线性电路过渡过程

苏联K.A.克雪格著

水利电力出版社

綫性电路过渡过程

苏联K.A.克魯格著

蔡六瑜 張 謹 舒賢林 諸維明 赵 辰譯

張 謹 蔡六瑜 赵 辰校

水利电力出版社

內 容 提 要

本书的目的是在于說明如何应用算子計算法来研究綫性电路中的过渡过程。因此本书首先敘述算子計算法的基础，然后研究集总和分布参数电路內的过渡現象，最后还討論了鏈形电路內的过渡現象。

为了具体說明研究过渡过程的方法，书中附有例題。

本书的讀者对象是研究生和科学工作者。

К.А.КРУГ

ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

ГОСЭНЕРГОИЗДАТ МОСКВА 1948

綫性电路过渡过程

根据苏联国立动力出版社1948年莫斯科版翻譯

蔡六瑜 張 謹 舒賢林 譚維明 赵 辰譯

張 謹 蔡六瑜 赵 辰校

*

2222 D 628

水利电力出版社出版（北京西郊科学路二里沟）

北京市书刊出版业营业許可証出字第105号

水利电力出版社印刷厂排印

新华书店科技发行所发行 各地新华书店經售

*

850×1168 1/32开本 * 10 7/16印張 * 277千字 * 定价(第10类)1.70元

1959年12月北京第1版

1959年12月北京第1次印刷(0001—2,290册)

序

关于过渡过程的研究，过去主要是在接通和切断次数比較頻繁的电信电路方面发展的。目前由于电压的升高和傳輸功率的增大，电力装置中过渡过程的研究，也有了极为重要的意义。

为了弄清楚在过渡状态中所产生的电压和电流，我們必須列出微分方程式。用經典方法去解这种微分方程式，除了非常麻煩以外，有时还会遇到不可克服的困难。赫維賽德工程师当时所創造的解微分方程式的所謂算子法，可以使方程式代数化，这样就大大地簡化了微分方程式的編排和求解，一开始就可以照顧到边界条件。当求解含有偏微分的微分方程式时，这种方法的优点表現得特别明显。

赫維賽德所提出的微分方程式的編排和求解的方法，并未附有相应的数学証明，因而在长时期中沒有得到应有的承認。

只是后来由于許多研究者的工作，我們才知道以代数乘数 p 和 $\frac{1}{p}$ 分别代替算子 $\frac{d}{dt}$ 和 $\int dt$，不过是函数变换而已。这种变换就是把含有算子 $\frac{d}{dt}$ 和 $\int dt$ 的时間函数轉換成算子 p 的函数；而 p 已起了代数乘数的作用。这种变换就是过去早已知道的拉普拉斯函数变换。

利用类似的变换，卡尔松导出了一系列便于应用算子法的定理。借助于已知的拉普拉斯变换式，以及象赫維賽德那样借助于把象函数分解成級数的方法，他得以大大地推广了算子法解决电路內（特别是在具有分布参数的电路內）过渡过程問題的应用范圍。

在极大多数情形中，我們能够比較簡单地通过微分方程式的代数化以算子 p 的函数来表示待求量，即正如我們所常說的，找出待求量的象函数。利用拉普拉斯函数反变换式，待求量的时間函数（即根据象函数求出原函数）也就可以求出来。由这种从傅立叶积分中推出的反变换法，可以导出圍綫积分和布罗姆維奇积分，利用积分計算法，这种問題大半是可以簡单地解决的。

对于我們苏联学术界来說，关于算子法解决电工問題的应用，曾在 M.Ю.尤利也夫（Юрьев）的专論“四端网絡中的过渡狀态”（1936年）以及早逝的 A.M.爱弗洛斯（Эфрос）和 B.B.丹尼列夫斯基（Данилевский）的著作“算子計算法和圍綫积分”（1936年）中探討过。

应用于电路的运算法的基本理論，在新版“电工原理”中也有說明。

本书的目的，是对求解微分方程式的算子法或符号法（这样叫，更确切一些）进行系統的叙述和論証，并且說明，这种方法如何用来研究各种具有恆定参数（R、L、C）的电路內的过渡过程。

