高等学校教学参考书

# 高等数学讲义

（1958年版）

上册

樊映川等编

人民教育出版社

20

高等学校教学参考书

# 高等数学讲义

（1958年版）

上册

樊映川等编

人民教育出版社

本书是同济大学数学教研组教师为了教学上的需要，根据前高等教育部1954年颁布的高等工业学校高等数学教学大纲集体编写的。

本书分上、下两册。上册内容包括解析几何学，函数、极限，一元函数的微分学和积分学。

几年来，本书在教学实践中经过多次的修订与补充。先后参加这项编写与修订工作的，有樊映川、张国隆、陆振邦、侯希忠、方淑姝、王福楹、王福保、王嘉善等。

本书重印时作了少量的修改，可作为高等院校教学参考书。

2004年

16


高等学校教学参考书

**高 等 数 学 讲 义**

上 册

樊 映 川 等 编

人民教育出版社出版

新华书店上海发行所发行

上海商务印刷厂印装

787×1092 1/32 印张14 字数337,000

1958年3月第1版 1979年2月第26次印刷

印数 682,001—1,182,000

书号 13012·0236 定价1.00元

# 上册目次

## 第一篇　解析几何

## 第二篇 数学分析

# 第一篇 解析几何

## 第一章 平面上的直角坐标、曲线及其方程

### §1.1 轴和轴上的线段

任意一条直线，它有两个相反的方向．可以随意指定其中的一个叫做它的**正向**．这样指定了正向的直线称为**轴**．图 1.1 表示一个轴．它的正向是自左至右的．为了表示这正向，我们在右端加一箭头．



图 1.1

设有任意两点 $A$ 和 $B$．用直线联结 $A$ 和 $B$ 得一线段．在几何及力学的许多问题中，不但线段的长度值得注意，同时线段的方向也有着重大的意义．这就是说，认清 $A$ 和 $B$ 中哪一个是起点，哪一个是终点这件事是有意义的．从起点到终点的方向是线段的方向．有方向的线段叫做**有向线段**．用记号 $\overline{AB}$ 表示以 $A$ 为起点以 $B$ 为终点的有向线段．这样，$\overline{AB}$ 和 $\overline{BA}$ 表示两个不同的有向线段，因为 $\overline{AB}$ 和 $\overline{BA}$ 的长度虽然相同，但是 $\overline{AB}$ 的方向是从 $A$ 到 $B$，而 $\overline{BA}$ 的方向是从 $B$ 到 $A$．

设 $A$ 和 $B$ 是一个轴上的任意两点．这样，$\overline{AB}$ 便是轴上的有向线段了．我们规定这样一个数叫做**轴上有向线段 $\overline{AB}$ 的值**，这数的绝对值等于 $\overline{AB}$ 的长度（这里当然假定预先已指定了单位长度），这数的符号则这样决定：如果 $\overline{AB}$ 的方向和轴的正向相同，就取正号；如果 $\overline{AB}$ 的方向和轴的正向相反，就取负号．用记号 $AB$ 表示 $\overline{AB}$ 的值．用记号 $|AB|$ 表示 $\overline{AB}$ 的长度．显然，$|AB|=$

$|BA|$，但是 $AB=-BA$.

在图 1.2 中表示着一个轴 $a$ 和轴上的四个点 $A, B, C, D$；$E_1E_2$ 是单位长度．假设点 $A, B, C, D$ 是这样排列的：$A$ 和 $B$ 间的距离等于 2，$C$ 和 $D$ 间的距离等于 3；从 $A$ 到 $B$ 的方向和轴的正向相同，从 $C$ 到 $D$ 的方向和轴的方向相反．在这种情况下，就有：

$$AB=2, \qquad BA=-2, \qquad |AB|=|BA|=2;$$
$$CD=-3, \qquad DC=3, \qquad |CD|=|DC|=3.$$

