有限元分析的概念和应用

R. D. 库克 著

科 学 出 版 社

内 容 简 介

本书详细地论述了有限元法的基本概念及其在固体力学中的具体应用，并着重介绍了如何在电子计算机上实现有限单元法的基本算法和技巧.

Robert D. Cook

CONCEPTS AND APPLICATIONS OF FINITE ELEMENT ANALYSIS

John Wiley, 1974

有限元分析的概念和应用

R. D. 库克 著

何 穷 程耿东 译

钟万勰 校

责任编辑 李成香

科学出版社出版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1981 年 9 月第 一 版 开本：787×1092 1/32

1981 年 9 月第一次印刷 印张：14 1/4

印数：0001—7,100 字数：321,000

统一书号：13031·1652

本社书号：2268·13—2

定价： 2.20 元

序　言

大约从 1956 年以来，有限元法已经有了极大的发展. 它开始作为应力分析的一个数值方法而出现，现在仍然最广泛地用于这一方面. 在许多其他领域，包括热传导、渗流、流体动力学以及电磁场，有限元法也已成为一种有用的方法. 数学家们现在已承认它是一个正式的研究领域.

本书是为应力分析的大学生而写的. 假定他们熟悉材料力学、用 Fortran 编制的计算机程序和矩阵代数. 如果他们熟悉数值分析方法和弹性力学基本理论，那末学习起来将更容易，但本书仍然提供了关于这些课题的预备知识. 因此，有了大学教育作准备知识就能读懂大部分内容.

下面我较详细地说明一下有利于学习这本书所需要的准备知识. 假定大学生希望利用有限元法去进行实际的应力分析和想要弄懂该方法为什么有那些特性，但对于数学证明和推导则并不十分关心. 他就应该熟悉静力学、动力学和材料力学这些大学课程. 他大体上要弄懂足够的计算机程序编制，以便能够使用子程序、磁盘外存这种辅助存储器以及 COMMON 语句和 EQUIVALENCE 语句. 由于计算机执行过程是按照人的指令的，但又不可能完全由不熟悉这种方法的人来做，所以需要具备编程序的能力. 大学生必须熟悉基本的矩阵运算：例如，必须掌握矩阵相乘、转置和微商；对求逆的意义必须清楚，但没有必要掌握求逆的计算过程. 虽然不是绝对必须引用矩阵记号，但不用矩阵记号描述该方法将是非常麻烦的. 此外，矩阵表述容易化成计算机的执行过程，对

于已研究过框架结构分析的矩阵方法的人来说，这一事实是熟悉的.

有关弹性理论、板壳理论、能量法和数值分析的知识也是希望具备的. 但是，真正需要的只是这些课题中最基本的概念. 我将在第一章和后面章节必要之处概述这些内容. 用到的高深概念极少. 在这种场合，读者可以把它们当作是正确的结果来接受，或者，自己可独立地去进一步研究该课题. 这和初等材料力学中的许多情况相类似：学生必须忽略某些影响，把很多解释当作是可信的，否则，为了弄清问题他就必须研究弹性理论.

我感到本书和有限元分析的关系大体相当于材料力学书和应力分析的关系. 换句话说，本书强调的是简单的、有用的并有物理意义的题目；它不是主要关心这个课题的数学基础或者它对更复杂问题的推广.

这个课题太大，甚至一个有注解的关于有限元理论和实践的文献目录本身就能构成一本书. 本书给出了很多参考文献，但没有打算把所有文献都开列出来. 下面是本书所讨论的和不讨论的某些题目：

- 我们的课题是分析，不是设计. 不介绍最优化和结构的修改处理.
- 本书叙述一般方法和连续体，而不介绍框架结构的特殊方法. 但以桁架和梁单元作为有益的例子.
- 详细讨论的单元是以假定位移场为基础的、在实践中性能较好的单元，它们不限于特殊的形状，不把应变和曲率取成节点自由度. 节点自由度是位移或位移和转角. 许多单元，包括某些好的单元没有讨论，但这些单元与较简单的单元的不同常常是由于代数上的细节而不是由于原理上的不同.