根据这点，本书一共分为四章。在第一章中所叙述的，就是在以算子法（运算法）为計算工具求解微分方程式时所得的研究过渡过程的解析法，同时还介紹了一系列存在于待求量的象函数和原函数之間的符号关系。在第二章中所探討的，是具有集总参数的电路內的过渡过程。第三章专門研究分布参数电路（长綫）內的过渡过程。而第四章則論述所謂鏈形网絡內的过渡过程。

书后附有大量符号关系表，本书由此更易于利用。

最后，作者認为需要向仔細审閱本书手稿的技术科学博士 B.Ю.罗蒙諾索夫教授和对本书的出版以及校对有帮助的技术科学副博士 Л.A.柏松諾夫（Бессонов）敬致謝意。对国立动力出版社在出版这样一本难以排印的书方面所做的工作，本人認为也有指出的必要。

K.A.克魯格

目　录

第一章 研究过渡过程的解析法

1. 电路中过渡过程的微分方程式

恆定的电阻R，电感L和电容C所組成的电路內的过渡过程，当R、L和C可以認为是集总参数时，可用常微分方程式来描述；当R、L和C是分布参数时，例如长綫，則用偏微分方程式来描述。

对于R、L和C所組成的无分支电路，电的平衡微分方程式可以写成以下形式：

$$Ri+L\frac{di}{dt}+\frac{1}{C}\int_0^t idt=f(t) \tag{1-1}$$

或

$$R\cdot\frac{di}{dt}+L\frac{d^2i}{dt^2}+\frac{1}{C}\cdot i=f'(t), \tag{1-2}$$

式中$f(t)$是外加电压或电动势。

如果在这个閉合电路中沒有外加电压或电动势$f(t)=0$，則常微分方程式变为齐次方程式：

$$\frac{d^2i}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{di}{dt}+\frac{i}{LC}=0. \tag{1-3}$$

对于有分支的电路，根据基尔霍夫第一和第二定律，我們可以对会合于結点的电流的瞬时值幷对各个回路所包括各段上的电压降和电动势的瞬时值列出微分方程式。

用消除变数和重复微分等方法，我們能够把这种包含几个未知数的微分方程式化为具有一个未知数的微分方程式。这个未知数可以是电路內任何部分的电流或电压，而这个微分方程式的阶数則决定于能独立儲积电場能或磁場能的元件数目。例如，对于包含R和L或R和C的电路，得到一阶微分方程式，对于包含R、L和C的电路得到二阶微分方程式，而对于两个互相耦合的

振蕩回路，則得到四阶微分方程式，依此类推。

只有在最簡单的情况下，直接将微分方程式积分才会迅速地得出結果。例如当电阻和电感所組成的电路接向直流电压时，可得下述微分方程式：

$$R\cdot i+L\frac{di}{dt}=U, \tag{1-4}$$

其解为下述表达式

$$i=A\cdot e^{pt}+A_0. \tag{1-5}$$

将i和从方程式（1-5）得来的i的微商代入方程式（1-4），便得出下式：

$$A\cdot e^{pt}(R+Lp)+A_0\cdot R=U, \tag{1-6}$$

将上式中与t有关和无关的項分开，可得：

$$R+Lp=0 \text{ 和 } R\cdot A_0=U \tag{1-7}$$

或
$$A_0=\frac{U}{R},\quad p=-\frac{R}{L}.$$

因为具有电感的电路中的电流只能从零值起，逐漸增长，所以在$t=0$的瞬間的电流是：

$$i_{t=0}=A+A_0=0 \text{ 和 } A=-A_0=-\frac{U}{R}.$$

因此当电路接通时，电流是：

$$i=\frac{U}{R}-\frac{U}{R}\cdot e^{-\alpha t}=\frac{U}{R}(1-e^{-\alpha t}), \tag{1-8}$$

式中 $\alpha=\frac{R}{L}$.

