高等学校适用教材

高等数学

唐宗贤　主编

上册

机械工业出版社

高等学校适用教材

高 等 数 学

上 册

主　编　唐宗贤
副主编　陈一鸣　高　岩　赵晓知
编　者　唐宗贤　陈一鸣　高　岩
　　　　赵晓知　王启明　李敏静
主　审　陈国良

机械工业出版社

（京）新登字054号

本书是根据国家教委工科数学课程指导委员会编制的《高等数学课程教学基本要求》而编写的教材。

全书共分上、下两册。上册共有四篇：函数、极限、连续；一元函数微分学（导数与微分、导数应用与中值定理）；一元函数积分学（不定积分、定积分、定积分的应用与广义积分）；空间解析几何与向量代数。每章后面都有习题、习题答案，在书末有积分表和常用的曲线。

本书具有理论严谨、语言通俗、说理浅显、叙述详尽等特点，并配有较多的例题和课后习题，便于学生自学。

本书可作为高等工科院校教材，也可作为工程技术人员自学用书或参考书。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学　上册/唐宗贤主编.-北京：机械工业出版社，1994.12

高等学校适用教材

ISBN 7-111-04377-4

Ⅰ.高…　Ⅱ.唐…　Ⅲ.高等数学-高等学校-教材
Ⅳ.013

中国版本图书馆CIP数据核字（94）第11579号

出 版 人　马九荣（北京市百万庄南街1号　邮政编码100037）
责任编辑：张一萍　版式设计：李松山　责任校对：贾立萍
封面设计：郭景云　责任印制：侯新民
北京昌平环球印刷厂印刷・新华书店北京发行所发行
1994年12月第1版・1994年12月第1次印刷
787mm×1092mm1/32・16.6/8印张・369千字
0 001—3 000册
定价：14.00元

前　言

本书是根据国家教委工科数学课程指导委员会编制的《高等数学课程基本要求》编写的，编者先后两次在两个年级的高等数学课程教学中试用过，收到了良好的教学效果。编者在听取了校内外各方面宝贵意见的基础上,反复修改讲稿，形成了这本教材。

本教材的突出特点是：在内容选取上重点突出、难点明确，在概念的传授上理论严谨、深入浅出、层次清楚、语言通俗易懂。本书各章节都有较多的例题，以便教师选用，也便于学生自学。在每章后面都配有足够量的习题，习题分（一）、（二）、（三）三部分，其中部分（一）是为学生复习概念准备的；部分（二）可作为教师留给学生作业时选用；部分（三）是具有提高性质的习题，可作为教师上习题课选用及课后留给学生的习题。

本书共分上、下两册。上册内容包括：函数、极限与连续；一元函数微分学；一元函数积分学；空间解析几何与向量代数。下册内容包括：多元函数微分学；多元函数积分学；无穷级数；微分方程。

本书可作为高等工科院校高等数学课程教材和教学参考书。对于报考工科硕士研究生的学生，也是一本较好的复习参考书。

本书上册由唐宗贤任主编，陈一鸣、高岩、赵晓知任副主编；本书下册由陈一鸣任主编，赵晓知、王宝文、谭忠富

任副主编。本书上册的编者有唐宗贤、陈一鸣、高岩、赵晓知、王启明、李敏静等。

本书上册由陈国良副教授主审，下册由唐宗贤副教授主审。在本书的编写过程中，还得到了燕山大学数学教研室田乃硕教授和其他老师的热情帮助和具体指导。在此，我们表示衷心的感谢。

由于编者的水平所限，时间仓促，因而在书中一定有很多缺点和不足之处，甚至可能出现错误，希望使用本教材的教师和学生给予批评指正。

编者

1994年3月

目　录

第一篇　函数　极限　连续

第一章　函　　数

函数是微积分学研究的对象，是高等数学中最重要的基本概念之一。所谓函数关系就是变量之间的依赖关系。在这一章中，我们在中学已学知识的基础上，进一步研究函数概念，总结中学里已经学过的一些函数，并介绍函数的简单性质。

第一节　常量与变量

一、常量与变量

自然界的现象无一不在变化之中，在研究过程中我们经常会遇到许多量，例如面积、体积、长度、时间、速度、温度等等。这些量一般可以分为两类，一类是在研究过程中保持不变的数值，称为常量；另一类在研究过程中可以取不同数值，称为变量。常量通常用a、b、c、α、β等表示，变量用x、y、z、u、v等字母表示。例如，研究圆的面积A与半径r的关系时，圆面积A和半径r看作变量，而圆周率π看作常量。又如，在研究自由落体运动时，路程s和时间t看作变量，而重力加速度g则看作常量。