- 由于实用和教学上两方面的原因着重讨论了线性静力分析．动力和非线性问题处理得不够充分．
- 某些有意义的和重要的项目是作为家庭作业给出的．因此，对本书不作系统研究的读者可以看一下这些题目而不必去作演算．
- 如果有现成的、有益的、比较独立的且又不长的Fortran程序段，那么就给出．

为了防止本书篇幅过长，单元的详细讨论限定在假定位移场基础上．其他办法不太流行但有时是有价值的．例如杂交单元(17.1 节)对板的弯曲是特别好的．由于人们发现，以前认为是极好的 Q_{19} 单元(第十二章文献 [9])，如果它的长比宽大 1.5 倍，就不很精确．这一点的确如此．

现有的几本有限元教科书都强调基础理论，并给出当一个有效能的计算机程序用于实际问题时该方法如何应用的许多例子．在基础理论和产生计算机运行之间存在着从理论到实际的转换．这本书将"如何实现这一转换"这部分内容补充到现有的教科书中．我鼓励大学生去参考其他教科书，从不同的办法和其他观点获得益处．

在实践中，为了使有限元工作取得成效，很重要的是有个运行的计算机程序，分析者或者必须自己编程序或者必须与其他编程序的人密切配合工作．为了促使学生学习这一不可缺少的方面，我常常指定学生编写或修改一个程序，并用考题来验证其工作．这个项目对促进清楚地弄懂内容也是有益的，因为模糊的思想是不容易轻易从一个计算机得到一个准确的巧妙的答案的．

R. D. 库克

1973 年于威斯康星州 (Wisconsin)，麦地申 (Madison)

符　　号

{}	列向量，为了节省空间，系数可水平地写出，例如 $$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \equiv \{uv\}$$
[]	行向量，或长方矩阵，或正方矩阵。
⌈⌋	对角矩阵。
$[\ ]^T$，$\{\ \}^T$	矩阵或列向量的转置。
$[\ ]^{-1}$	方阵的逆阵。
$[\ ]^{-T}$	方阵转置的逆阵。 $$[\ ]^{-T} \equiv ([\ ]^{-1})^T \equiv ([\ ]^T)^{-1}$$
det[ ]	方阵的行列式。
·（圆点）	对时间的微商，例如， $$\dot{u} = du/dt, \quad \ddot{u} = d^2u/dt^2$$
,（逗点）	用在下标前边表示偏微商，例如 $$w_{,x} = \partial w/\partial x, \quad w_{,xy} = \partial^2 w/\partial x\partial y$$
—（横线）	在第十二章用做表示运动的幅度，例如 $$w = \bar{w}\sin\omega t$$
δQ	量值 Q 的虚（无限小）改变。
ΔQ	量值 Q 的小的但有限的改变。
d.o.f.	自由度。
E，ν	各向同性材料的弹性模量和泊松比。
λ	特征值，或荷载参数，它的临界（屈曲）值是特征值 λ_{cr}。
ρ	质量密度。
T	温度，从绝对零度计算。
t	构件厚度，或时间（第十二章）。
ω	自振频率，弧度/秒。