第一分量对应于当$t=\infty$时的稳定状态，而第二分量則对应于所謂自由状态。

复杂电路微分方程式的解可以整理为两羣分量所組成的解。第一分量或第一羣分量对应于强制状态，亦即是假定电压（或电动势）在开始計算前已經作用了无限长久时所发生的状态。第二分量或第二羣分量对应于自由状态，它們必須滿足外加电压（或电动势）等于零的微分方程式。

这样得到的微分方程式

$$a_n\frac{d^n i}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}i}{dt^{n-1}}+\cdots\cdots+a_1\frac{di}{dt}+a_0 i=0 \qquad (1\text{-}9)$$

的解将是特解 $A\cdot e^{pt}$之和。

将特解和它的微商

$$\frac{dAe^{pt}}{dt}=Ape^{pt};\ \frac{d^2Ae^{pt}}{dt^2}=Ap^2e^{pt} \qquad (1\text{-}10)$$

代入和消去公共乘数 Ae^{pt}之后，就导出所謂特征方程式

$$a_n\cdot p^n+a_{n-1}\cdot p^{n-1}+\cdots\cdots+a_1 p+a_0=0, \qquad (1\text{-}11)$$

它的根决定了在特解的冪指数中，t 前面的系数值。

自由状态特解的項数等于微分方程式的阶数（自由度的数目）。特征方程式可以具有实根，虛根或复根。实根和复根的实部应該是負数，因为沒有外加电压时，自由状态分量应当逐漸衰逝。假若是虛根，这就是說电路中沒有能量消耗($R=0$)。虛根和复根应当是成对共軛的。

无論是对于待求量或者是对于在所討論电路內表征过渡現象的所有其它变量，强制状态和自由状态分量之和应当滿足起始条件($t=0$)和終了条件($t=\infty$)。因此， 如果在外加电压接入前，电路的任何部分內都沒有儲能，則在接通瞬間所有具有电感支路中的电流应該等于零，而电容器极板上的电压也应等于零。当接于直流电压时，在穩定状态下电感对于电流的分布沒有影响，而所有具有电容器的支路中的电流則等于零。

对于具有分支电路的微分方程式来說，特別是当外加电压不是直流，而是按正弦規律或者按更复杂的規律变化的时候，普通的解方程式的方法就显得很笨拙，不清楚，而且甚为繁复。

所以，当研究分支电路以及有分布参数的电路的过渡过程时，必須采用特別的微分方程解法。

2. 赫維賽德算子法

奥利佛·赫維賽德(Oliver Heaviside)(1850—1924)在他的著

作"电磁理論"中提出了一种新頴而又簡单的实用方法，这种方法能在 $t<0$ 时，所有时間函数都等于零的条件下，不需要預先确定积分常数就可解出微分方程式。

赫維賽德所提出的方法的特点，是他引用了特别的算子（用符号 p 表示），赫維賽德用放在函数之前的算子 p 表示任何函数 $x=f(t)$ 对时間的微商：

$$\frac{dx}{dt}=px, \quad \frac{d^2x}{dt^2}=p^2x\cdots\cdots; \tag{2-1}$$

而用放在函数之前的 $\frac{1}{p}$ 表示函数 $x=f(t)$ 对于时間的积分，因为微分和积分互为逆运算，其式如下：

$$\int x\,dt=\frac{x}{p}, \quad \int dt\int x\,dt=\frac{x}{p^2}\cdots. \tag{2-2}$$

为了使上式正确起見，需要：第一，当 $t<0$ 时，务必要求 $f(t)=0$；第二，如果当 $t<0$ 时，函数 $x=f(t)$ 等于零，而当 $t=0$ 时它由零突变到有限值，則积分不应从 $t=0$ 的瞬間开始，而应比零早一个无限小的时間。

为了表明我們所討論的时間函数和它的微商在一切 $t\leqslant 0$ 时等于零，而只有在 $t>0$ 时才得到不为零的值；赫維賽德曾引入了以符号 $\mathbf{1}$ 或 $\mathbf{1}(t)$（粗体字）表示的所謂单元函数（或单元电压）。放在函数后面的符号 $\mathbf{1}$ 或 $\mathbf{1}(t)$ 表示着（图2-1）：

$$\left.\begin{array}{ll}\text{当 } t<0 \text{ 时} & f(t)\cdot\mathbf{1}=0;\\ \text{当 } t>0 \text{ 时} & f(t)\cdot\mathbf{1}=f(t).\end{array}\right\} \tag{2-3}$$