值得注意的是，一个量是常量或变量不是一成不变的，是有条件的，这要看所研究的具体问题而定。例如，速度在匀速运动中是常量，而在匀加速运动中是变量。

二、区间

我们研究变量，就是要研究变量的变化范围，称之为变域。变域一般表现为一个区间，所谓区间就是介于两个实数a、b之间的一切实数，在数轴上就是从a到b的线段，a与b称为区间的端点。当$a<b$时，a称为左端点，b称为右端点。

区间可以分为以下几种：

1）闭区间　包括a和b两个端点在内的一切实数，记作$[a,b]$，即$[a, b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$。

2）开区间　不包括a和b两个端点的一切实数，记作(a, b)，即$(a, b)=\{x|a<x<b\}$。

3）半开半闭区间　只包括一个端点在内的一切实数，记作$[a, b)$或$(a, b]$，即$[a, b)=\{x|a\leqslant x<b\}$或$(a, b]=\{x|a<x\leqslant b\}$。

除上述有限区间外，还有下列无限区间：

4）小于c的一切实数，记作$(-\infty, c)$，即$(-\infty, c)=\{x|x<c\}$。

5）大于c的一切实数，记作$(c, +\infty)$，即$(c, +\infty)=\{x|x>c\}$。

6）全体实数，记作$(-\infty, +\infty)$，即$(-\infty, +\infty)=\{x|-\infty<x<+\infty\}$。

读者不难把无限区间$[c, +\infty)$和$(-\infty, c]$的定义表述出来。

三、邻域

设a和δ是两个实数，且$\delta>0$，称开区间$(a-\delta, a+\delta)$为点a的δ邻域，a叫邻域的中心，δ叫半径。用不等式表示，点a的δ邻域为集合$\{x|\ |x-a|<\delta\}$。有时需要考虑把中心去掉的邻域，称之为开心邻域，即$\{x|\ 0<|x-a|<\delta\}$。

第二节 函数概念

一、举例

在同一个问题的研究中，往往会同时遇到多个变量，这些变量并不是孤立变化的，而是彼此之间有一定的制约和依存关系，我们称其为函数关系。下面先考虑几个具体的例子。

例1 自由落体运动。设由$t=0$s开始经过t(s)后，落下的距离为s(m)，如果不计空气的阻力，则s与t之间有如下依存关系

$$s=\frac{1}{2}gt^2$$

式中 $g=9.8\text{m/s}^2$。

设物体从开始到着地所需时间为t_1(s)，则变量t的变化范围为$0\leqslant t\leqslant t_1$。当$t$在这个范围内每取一个值时，都可以从依存关系确定$s$的一个唯一的对应值。例如

$$t=1\text{s时}，\qquad s=\frac{1}{2}g\times 1^2=4.9\text{m}$$

$$t=2\text{s时}，\qquad s=\frac{1}{2}g\times 2^2=19.6\text{m}$$

例2 金属棒受热后要伸长，根据实验的结果，棒长L与温度t℃之间有如下的依存关系$L=L_0(1+\alpha t)$其中L_0是0℃时的棒长，α是一个常数，称为“线胀系数”，它的值随着金属材料不同而不同。在t可以取值的范围内任取一值时，由依存关系可求出L的唯一的一个对应值。

在以上的两例中，变量之间的依存关系都由一个确定的公式给出。应当指出，变量之间的依存关系并不一定由公式给出，下面两例则说明依存关系也可以由表格和图象给出。

例3 下面一张表格记录了某河流在40年内的平均月流

量q (10^8m^3) 和时间t (月) 之间的依存关系。

t (月)	1	2	3	4	5	6
平均月流量 $q(10^8m^3)$	0.39	0.30	0.75	0.44	0.95	0.72
t (月)	7	8	9	10	11	12
平均月流量 $q(10^8m^3)$	4.3	4.4	1.8	1.0	0.72	0.50

由表可见，当月份t每取一个值时，月流量q就由表可确定唯一的对应值。

例4 图1-1是某气象站自动温度记录仪描出的某一天气温变化曲线，它给出了时间t和气温t_1之间的依存关系。

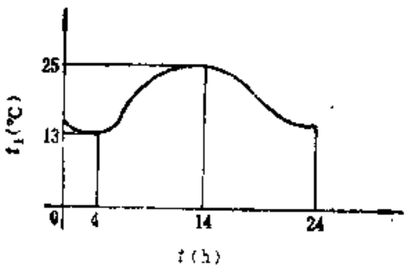

图 1-1

时间t的变化区间是$0\leqslant t\leqslant 24h$，当$t$在这个范围内每取一个值时，由曲线可唯一确定温度$t_1$(℃)的一个对应值。例如$t=14h$，$t_1=25$℃，这是一天的最高气温。