U, U_0	应变能，单位体积的应变能。
Π_p	总势能。
$\{f\}$	$\{f\}=\{uvw\}$，沿坐标方向一点的位移．注意，按着通常的习惯，在第七章 w 与 θ 方向相同，而在第八章 v 与 θ 方向相同，其中 θ 是环向位移．
$\{F\}$	$\{F\}=\{F_xF_yF_z\}$，单位体积上的体积力．
$\{\Phi\}$	$\{\Phi_x\Phi_y\Phi_z\}$，单位面积上的表面力．
$\{d\}$, $\{D\}$	分别为单元和结构的节点自由度．
$\{r\}$, $\{R\}$	分别相应于 $\{d\}$ 和 $\{D\}$ 的作用到节点上的广义力．
$\{\bar{r}\}$	由节点作用到单元上的力，$\{\bar{r}\}=-\{r\}$．
$\{P\}$	作用到结构节点上的集中荷载．如果体积力、热应变等全为零，那么 $\{R\}=\{P\}$．
$\{\sigma\}$, $\{\varepsilon\}$	工程应力和应变，见 1.2 节和 1.3 节．
$\{\sigma_0\}$, $\{\varepsilon_0\}$	初始应力和应变，见 1.2 节和 1.3 节．
$[E]$	弹性应力-应变关系；对于 $\{\varepsilon_0\}=0$ 有 $\{\sigma\}=[E]\{\varepsilon\}$．
$[N]$	形函数矩阵，$\{f\}=[N]\{d\}$．
$[B]$	应变-位移矩阵，$\{\varepsilon\}=[B]\{d\}$．
$[DA]$	在假定位移场中，将位移 $\{d\}$ 和广义坐标(幅度) $\{a\}$ 联系起来的矩阵，$\{d\}=[DA]\{a\}$(见 4.2 节)。
$[k]$, $[K]$	分别为单元和结构刚度矩阵．
$[k_\sigma]$, $[K_\sigma]$	分别为单元和结构初始应力刚度矩阵。
$[J]$, $[J^*]$	雅可比矩阵和它的逆阵，$[J^*]\equiv[J]^{-1}$．
$[m]$, $[M]$	分别为单元和结构的质量阵．
$[T]$	坐标变换矩阵，带下标或不带下标(见第十一章)。
U_L, $[K_L]$	由应变-位移关系线性部分产生的应变能和结构刚度矩阵．在第十四章下标 L 是用来区别由非线性项引起的量 U_{NL} 和 $[K_{NL}]$．
$[I]$	单位矩阵(在对角线上元素全是 1，其余全为零)。
$\left\{\dfrac{\partial \Pi_p}{\partial a}\right\}$	表示向量

$$\left\{\frac{\partial \Pi_p}{\partial a_1}\ \frac{\partial \Pi_p}{\partial a_2}\ \cdots\ \frac{\partial \Pi_p}{\partial a_n}\right\}$$

其中 Π_p 是参数 a_1 到 a_n 的标量函数.

不常用的表示符号和上述符号的修改（例如，用加上下标来修改）在用到它们的地方再定义.

目　　录

第一章　基本预备知识

1.1　有 限 单 元 法

为了求得图 1.1.1a 的结构的应力和位移就需要对此结构进行分析，虽然这一结构是矩形断面悬臂梁，但是由于梁太短不能用梁的理论．弹性理论的方法是把问题表示为偏微分方程．这些方程的解就给出了应力分析问题的精确解．但是荷载和支承条件使得求解这个问题实际上很困难．

每当出现一个新问题时，工程师不能花很多时间去解关于弹性力学的偏微分方程．如果花一定力量可以得到好的近似解，他们就心满意足了．求近似解常常是利用具有有限自由度的结构来代替连续体．使用弹性杆系组成的格子就是这个方法的一种[1]（参见图 1.1.1b）．如果这些杆件的弹性性质规定得合适，骨架的位移将十分接近于原结构的位移．当位移已知后，可用 1.2 节中描述的关系来计算应变和应力．这里的自由度是杆件彼此连接之处的节点位移．搞这种“格架模型”是为了可以利用成熟的分析刚架结构方法．

有限元法利用一种替代结构，这种替代结构的一些部分在某种意义上是原结构的一些块．因此，在图 1.1.1c 中每一矩形区是一块平的板．网格线只是各个区的外部轮廓而不是刚架杆件．直观上我们可以期望，当划分变细时替代结构更加真实地模拟原来的结构．如果我们遵循在第四章中所讨论的规则，那么确是如此．我们的替代结构是一个有限元结构，每一个分开的区域是一个有限单元．各单元间彼此联接之处

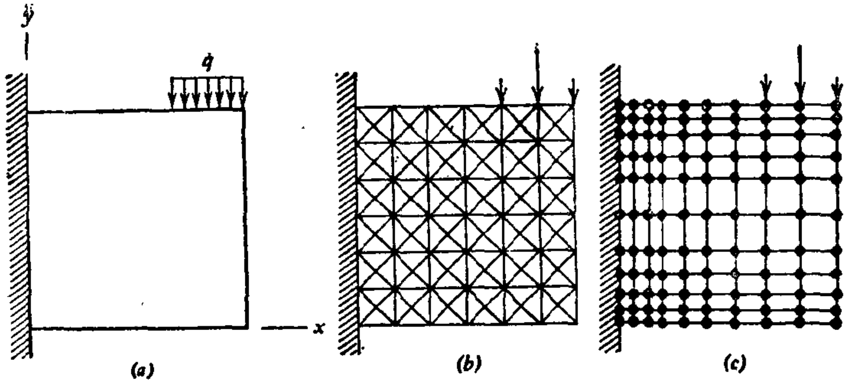

图 1.1.1.(*a*) 在平面内荷载作用下的平板.
(*b*) 构造模型. (*c*) 有限元模型.