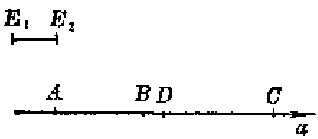

图 1.2

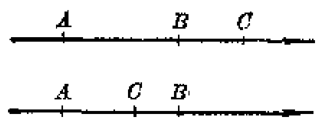

图 1.3

如图 1.3，设 $A, B, C$ 是轴上任意三点，则 $\overline{AB}$，$\overline{BC}$ 和 $\overline{AC}$ 的值 $AB$，$BC$ 和 $AC$ 间成立下面关系式：

$$AB+BC=AC. \tag{1}$$

值得注意，这关系式的成立并不受 $A, B, C$ 三点在轴上排列的情形所限制．因此，要证明这关系式成立，必须证明它对于一切可能的排列情形都成立．我们可以把 $A, B, C$ 在轴上排列的情形分成两类：

1° $\overline{AB}$ 和 $\overline{BC}$ 的方向相同；

2° $\overline{AB}$ 和 $\overline{BC}$ 的方向相反．

下面来证明(1)式在这两种场合中都成立．如果 $\overline{AB}$ 和 $\overline{BC}$ 的方向相同，则 $|AC|=|AB|+|BC|$ 且 $AB$，$BC$ 和 $AC$ 的符号相同，因此(1)式成立．如果 $\overline{AB}$ 和 $\overline{BC}$ 的方向相反，则 $|AC|$ 为 $|AB|$ 和 $|BC|$ 之差．$AC$ 的符号和 $\overline{AB}$，$\overline{BC}$ 中较长者的值的符号相同．因此，根据代数中的加法原则，知道(1)式也成立．

(1)式可以推广．设 $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n$ 是轴上任意的 $n$ 个

点，则$\overline{A_1A_2}$，$\overline{A_2A_3}$，…，$\overline{A_{n-1}A_n}$，$\overline{A_1A_n}$的值$A_1A_2$，$A_2A_3$，…，$A_{n-1}A_n$，$A_1A_n$之间有下面关系式：

$$A_1A_2+A_2A_3+\cdots+A_{n-1}A_n=A_1A_n. \tag{2}$$

事实上，只要应用数学归纳法并利用(1)式，则(2)式便可得证．

## §1.2 直线上的坐标 数轴

下面将提出一种用数来决定直线上点的位置的方法．

设有任一直线．首先，指定它的正向，这样，这直线成为一个轴了．再在直线上任意取定一点．用字母$O$表示这一点．此外，取定一单位长度(图1.4)．设$P$为这直线(轴)上的任一点．规定点$P$和这样的数$x$对应，这数$x$等于这轴上以$O$为起点，以$P$为终点的有向线段$\overline{OP}$的值$OP$：

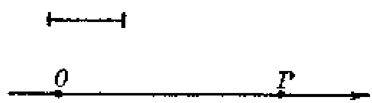


图 1.4

$$OP=x.$$

这数$x$称为点$P$在直线上的坐标．依照这种规定，已知直线上任意一点$P$，必有一确定的数$x$作为它的坐标．反过来，已知一数$x$，可在直线上决定一点$P$，这点$P$的坐标是等于$x$的．

点$O$称为原点．如果这轴的位置是水平的，且正向是自左至右，则容易明白，在点$O$之右的点，它们的坐标都是正数，在点$O$之左的点，它们的坐标都是负数．点$O$的坐标是零．

上面我们使数和直线上的点之间建立了一一对应的关系．所谓数轴，就是这样的直线，这直线上的点和数之间已建立起一一对应关系的．

下面来证明一个很有用的公式．设$P_1$，$P_2$是直线上任意两点．$P_1$的坐标为$x_1$，$P_2$的坐标为$x_2$，则$\overline{P_1P_2}$的值$P_1P_2$等于$x_2-x_1$，即

$$P_1P_2=x_2-x_1. \qquad (1)$$

**证明** 根据§1.1的(1)式

$$OP_1+P_1P_2=OP_2,$$

由此 $$P_1P_2=OP_2-OP_1.$$

但 $$OP_2=x_2,\ OP_1=x_1,$$

所以 $$P_1P_2=x_2-x_1.$$

**例** 已知直线上点 $A$, $B$, $C$, $D$ 的坐标依次为5, $-1$, $-8$, 2;求 $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ 和 $\overline{DB}$ 的值及长度.

