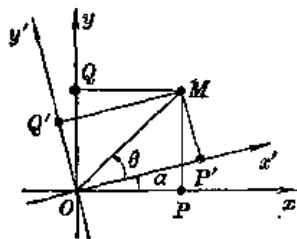


图 1.10

设点  $M$  在  $x$  轴,  $y$  轴,  $x'$  轴,  $y'$  轴上的投影依次为  $P, Q, P', Q'$ , 则

$$OP = x, OQ = y, OP' = x', OQ' = y'.$$

又设  $\angle P'OM = \theta$ , 则

$$\begin{aligned}x &= OP = |OM| \cos(\alpha + \theta) \\ &= |OM| \cos \alpha \cos \theta - |OM| \sin \alpha \sin \theta.\end{aligned}$$

但

$$|OM| \cos \theta = OP' = x',$$

$$|OM| \sin \theta = P'M = OQ' = y' \textcircled{1},$$

因此

$$x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha.$$

又

$$\begin{aligned}y &= OQ = PM = |OM| \sin(\alpha + \theta) \\ &= |OM| \sin \alpha \cos \theta + |OM| \cos \alpha \sin \theta.\end{aligned}$$

所以

$$y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha.$$

这样就得到了在轴的旋转下用新系坐标表示旧系坐标的公式:

$$\begin{cases} x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha, \\ y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha. \end{cases} \quad (1)$$

为了获得在轴的旋转下用旧系坐标表示新系坐标的公式, 我们把公式(1)中的两个等式看作是两个关于  $x'$ ,  $y'$  的二元一次方程. 把这两个方程联立并解出  $x'$  和  $y'$  便能达到目的. 但也可这样来推论: 新系是由旧系旋转  $\alpha$  角所得到的, 反过来旧系便可由新系旋转  $-\alpha$  角得到. 因此, 将公式(1)中的新旧系坐标互换, 同时以  $-\alpha$  代  $\alpha$ , 便获得在轴的旋转下用旧系坐标表示新系坐标的公式:

$$\begin{cases} x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha, \\ y' = -x \sin \alpha + y \cos \alpha. \end{cases} \quad (2)$$

## § 1.7 两点间的距离

设有两点  $M_1(x_1, y_1)$ ,  $M_2(x_2, y_2)$ . 现在要计算这两点间的

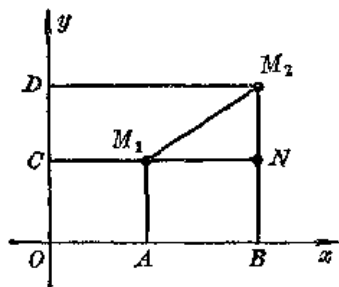
① 如果有向线段  $\overline{AB}$  平行坐标轴, 我们设想通过  $\overline{AB}$  有一方向和坐标轴相同的轴放置着. 因此, 这时  $\overline{AB}$  是在轴上的有向线段而  $AB$  表示  $\overline{AB}$  在轴上的值. 这里的  $P'M$  表示  $\overline{P'M}$  的值便是如此理解的.



距离  $d = |M_1M_2|$  (图 1.11).

过  $M_1, M_2$  分别引垂直于  $x$  轴的直线  $M_1A, M_2B$  和垂直于  $y$  轴的直线  $M_1C, M_2D$ . 延长  $CM_1$  与  $BM_2$  相交于  $N$ .  $\triangle M_1NM_2$  是一直角三角形. 根据勾股定理得

$$|M_1M_2|^2 = |M_1N|^2 + |NM_2|^2. \quad (1)$$



但  $|M_1N| = |AB|,$   
 $|NM_2| = |CD|$

图 1.11

又根据 § 1.2 公式(1)有

$$AB = x_2 - x_1, \quad CD = y_2 - y_1. \quad (2)$$

由绝对值的性质, 从(2)式可得到

$$|AB|^2 = (x_2 - x_1)^2, \quad |CD|^2 = (y_2 - y_1)^2. \quad (3)$$

将(3)式代入(1)式得

$$|M_1M_2|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

因此

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

**例 1** 求点(3, 4)和点(6, 0)间的距离.

**解**  $d = \sqrt{(6-3)^2 + (0-4)^2} = \sqrt{9+16} = 5.$

**例 2** 求点  $M(x, y)$  和坐标原点  $O(0, 0)$  间的距离.

**解**  $d = \sqrt{x^2 + y^2}.$

### § 1.8 线段的定比分点

在某一轴上已知两点  $M_1(x_1, y_1)$  和  $M_2(x_2, y_2)$ . 设点  $M$  也在这轴上且使两有向线段  $\overline{M_1M}$  和  $\overline{MM_2}$  的值之比等于  $\lambda$ :

$$\frac{\overline{M_1M}}{\overline{MM_2}} = \lambda.$$

求点  $M$  的坐标  $x$  和  $y$ .