数理逻辑

A. G. 汉密尔顿著

朱 水 林 译

程 其 襄 校

华东师范大学出版社

数理逻辑

A. G. 汉密尔顿 著
朱水林 译
程其襄 校

华东师范大学出版社

数 理 逻 辑

朱水林　译

程其襄　校

华东师范大学出版社出版
（上海中山北路3663号）
新华书店上海发行所发行　华东师大印刷厂印刷
开本：850×1168 1/32　印张：8.125　字数：210千字
1986年11月第一版　1986年11月第一次印刷
印数：1—4000本

统一书号：2135·010　定价：1.65元

LOGIC FOR MATHEMATICIANS

A. G. HAMILTON

(Cambridge University 1978)

前　言

每位数学家必定知道，对于不懂数学的人提出的关于他的工作的性质的询问，他的回答如何使谈话难以继续．逻辑学家在和数学家交往中，也认识到他的职业也会招致类似的对待．数学家和普通人之间在这方面的隔阂恐怕永远消除不了(尽管应尽量缩小它)．但是逻辑学家和数学家之间的隔阂，照我看来是可以克服的．本书就是一个尝试，想通过为并不渴望成为逻辑学家的数学工作者提供一个逻辑引论，以期在两者的间隙处架起一座桥梁．

目前在许多大学中，数理逻辑已被当作数学、计算机专业的大学生课程的一部分．现今学科本身已发展得相当完整，在基础课程中所包括的基本材料已具有标准的形态．本书可以当作这样一门课程的教材，当然其中有些材料是超出了范围的．本书在材料的选取方面经过深思熟虑，按直接的方式给出，因而对主题的各个方面，无论对应用和发展方面都没有特别的偏爱．同时力图使学科处理得从数学上看宛如一个整体，并特别强调逻辑对于数学工作者的重要性．

本书设想可以为任何具有一定数学基础的人接受，包括从一年级的大学生到专业的数学工作者，只要他们希望和要求对数理逻辑有所了解．对初等代数和数论的一定程度的熟悉是被假定了的．由于可数集和不可数集的观念甚为基本，所以写了一个附录，专门描述了必要的知识．

本书的材料，是在对斯梯林大学三、四年级学生所作的、分成两门课程的十六次讲演的基础上发展形成的．第一门课程包括第一章到第四章和第五章的一部分，余下的材料构成第二门课程，是

较为高级的选修课程. 第六章是本书中最为困难的，但是由于哥德尔不完全性定理的重要意义，使得在这种类型的教本中应该给出它的证明的思想. 因为第七章的材料并不依赖它，所以第一次阅读时，可以略去定理的详细证明部分.

本书的内容与其它有关本学科的标准引论相比要有限一点. 特别是模型论和公理集合论几乎没有接触. 因此，对这些内容感兴趣的读者，可以参阅书末列出的进一步阅读材料. 其中有些在课文中还会专门提及(用作者的名字). 这些材料提供了数理逻辑的最为广泛的领域，并且对本书的论题作了更为深入的阐述.

书中每节末都附有练习题. 一般来说机械的例子在比较费力的例子之前，不过所有的例子都是专门为相应的章节中的材料的直接应用而设计的，其目的是为了搞清楚和巩固已学的材料，而并非为了扩充知识. 在书末写出了许多练习题的提示和解答.

本书采用的符号尽可能想标准化. 但是为简洁起见，也引入一些非标准的用法. 这些符号对熟悉材料的读者不会带来麻烦，而对材料生疏的读者却会有所帮助. 不同的作者使用不同的记法和符号体系是一件不幸的事实. 由于这个原因，为便于参照，书中专门列了一张符号对照表. 在整本教材中，符号 ▷ 用来表示，在被命题，例子，注记，系或定义打断后重新恢复的主要论述.

致谢(略……)

A. G. 汉密尔顿

1978 年

目 录

第一章　非形式的命题①演算

1·1　命题和联结词

逻辑或者至少逻辑数学是由演绎组成的．我们应该仔细考察精确地使用着的演绎规则，这种精确性是数学方法的特征．在这样做时，如果我们要求某种程度精确性的话，就必须使我们的语言无歧义，标准的数学处理方法是引进一种符号语言，它具有能够精确叙述其意义和使用方法的符号．首先我们将要考察的是日常语言的一个方面的内容，即联结词(或连接词，它是更一般的语法术语)．