**解**

$$AB=-1-5=-6, \qquad |AB|=6.$$

$$CD=2-(-8)=10, \qquad |CD|=10.$$

$$DB=-1-2=-3, \qquad |DB|=3.$$

## §1.3 平面上的笛卡儿直角坐标

在直线上的点和数之间已建立起一一对应关系的基础上,下面提出一种用数来决定平面上点的位置的方法.

在平面上选定两条互相垂直的直线. 分别指定这两条直线的正向. 这样,这两条直线已成为两个轴了. 按任意次序把这两个轴编号,一个称为第一轴,另一个称为第二轴. 此外,取定一单位长度①,并把两轴的交点作为第一轴的原点,同时也作为第二轴的原点. 用字母 $O$ 表示这共同原点. 这样,按照§1.2所说明的方法,现在这两个轴都已成为数轴了. 这就是说,第一轴上任意点 $P$ 有确定的数 $x$ 与之对应,$x$ 即 $P$ 在第一轴上的坐标. 同样地,第二轴上任意点 $Q$ 也有确定的数 $y$ 与之对应,$y$ 即 $Q$ 在第二轴上的坐标.

通常,第一轴取水平位置,正向自左至右;第二轴取铅直位置,正向自下至上. 第一轴也称横轴或 $x$ 轴. 第二轴也称纵轴或 $y$ 轴.

① 一般两轴上取同一个单位长度,但也可以各取不同的单位长度.

在描出的 $x$ 轴及 $y$ 轴末端，分别写上字母 $x$ 及 $y$.

现在我们可以使平面上任意一点 $M$ 的位置用两个有一定次序的数来决定．过点 $M$ 向第一轴作垂线得垂足 $P$．$P$ 称为点 $M$ 在第一轴上的投影．如图 1.5 设点 $P$ 在第一轴上的坐标为数 $x$，则称数 $x$ 为点 $M$ 的**第一坐标或横标**．同样地，过点 $M$ 向第二轴作垂线得垂足 $Q$．$Q$ 称为点 $M$ 在第二轴上的投影．设点 $Q$ 在第二轴上的坐标为数 $y$，则称数 $y$ 为点 $M$ 的**第二坐标或纵标**．记号 $M(x, y)$ 表示点 $M$ 的横标为 $x$ 而纵标为 $y$.

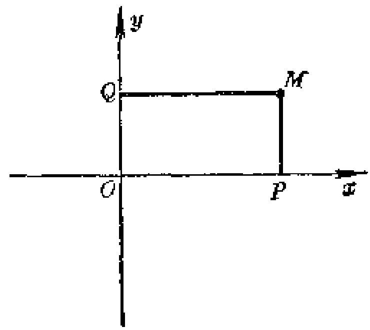

图 1.5

依照上述方法，当平面上取定了 $x$ 轴和 $y$ 轴之后，如果已知平面上任意一点 $M$ 的位置，则点 $M$ 的坐标 $(x, y)$ 便可确定．反过来，如果已知平面上某点 $M$ 的坐标为 $(x, y)$，则点 $M$ 的位置也可确定．方法是这样的：在横轴上取定以数 $x$ 为坐标的点 $P$．在纵轴上取定以数 $y$ 为坐标的点 $Q$．过 $P$ 作平行纵轴的直线．过 $Q$ 作平行横轴的直线．这两直线的交点即点 $M$ 的位置．