的点称为**节点**,在图 1.1.1*c* 中用黑点标明.

一个有限单元**不能**简单地就看成是实际结构的一片. 也许是受到图 1.1.1.*c* 的启发, 我们假定很多小的矩形板在它们的角点用铰连在一起. 当加上荷载后,可以料想靠近角点的畸变会比别处都大,单元的边界会变成曲的,在某些单元之间会出现裂缝. 很清楚,这种性状不代表实际结构. 因此,为了使得单元形态的描写和我们想模拟的结构形态相一致, 必须排除某些单元畸变,而必须允许另一些单元畸变. 这一想法迫使我们在正确表示单元性质时采取稍微理论一些的观点. 物理的直观虽然有用, 也许是最根本的, 但只有它还是不够的.

对每一单元,可以写出如下形式的方程:

$$
\begin{aligned}
k_{11}d_1 + k_{12}d_2 + \cdots + k_{1n}d_n &= \bar{r}_1 \\
k_{21}d_1 + k_{22}d_2 + \cdots + k_{2n}d_n &= \bar{r}_2 \\
\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad & \vdots \quad\ \ \vdots \\
k_{n1}d_1 + k_{n2}d_2 + \cdots + k_{nn}d_n &= \bar{r}_n
\end{aligned}
\tag{1.1.1}
$$

其中 n 是每个单元的自由度数. 每一个 d_i 是一个节点位移, $\bar{r}_i$ 是相应于 d_i 的节点力. 系数 k_{ij} 称为**刚度系数**. 线性弹簧

是单自由度的一个例子，为了使弹簧伸长 d 单位需要力 $\bar{r}=kd$. 如合并成矩阵形式，方程 (1.1.1) 是

$$[k]\{d\}=\{\bar{r}\} \tag{1.1.2}$$

其中 $[k]$ 称为单元刚度矩阵，$\{d\}$ 为单元节点位移向量，$\{\bar{r}\}$ 为单元节点荷载向量.

为了说清 $[k]$ 的意义，我们来看一个例子(在第二章有更仔细的解释). 考虑一根梁(图 1.1.2a). 每端有一节点，单元自由度由两个位移和两个转角组成. 方程 (1.1.2) 成为

$$\underset{4\times4}{[k]}\{v_1\ \theta_1\ v_2\ \theta_2\}=\{\bar{r}\} \tag{1.1.3}$$

对图 1.1.2b 的位移图形，$\{d\}=\{1,0,0,0\}$，$\{\bar{r}\}$ 就等于 $[k]$ 的第一列. 这样，一般说来，$[k]$ 的第 i 列表示当 $d_i=1$，而 $\{d\}$ 的其它分量为零时，为了保持静力平衡所必须加在单元上的力. 虽然如此，这种描述并未告诉我们首先如何形成 $[k]$. 在第四章至第十章中用了很多篇幅叙述不同类型单元的适当的公式.

如图 1.1.1c 的有限元结构是把元件单元拼装而成的(在第二章中讨论拼装). 求得类似于方程 (1.1.2) 的方程为

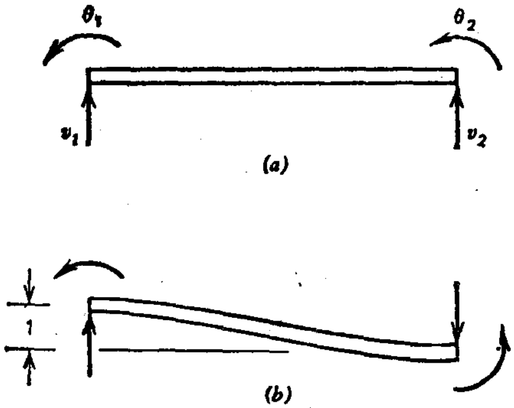

图 1.1.2. (a) 梁单元. (b) 对于 $v_1=1$, $v_2=\theta_1=\theta_2=0$ 所要求的力.