当我们尝试着分析英语句子时，首先注意的是：这是一简单句还是一复合句．简单句只有一个主词和一个谓词(在语法意义下)，例如

拿破仑死了．

约翰欠杰姆两磅钱．

所有不是方的鸡蛋都是圆的．

主语下面都划了直线，余下部分为谓词．一个复合句由几个简单句通过联结词构成．例如

拿破仑死了并且世界正在欢腾．

如果所有鸡蛋不是方的，那么所有鸡蛋是圆的．

如果气压计下降，那么或者要下雨或者要下雪．

我们将把一切简单句看作非真必假，以此作为一个基本假设．无疑人们可以争论说，有些句子并不能看作非真必假，为此我们将使用另一个术语，简单命题和复合命题，我们的假设是一切命题都

① 原文为 Statement，一般译陈述，为与习惯相符，本书译为命题．——译者注．

非真必假.

简单命题将用大写字母 A, B, C, … 表示. 因而为了表示复合命题, 我们必须引进表示联结词的符号. 最通用的联结词和用来表示它们的符号, 在下表中给出:

非 A	$\sim A$
A 和 B	$A \wedge B$
A 或 B	$A \vee B$
如果 A 那么 B	$A \rightarrow B$
A 当且仅当 B	$A \leftrightarrow B$

当然, 如果这些符号的意义要精确地加以定义的话, 我们必须有把握说, 我们确切懂得左边一列中所表达的意义. 不久我们将再讨论这些.

这样, 上述三个复合命题就可以(相应地)用符号表示为:

$$A \wedge B$$

$$C \rightarrow D$$

$$E \rightarrow (F \vee G)$$

其中 A 表示"拿破仑死了", B 表示"世界正在欢腾", C 表示"所有鸡蛋不是方的"等等.

注意, 当一个复合命题按这种方式用符号表示后, 留下的仅是个逻辑框架, 一个纯粹的命题形式, 它可能为几个不同的命题所共有. 这使得我们能精确地分析演绎. 因为演绎只能用论证中命题的'形式'进行分析, 而不依赖于它们的意义.

例 1·1

如果苏格拉底是人, 那么苏格拉底有死.

苏格拉底是人.

∴ 苏格拉底有死.

这是逻辑上适当的论证. 但是考察论证

苏格拉底是人.

∴ 苏格拉底有死.

结论也可以认为是由前提推得的，然而其所以如此是由于词'人'和'有死'的意义，而不是由于单纯的逻辑演绎. 让我们用符号来表示这些论证

$A \to B$

A $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ A

$\therefore\ B$ $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\therefore\ B$

使第一式有效的在于'形式'. 任何具有这同一形式的论证应该都有效. 这是我们关于如果……那么……这样的命题的逻辑直觉. 但是第二式却并不具有这种属性. 存在着许多这种形式的论证，我们的直觉并不认为是有效的. 例如

月亮是黄的.

∴ 月亮由乳酪造成.

为此，我们研究命题形式要甚于研究具体的命题. 字母 p, q, r, … 称为命题变元，它们表示任意的非特定的单个命题. 注意字母 p, q, r, … 和字母 A, B, C, … 用法之间的区别，前者是变元，可以用特殊的简单命题代入. 后者只是特殊命题的'标记'. 变元使得我们能一般地去刻划命题和联结词所具有的属性. 现在，每个简单命题非真必假，因而一个给定的命题变元可以看成取下列两真值之一：T(真)或 F(假). 一个复合命题或命题形式的真或假，是怎样依赖于构成它的简单命题或命题变元的真或假的，这是下一节的主题.

练习

1．把下列复合命题用符号表示：

(a) 如果支付不变，价格上涨，那么流通将减少.

(b) 我们将赢得选举，如果 Jones 当选为党的领导人.

(c) 如果 Jones 没有当选为党的领导人，那么不是 Smith 就是 Robinson 退出内阁，而我们的选举将失败.

(d) 如果 x 是有理数且 y 是整数，那么 z 不是实数.

(e) 或者是杀人犯已离开国家，或者某人隐匿了他.

(f) 如果杀人犯已离开国家，那么某人隐匿了他.

(g) 两个数的和是偶数，当且仅当两数皆为偶数或两数皆为奇数.

(h) 如果 y 是整数那么 z 不是实数，假如 x 是一有理数的话.

2. (a) 从练习 1 列出的命题中挑选出具有相同形式的命题对.

(b) 从练习 1 列出的命题中，挑选出具有相同意义的命题对.

1·2 真值函数和真值表

让我们依次来考察联结词.