上述使平面上点的位置可用两个有序的数（即点的坐标）来决定的方法，是十七世纪法国数学家笛卡儿所提出的，因此这种点的坐标便称为**平面上点的笛卡儿直角坐标**．在平面上取定 $x$ 轴和 $y$ 轴而使平面上点的位置可用它的坐标 $(x, y)$ 来决定这件事，称为**在平面上导入坐标系** $xOy$．以后我们常假定平面上已导入坐标系 $xOy$ 而不再声明．

必须指出：**在平面上导入坐标系 $xOy$ 后可使平面上的点和一对有序的实数 $(x, y)$ 之间建立一一对应关系，这件事是有头等重要意义的，因为它是解析几何学的基础．**

$x$ 轴和 $y$ 轴都称为坐标轴. 两轴的公共原点 $O$ 称为坐标原点. 两轴将平面分成四个部分. 这些部分称为象限. 四个象限有一定的次序. 在正的 $x$ 半轴和正的 $y$ 半轴之间的称为第 I 象限. 在正的 $y$ 半轴和负的 $x$ 半轴之间的称为第 II 象限. 在负的 $x$ 半轴和负的 $y$ 半轴之间的称为第 III 象限. 在负的 $y$ 半轴和正的 $x$ 半轴之间的称为第 IV 象限(图 1.6).

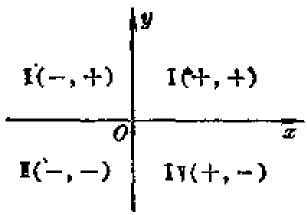


图 1.6

设点 $M$ 的坐标为 $(x, y)$. 如果 $x>0$, $y>0$, 则 $M$ 在第 I 象限. 如果 $x<0$, $y>0$, 则 $M$ 在第 II 象限. 如果 $x<0$, $y<0$, 则 $M$ 在第 III 象限. 如果 $x>0$, $y<0$, 则 $M$ 在第 IV 象限.

设点 $M$ 的坐标为 $(x, y)$, 根据初等几何上点的轴对称与中心对称的定义, 容易知道 $(x, y)$ 与 $(x, -y)$ 关于 $x$ 轴相对称; $(x, y)$ 与 $(-x, y)$ 关于 $y$ 轴相对称; $(x, y)$ 与 $(-x, -y)$ 关于原点相对称.

## §1.4 坐标变换问题

平面上点的坐标是与平面上所导入的坐标系有关的. 平面上同一点 $M$ 对不同的坐标系 $xOy$ 和 $x'O'y'$ 会有不同的坐标 $(x, y)$ 和 $(x', y')$.

所谓坐标变换的问题是: 平面上有两个不同的坐标系 $xOy$ 和 $x'O'y'$, 平面上任意一点 $M$, 它在坐标系 $xOy$ 下的坐标是 $(x, y)$, 在坐标系 $x'O'y'$ 下的坐标是 $(x', y')$ (图 1.7), $x$, $y$ 和 $x'$, $y'$ 间的关系如何? 或者说, 如何用 $x'$, $y'$ 来表示 $x$ 和 $y$? 反过来, 如何用 $x$, $y$ 来表示 $x'$ 和 $y'$?

可以设想, 坐标系 $x'O'y'$ 是由坐标系 $xOy$ 经过两种运动后所

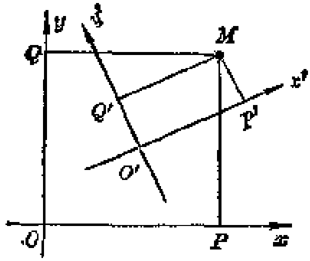


图 1.7

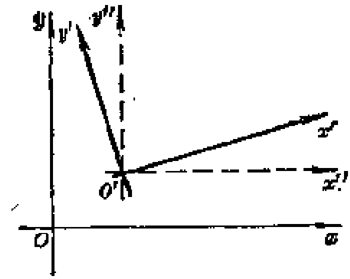


图 1.8

得到的(图 1.8).