单元函数本身（图 2-2）具有下述意义：

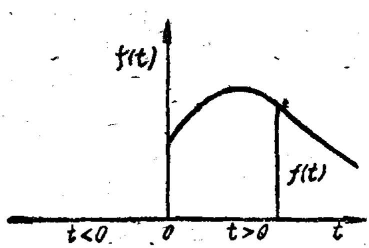

图 2-1

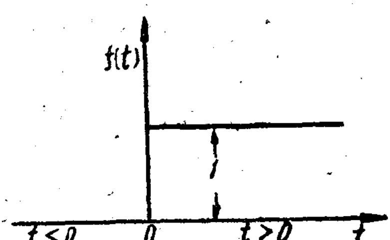

图 2-2

$$\left.\begin{array}{ll} & \text{当 } t<0 \text{ 时，} \mathbf{1}=0 \\ \text{和} & \text{当 } t>0 \text{ 时，} \mathbf{1}=1; \end{array}\right\} \quad (2\text{-}4)$$

当$t=0$时函数由零突变到1。

一切数学中的語言，都是以符号和代表一定运算的算子为基础的；例如＋和－表示加法和减法，×和÷表示乘法和除法，$\sqrt{\ }$表示开方等等。在赫維賽德以前，也有人采用字母来代替符号$\frac{d}{dt}$，例如拉格朗日曾用字母D来表示微商，但赫維賽德所引用的算子的特点不在于以字母来表示一定的运算，而在于赫維賽德进一步把这个符号p象与它的函数分离的代数量一样来处理。

例如，R和L电路在$t=0$瞬間接入到直流电压U的电流方程式，依照赫維賽德法，可写为如下形式：

$$R\cdot i+Lp\cdot i=(R+Lp)i=U, \quad (2\text{-}5)$$

由此求得电流

$$i=\frac{U}{R+Lp}=\frac{U}{L}\ \frac{1}{p+\alpha}=\frac{U}{R}\cdot\frac{\alpha}{p+\alpha}, \quad (2\text{-}6)$$

式中　$\alpha=\frac{R}{L}$.

关系式(2-6)以及关系式(2-8)至(2-10)都不是等式，而是符号变换式，因为i是时間的函数，而在变换式的右边它变换为算子p的函数。

赫維賽德成功地証明了象方程右边那样的式子$\frac{\alpha}{p+\alpha}$如何可以变换为时間函数，若将方程(1-8)和(2-6)展开为一級数：

$$i=\frac{U}{R}\left[1-\left(1-\alpha\cdot t+\frac{\alpha^2 t^2}{2!}-\frac{\alpha^3 t^3}{3!}+\cdots\cdots\right)\right]\cdot\mathbf{1}, \quad (2\text{-}7)$$

$$i=\frac{U}{R}\left(\frac{\alpha}{p}-\frac{\alpha^2}{p^2}+\frac{\alpha^3}{p^3}-\cdots\cdots\right), \quad (2\text{-}8)$$

则比較这些級数中同冪的各項，便可以得到下列关系（在相应的冪中消去α之后）：

$$\frac{1}{p}=t\cdot\mathbf{1};\quad \frac{1}{p^2}=\frac{t^2}{2!}\cdot\mathbf{1};\quad \cdots\cdots\frac{1}{p^n}=\frac{t^n}{n!}\cdot\mathbf{1}. \quad (2\text{-}9)$$

如果把$\frac{1}{p}$考虑为对于时間由零到 t 的积分的符号，而保留着积分开始于較 $t=0$瞬間早无穷小时間的条件时，这些关系式也是可以得到的。

$$\frac{1}{p}=\int_0^t 1\,dt=t\cdot\mathbf{1},$$

$$\frac{1}{p^2}=\int_0^t dt\int_0^t 1\,dt=\frac{t^2}{2!}\cdot\mathbf{1},$$

$$\frac{1}{p^n}=\frac{t^n}{n!}\cdot\mathbf{1}, \tag{2-10}$$

比較（1－8）和（2－6）两式，我們可以看出，算子函数$\frac{\alpha}{p+\alpha}$可以变换为时間函数 $1-e^{-\alpha t}$，相反地，函数 $1-e^{-\alpha t}$ 也可以变换为算子函数$\frac{\alpha}{p+\alpha}$。