否定

一个命题 A 的否定，我们把它写成 $\sim A$. 显然，如果 A 真那么 $\sim A$ 假，并且如果 A 假那么 $\sim A$ 真，A 的意义是无关紧要的. 我们可用<u>真值表</u>加以刻划.

p	$\sim p$
T	F
F	T

这表给出了 $\sim p$ 的真值，当给定了 p 的真值时. 联结词 $\sim$ 引出一个<u>真值函数</u> $f^{\sim}$，即由真值表给出的从集 $\{T, F\}$ 到自身的一个函数. 那就是

$$f^{\sim}(T)=F$$
$$f^{\sim}(F)=T$$

合取

如上，易见由两个命题 A 和 B 构成的合取 $A\wedge B$ 的真值仅依赖于 A 的真值和 B 的真值. 我们有表:

p	q	$p\wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

我们对 p、q 的真值的每种可能的组合，在表中用一行表示，最后一列给出相应于 $p\wedge q$ 的真值. 因此联结词 $\wedge$ 定义了一个二元真值函数 $f^{\wedge}$.

$$f^{\wedge}(T,\ T)=T$$
$$f^{\wedge}(T,\ F)=F$$
$$f^{\wedge}(F,\ T)=F$$
$$f^{\wedge}(F,\ F)=F$$

析取

我们曾用 $A\vee B$ 表示'A 或 B'. 但是，在英语中有两种不同的对'或'这个词的标准用法. 'A 或 B'可以意指相容的，也可意指相斥的. 为了保持我们的符号语言的精确性，我们必须仅选取其中之一作为我们的符号 $\vee$ 的意义. 我们选择了前者. 对此并无什么特殊理由，我们照样也可选择后者. 相容析取的真值表如下：

p	q	$p\vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

联结词 $\wedge$ 和 $\vee$ 一样，定义了一个二元真值函数.

注记：如果 A 和 B 是简单命题，我们可以用符号表示'相斥的 A 或 B'为

$$(A\vee B)\wedge\sim(A\wedge B).$$

相应地，如果我们用'相斥的A 或 B' 定义我们的析取符号，我们可以用析取连同 $\wedge$ 和 $\sim$ 表示'相容的A 或 B'.

条件词

$A \to B$ 用来表示命题'A 蕴涵 B'或'如果 A那么 B'. 现在,在这种情况下,规范的英语用法无助于构造一个真值表,我们所用的表是直觉上发生困难的一个共同根源. 它是

p	q	$p \to q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

困难在于当 A 为假时, 给 $A \to B$ 指派真值 T. 对于一些条件命题的考察, 其中前件是假的, 或许会使人们得出这样的结论, 即这命题根本就没有真值. 人们也可能获得这样的印象, 这样的命题是无用的或者是无意义的. 例如,命题:

如果草是红的,那么月亮由绿乳酪造成.

全然能说成是无意义的.

但是, 我们感兴趣的主要是数学中的演绎和证明方法. 在这种情况下, 一个条件命题 $A \to B$ 的意义在于, 它的真使得从 A 真可以推断 B 的真,而没有什么特别的要从 A 假推出. 一个很普通的数学命题就可以说明这一点. 例如,一个全称命题:

对于每个整数 n,如果 $n>2$ 那么 $n^2>4$.

这可以看作是关于整数的一个真命题. 因此,我们可以期待,命题

如果 $n>2$ 那么 $n^2>4$

是真的,而无需过问 n 取的什么值. n 的不同取值, 给出了对于'$n>2$' 和 '$n^2>4$' 的除去 T, F 外所有可能的真值组合, 取 n 为 3, -3, 1, 相应地会产生组合 TT, FT, FF, 这些按我们的真值表, 给这个蕴涵的真值为 T. 因此这个蕴涵在直觉上的真, 是真值表的合理性的某种辩护. 须记住的要点是, 仅当 A 真 B 假时, 命题 $A \to B$ 被看成是假的.