(1) 坐标轴的方向不变，原点从 $O$ 移至 $O'$. 这样，$xOy$ 先运动到 $x''O'y''$. 这种坐标轴的运动，称为轴的平移.

(2) 原点不动，坐标轴旋转某一角度. 这样，$x''O'y''$ 运动到 $x'O'y'$. 这种坐标轴的运动，称为轴的旋转.

当然，也可设想先有轴的旋转而后有轴的平移，结果还是一样的.

下面我们来分别讨论：在轴的平移和轴的旋转下，$x$, $y$ 和 $x'$, $y'$ 间的关系如何？

## §1.5 轴的平移

设有原点不同而轴的方向相同的两个坐标系 $xOy$ 和 $x'O'y'$. 为了方便起见，我们称坐标系 $xOy$ 为旧系，坐标系 $x'O'y'$ 为新系，因为可以设想新系是由旧系经轴的平移得到的. 点 $O'$ 在旧系下的坐标设为 $(a, b)$，在新系下的坐标当然为 $(0, 0)$. 平面上任意点 $M$ 在旧系下的坐标为 $(x, y)$，在新系下的坐标为 $(x', y')$. 现在来研究坐标 $(x, y)$ 和坐标 $(x', y')$ 之间的关系(图 1.9).

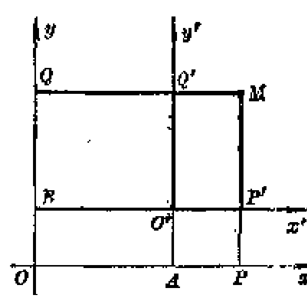


图 1.9

设点 $M$ 在 $x$ 轴和 $x'$ 轴上的投影依次为 $P$ 和 $P'$，又点 $O'$ 在 $x$ 轴上的投影为 $A$，则 $OP=x$，$O'P'=x'$，$OA=a$。根据 §1.1 的(1)式得

$$OP=OA+AP.$$

但 $$AP=O'P',$$

因此 $$OP=OA+O'P',$$

即 $$x=a+x'.$$

用同样方法可得 $$y=b+y'.$$

这样就得到了在轴的平移下用新系的坐标表示旧系的坐标的公式：

$$\begin{cases} x=x'+a, \\ y=y'+b. \end{cases} \tag{1}$$

将(1)式移项便可以得到在轴的平移下用旧系坐标表示新系坐标的公式：

$$\begin{cases} x'=x-a, \\ y'=y-b. \end{cases} \tag{2}$$

## §1.6 轴的旋转

设平面上有一坐标系 $xOy$。现在原点 $O$ 不动，将两轴都旋转 $\alpha$ 角，这样就得到一新的坐标系 $x'Oy'$。平面上任意点 $M$ 在旧系和新系下的坐标依次用 $(x, y)$ 和 $(x', y')$ 表示。现在来研究坐标 $(x, y)$ 和坐标 $(x', y')$ 之间的关系(图 1.10)。

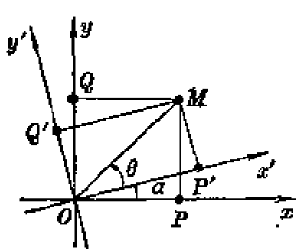


图 1.10

设点 $M$ 在 $x$ 轴，$y$ 轴，$x'$ 轴，$y'$ 轴上的投影依次为 $P$, $Q$, $P'$, $Q'$，则 $OP=x$, $OQ=y$, $OP'=x'$, $OQ'=y'$。

又设 $\angle P'OM=\theta$，则

$$x=OP=|OM|\cos(\alpha+\theta)$$
$$=|OM|\cos\alpha\cos\theta-|OM|\sin\alpha\sin\theta.$$

但
$$|OM|\cos\theta=OP'=x',$$
$$|OM|\sin\theta=P'M=OQ'=y'①,$$

因此
$$x=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha.$$

又
$$y=OQ=PM=|OM|\sin(\alpha+\theta)$$
$$=|OM|\sin\alpha\cos\theta+|OM|\cos\alpha\sin\theta.$$