今后为了表示时間函数变换为算子函数 p 或者相反的变换，我們将利用对应号$\doteq$。

这样一来，式$\frac{\alpha}{p+\alpha}$和 $1-e^{-\alpha t}$ 可以用下述符号关系式来联系：

$$\frac{\alpha}{p+\alpha}\doteq 1-e^{-\alpha t}. \tag{2-11}$$

如果在关系式（2－11）两边除以常数α，則关系式可以写成：

$$\frac{1}{p+\alpha}\doteq\frac{1}{\alpha}(1-e^{-\alpha t}). \tag{2-12}$$

如果从方程式(2-11)两边减去 1，則得：

$$\frac{p}{p+\alpha}\doteq e^{-\alpha t}. \tag{2-13}$$

在以上所导出的关系式中，系数α可以是正数，負数，虛数或者复数。

应用已得的关系式，我們来求电容器 C 通过电阻 R 在直流电压下充电时的电流。在这种情况下，电流方程式是：

$$R\cdot i+\frac{1}{C}\int_0^t i\,dt=U, \tag{2-14}$$

或者变换这个方程式为符号形式，其中 i 不是 t 的函数而是 p 的函数，我們就得到

$$R\cdot i(p)+\frac{i(p)}{Cp}=U, \tag{2-15}$$

从而可得

$$i(p)=\frac{U}{R+\frac{1}{Cp}}=\frac{U}{R}\,\frac{p}{p+\frac{1}{RC}}. \tag{2-16}$$

設 $\frac{1}{RC}=\alpha$，根据关系式(2-13)可以立刻写出 i 为时間函数的答案：

$$i=i(t)=\frac{U}{R}e^{-\frac{t}{RC}}. \tag{2-17}$$

为了求出在直流电压下充电的电容器的电压，我們把方程式

$$u_C=\frac{1}{C}\int_0^t i\,dt$$

变换为符号形式，并将从方程式(2-16)得来的 i 的数值代入，得：

$$u_C(p)=\frac{1}{Cp}i(p)=\frac{U}{RC}\,\frac{1}{p+\frac{1}{RC}}. \tag{2-18}$$

仍設 $\frac{1}{RC}=\alpha$，根据方程式(2-11)我們得到 u_c 的时間函数：

$$u_C=U(1-e^{-\frac{t}{RC}}). \tag{2-19}$$

如果将 R，L 和 C 所构成的电路接向直流电压，則在此种情况下的微分方程式将具有下述形式：

$$R\cdot i+L\frac{di}{dt}+\frac{1}{C}\int_0^t i\,dt=U,\qquad(2\text{-}20)$$

将其变换为符号形式，得:

$$\left(R+Lp+\frac{1}{Cp}\right)i(p)=U.\qquad(2\text{-}21)$$

从下式即可确定电流:

$$i(p)=\frac{U}{L}\frac{p}{p^2+\frac{R}{L}p+\frac{1}{LC}}=\frac{U}{Z(p)},\qquad(2\text{-}22)$$

式中
$$Z(p)=R+Lp+\frac{1}{Cp}.\qquad(2\text{-}23)$$

$Z(p)$可以看作当电路接通时阻抗的符号式，$Z(p)$的結构与在正弦电路时电路阻抗的符号式

$$Z(j\omega)=R+j\omega L+\frac{1}{j\omega C}$$

有同样的形式，$Z(p)$和$Z(j\omega)$式的結构相同不是偶然的，而是完全合乎規律的，因为当电压和电流作正弦变化时，它們的符号式可以表示为在它們之間具有相位差的$\overline{U}e^{j\omega t}$和$\overline{I}e^{j\omega t}$的形式，电压的平衡方程式可写为下列形式:

$$u=Ri+L\frac{di}{dt}+\frac{1}{C}\int_0^t i\,dt$$

或
$$\overline{U}e^{j\omega t}=R\overline{I}e^{j\omega t}+j\omega L\overline{I}e^{j\omega t}+\frac{1}{j\omega C}\overline{I}e^{j\omega t}.$$

或者用$\dot{U}$表示$\overline{U}e^{j\omega t}$和用$\dot{I}$表示$\overline{I}e^{j\omega t}$，我們得到

$$\dot{I}=\frac{\dot{U}}{R+j\omega L+\frac{1}{j\omega C}}=\frac{\dot{U}}{Z(j\omega)}.$$