双条件词

我们用 $A\leftrightarrow B$ 来表示'当且仅当'，这里的情况是清楚的．当且仅当 A 和 B 有相同的真值（同真或同假）时，我们有 $A\leftrightarrow B$ 为真．因此真值表如下：

p	q	$p\leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

至此我们的联结词已全部列出．显然，任何长度的复合命题都可以用这些联结词从简单命题逐步构成．使用命题变元我们能够构成任意长度的命题形式．

定义 1·2

一个命题形式是一个含有命题变元和联结词的表达式，并且能用以下规则构成：

(i) 任何命题变元是一命题形式．

(ii) 如果 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 是命题形式，那么 $(\sim\mathscr{A})$，$(\mathscr{A}\wedge\mathscr{B})$，$(\mathscr{A}\vee\mathscr{B})$，$(\mathscr{A}\rightarrow\mathscr{B})$ 和 $(\mathscr{A}\leftrightarrow\mathscr{B})$ 是命题形式．

例 1·3

$((p\wedge q)\rightarrow(\sim(q\vee r)))$ 是一命题形式．根据 (i)，p，q，r 是命题形式．根据 (ii)，$(p\wedge q)$ 和 $(q\vee r)$ 是命题形式．根据 (ii)，$(\sim(q\vee r))$ 是命题形式．根据 (ii)，$((p\wedge q)\rightarrow(\sim(q\vee r)))$ 是命题形式．

▷ 这个定义是归纳定义的一个例子．它提供了一种模式，当我们详细描述形式系统时，它将再次出现．

联结词决定简单的真值函数．使用对这些联结词的真值表，我们能够为任何给定的命题形式构造一真值表．这是指的这样一个表，它对于出现在命题形式中命题变元的任意的真值指派，指出命题形式所取的真值．真值表是一个真值函数的图表表示．这样

每个命题形式给出一个真值函数，函数的自变元个数就是出现在命题形式中的命题变元的个数．让我们用几个例子加以说明：

例 1·4

(a) $((\sim p)\vee q)$．

首先构造真值表：

p	q	$\sim p$	$((\sim p)\vee q)$
T	T	F	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	T

可以看到相应于这个命题形式的真值函数，与$(p\rightarrow q)$所决定的真值函数是相同的．

(b) $(p\rightarrow(q\vee r))$．

真值表：

p	q	r	$(q\vee r)$	$(p\rightarrow(q\vee r))$
T	T	T	T	T
T	T	F	T	T
T	F	T	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	T	F	T	T
F	F	T	T	T
F	F	F	F	T

这里的真值函数是三元函数，因为有三个命题变元．表格的每一行给出了字母的真值取不同组合时真值函数的值．注意，任何含有三个命题变元的命题形式的真值表，都将有八行，如同上述表格的前三列书写的模式．p, q, r 名下的 T 和 F 的这种分组方法保证了每种可能的组合能且仅能出现一次．

▷一般情况下，对一个含有 n 个不同的命题变元的命题形式（n 为任意自然数），真值函数将是 n 元函数，真值表将有 2^n 行，相

应于命题变元真值的每一种可能的组合有一行. 注意，有 2^{2^n} 个不同的 n 元真值函数，它们对应于在有 2^n 行的真值表的最后一列中的 T 和 F 的 2^{2^n} 种可能的排列方式. 用 n 个命题变元可能构造的命题形式的数目显然是无限的，由此可知不同的命题形式可以对应于同一个真值函数.

为了进一步的研究，我们需要某些定义.

定义 1·5

(a) 一命题形式称为重言式，如果对于其中出现的命题变元的各种可能的真值指派，它总取真值为 T.

(b) 一命题形式称为矛盾式，如果对出现的命题变元的各种可能的真值指派，它总取真值为 F.

▷ 并非每个命题形式总属于这些范畴之一. 实际上，至今已考察过的，尚未有一个是这样的.

例 1·6

(a) $(p\vee\sim p)$是一重言式.

(b) $(p\wedge\sim p)$是一矛盾式.

(c) $(p\leftrightarrow(\sim(\sim p)))$是一重言式.

(d) $(((\sim p)\rightarrow q)\rightarrow(((\sim p)\rightarrow(\sim q))\rightarrow p))$是一重言式.

要证实一个给定的命题形式是否重言式或矛盾式，可用的方法是构造真值表.

▷ 从定义可知，一切含有 n 个命题变元的重言式给出同一个 n 元真值函数，即总是取值为 T 的. 对于矛盾式可以看到类似的情况.

定义 1·7

设$\mathscr{A}$和$\mathscr{B}$是命题形式，我们说 $\mathscr{A}$ 逻辑蕴涵 $\mathscr{B}$，如果$(\mathscr{A}\rightarrow\mathscr{B})$是一重言式. 我们说 $\mathscr{A}$ 逻辑等值 $\mathscr{B}$，如果$(\mathscr{A}\leftrightarrow\mathscr{B})$是一重言式.

例 1·8

(a) $(p\wedge q)$逻辑蕴涵 p.