所以
$$y=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha.$$

这样就得到了**在轴的旋转下用新系坐标表示旧系坐标的公式**：

$$\begin{cases} x=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha, \\ y=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha. \end{cases} \tag{1}$$

为了获得在轴的旋转下用旧系坐标表示新系坐标的公式，我们把公式(1)中的两个等式看作是两个关于 $x'$, $y'$ 的二元一次方程．把这两个方程联立并解出 $x'$ 和 $y'$ 便能达到目的．但也可这样来推论：新系是由旧系旋转 $\alpha$ 角所得到的，反过来旧系便可由新系旋转 $-\alpha$ 角得到．因此，将公式(1)中的新旧系坐标互换，同时以 $-\alpha$ 代 $\alpha$，便获得**在轴的旋转下用旧系坐标表示新系坐标的公式**：

$$\begin{cases} x'=x\cos\alpha+y\sin\alpha, \\ y'=-x\sin\alpha+y\cos\alpha. \end{cases} \tag{2}$$

## §1.7 两点间的距离

设有两点 $M_1(x_1, y_1)$，$M_2(x_2, y_2)$．现在要计算这两点间的

---

① 如果有向线段 $\overline{AB}$ 平行坐标轴，我们设想通过 $\overline{AB}$ 有一方向和坐标轴相同的轴放置着．因此，这时 $\overline{AB}$ 是在轴上的有向线段而 $AB$ 表示 $\overline{AB}$ 在轴上的值．这里的 $P'M$ 表示 $\overline{P'M}$ 的值便是如此理解的．

距离 $d=|M_1M_2|$（图 1.11）。

过 $M_1$, $M_2$ 分别引垂直于 $x$ 轴的直线 $M_1A$, $M_2B$ 和垂直于 $y$ 轴的直线 $M_1C$, $M_2D$. 延长 $CM_1$ 与 $BM_2$ 相交于 $N$. $\triangle M_1NM_2$ 是一直角三角形. 根据勾股定理得

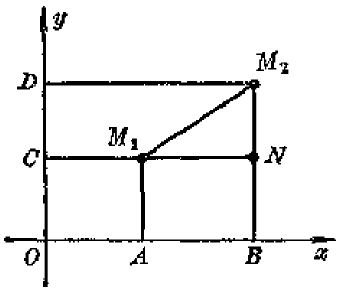


图 1.11

$$|M_1M_2|^2=|M_1N|^2+|NM_2|^2. \tag{1}$$

但
$$|M_1N|=|AB|,$$
$$|NM_2|=|CD|$$

又根据 §1.2 公式(1)有

$$AB=x_2-x_1,\quad CD=y_2-y_1. \tag{2}$$

由绝对值的性质，从(2)式可得到

$$|AB|^2=(x_2-x_1)^2,\quad |CD|^2=(y_2-y_1)^2. \tag{3}$$

将(3)式代入(1)式得

$$|M_1M_2|^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2.$$

因此
$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

**例 1** 求点(3, 4)和点(6, 0)间的距离。

**解** $d=\sqrt{(6-3)^2+(0-4)^2}=\sqrt{9+16}=5.$

**例 2** 求点 $M(x, y)$ 和坐标原点 $O(0, 0)$ 间的距离。

**解** $$d=\sqrt{x^2+y^2}.$$

## §1.3 线段的定比分点

在某一轴上已知两点 $M_1(x_1, y_1)$ 和 $M_2(x_2, y_2)$. 设点 $M$ 也在这轴上且使两有向线段 $\overline{M_1M}$ 和 $\overline{MM_2}$ 的值之比等于 $\lambda$：

$$\frac{M_1M}{MM_2}=\lambda.$$

求点 $M$ 的坐标 $x$ 和 $y$.