象在交流理論中引用算子$j\omega$一样，在研究过渡过程的算子法中引用算子p也能把微分方程式化成代数形式，即是使它們代数化。

当各支路中的电流和电压降用符号式表示时，用于节点上的

基尔霍夫第一定律和用于各个回路上的第二定律仍然有效，所有属于綫性电路的定理和换算也还可以应用，例如戴維宁定理，星形三角形变换等等。求解各支路中的电流或者各段上电压的表示式可以归結为求解綫性代数方程式，例如当綫路接入于直流电压时得到电流表示式：

$$i(p)=\frac{U}{Z(p)}=\frac{UM(p)}{N(p)},$$

它等于直流电压 U 除以阻抗的符号式 $Z(p)$，在一般情况下，阻抗的倒数 $\frac{1}{Z(p)}=Y(p)$，亦即以符号式表示的导納是有理分式。在通分之后，該分式的分子和分母都是由 p 的整数冪多項式組成的，并且分母 $N(p)$ 中 p 的最高冪大于 $M(p)$ 中 p 的最高冪。这一点可从下述每一支路的阻抗表达式推出：

$$Z(p)=R+Lp+\frac{1}{pC}=\frac{LCp^2+RCp+1}{Cp}$$

(在电路中沒有电容 $C=\infty$ 的情况，而 $R=0$，$L=0$，$C\neq 0$ 的情况是不現实的)，根据因次的条件，在多項式 $N(p)$ 中，p 的冪应該大于多項式 $M(p)$ 中 p 的冪，其所大出之量等于1。如果分子和分母中 p 的最高冪相同，則表明在接通瞬間电流得到有限值。因为 t 等于零对应于 $p=\infty$；分子和分母用 p 除，我們得到有限值(参看§16，Ⅶ相似定理)。

如果欲求电路在接向直流电压时任意两点間的电压，則用相似的方法来解題，我們就得到：

$$u(p)=\frac{U}{Z_u(p)}=\frac{UM_u(p)}{N_u(p)},$$

式中 $Z_u(p)$ 可以考虑为某种对应于 $U(p)$ 的阻抗〔$Z_u(p)$ 的因次不同于 $Z(p)$ 的因次〕。在这种情况下，$M_u(p)$ 中 p 的最高冪不可能大于 $N_u(p)$ 中 p 的最高冪。

正如§16中所証明的〔关系式(16-48)〕，如果在 $t=0$ 瞬間所接入的电压不是常数，而是时間的函数，則以算子 p 表示的电流的象函数(或任何其它的量)等于以算子 p 所表示的接入电压除以

阻抗的符号式后所得的商。我們現在假定所接入的电压是按正弦規律变化的。

正弦电压在一般形式中可以用虛冪来表示

$$u=U_m e^{j\omega t}=U_m\cdot\cos\omega t+jU_m\sin\omega t.\qquad(2\text{-}24)$$

根据方程式(2-13)，若令 $\alpha=-j\omega$，則这个虛冪可以变换为算子 p 的函数：

$$U_m e^{j\omega t} \doteq \frac{U_m p}{p-j\omega}=u(p),\qquad(2\text{-}25)$$

因此，当接在具有振幅等于 1 的正弦电压时，电流可用下式表示：

$$i(p)=\frac{u(p)}{Z(p)}=\frac{p}{(p-j\omega)\cdot Z(p)}=\frac{p\cdot M(p)}{(p-j\omega)N(p)}.\qquad(2\text{-}26)$$

因为

$$e^{j\omega t}=\cos\omega t+j\sin\omega t$$

包含实部和虛部，所以方程式的解必然得到具有实部和虛部的复数式。

因此，如果正弦电压具有初相 ψ

$$u=U_m\cdot\sin(\omega t+\psi)=U_m\cdot\sin\psi\cdot\cos\omega t+U_m\cdot\cos\psi\cdot\sin\omega t,\qquad(2\text{-}27)$$

$$u=U_m'\cdot\cos\omega t+U_m''\cdot\sin\omega t,$$

則为了求得电流，当接入此电压时起先必須把 U_m 看成为 1，然后将方程式(2-26)的解的实部乘 $U_m'=U_m\sin\psi$，而虛部去掉 j 再乘以 $U_m''=U_m\cos\psi$，并把这两式相加。

3. 赫維賽德分解定理

正如前节中所指明的那样，当赫維賽德算子法用来研究具有集总参数 R、L 和 C 的电路內的过渡过程时，它引出(2-26)式类型的方程式，即包含 p 的整数冪的多項式的有理分式。赫維賽德分解这有理分式为簡单分式之和，然后把这些簡单分式中的每一个都变换为时間函数，并将这样所得的各个解答迭加起来。

通常，在算子方程式中，有理分式的分子多項式的冪低于分