由以上各例可以看到，虽然它们所描述的问题中所考虑的量实际意义不同，但它们都表达了两个变量之间存在着依存关系，这种依存关系给出了一种确定的对应法则，依着这个法则，当一个变量在其变化范围内任取一个值时，另一个变量就按对应法则有一个确定值与之对应，两个变量之间的这种对应关系就是函数关系的实质。下面给出函数概念的定义。

二、函数概念

定义 设有两个变量x和y，当变量x在给定的范围中每

取一个值时，变量y就按照某一确定的对应法则有一个确定值与之对应，则称y是x的函数，记作$y=f(x)$，其中x叫自变量，y叫因变量。自变量x的取值范围称为函数的定义域，记作D_f。

当x取值$x_0\in D_f$时，y的对应值y_0称为函数$y=f(x)$在$x=x_0$的函数值，记作$f(x_0)$。当x取遍D_f的各个数值时，对应的函数值的全体所组成的数集，称为函数的值域，记作R_f，即

$$R_f=\{y\mid y=f(x),\ x\in D_f\}$$

函数$y=f(x)$的记号"f"也可以改用其他字母，例如"φ"、"F"等等。

在函数定义中主要有两个要素，函数的定义域和对应法则。关于对应法则，在定义中用$f(\quad)$表示。如果同时讨论几个不同的函数，应该用不同的字母表示不同的对应法则。例如，$F(\quad)$、$\varphi(\quad)$、$g(\quad)$等等。如果两个函数的定义域和对应法则相同，尽管它们用不同的字母表示，但它们仍表示是同一函数。关于定义域，如果考虑的是实际问题，应由问题的实际意义而定。如例1中的定义域是$D_f=[0,\ T]$，例3中的定义域是$D_f=\{1, 2, \cdots, 12\}$，例4中的定义域是$D_f=[0,\ 24]$。如果不考虑函数的实际意义，我们规定，函数的定义域是使得函数的算式有意义的自变量所能取的值的全体。例如，$y=\sqrt{1-x^2}$的定义域是$[-1,\ 1]$，$y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$的定义域是$(-1,\ 1)$，$y=\lg(x-1)$的定义域是$(1,\ +\infty)$。

最后指出几点：

1）根据函数的定义，对于定义域中的每一x值，函数仅

有一个确定的值与之对应。有时为了讨论问题方便，我们可以把定义放宽，如果对于定义域内的任一x值，函数的对应值有几个，这时称函数为多值函数。例如，圆的方程是$x^2+y^2=r^2$，对于$x\in(-r, r)$，可以确定y的对应值有两个，即$y=\pm\sqrt{r^2-x^2}$，这是多值函数。

在遇到多值函数时，我们总是分成几个单值函数，称为单值支。例如，$y=\pm\sqrt{r^2-x^2}$可以分为$y=\sqrt{r^2-x^2}$和$y=-\sqrt{r^2-x^2}$两个单值支。今后，如无特别声明，所讨论的函数均指单值函数。

2）函数的定义域不能是空集。

3）如果所研究的变量多于3个，则称所确定的函数为多元函数。关于多元函数，我们将在第十章中研究。

三、函数的表示法

由上面所举的四个例子可见，函数有三种表示法：

1）解析法　函数的对应法则用一个公式或叫解析式子表示。如例1中的$s=\frac{1}{2}gt^2$，例2中的$L=L_0(1+\alpha T)$。解析法的优点是便于作理论研究与数值计算，但不直观。

2）表格法　如例3中的函数。表格法的优点是便于直接查找计算，但不便于作理论研究，也不直观。

3）图示法　如例4中的图1-1。图示法的优点是直观，但不便于作理论研究。

在实际应用中，往往是三种方法配合使用。对于用公式法表示的函数，我们常作出它的图象。

四、函数的图象

设函数$y=f(x)$的定义域是D_f。对于任一$x\in D_f$，对应的函数值为y，这样就确定了平面上一点(x, y)。当x遍

取D_f的所有数值时，点(x, y)就确定了平面上一个集合C

$$C=\{(x, y) \mid y=f(x), x\in D_f\}$$

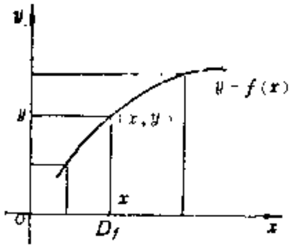

图 1-2

点集C称为函数$y=f(x)$的图象(图1-2)。

最后指出，有时由于变量之间的函数关系较为复杂，需要用几个式子来表示，这时不能把它们理解为几个函数，而应该理解为由几个式子表示的一个函数。例如，1g冰由-10℃上升到10℃，它所吸收的热量Q与温度t之间存在着函数关系。由于冰的比热容为0.5×4.18J/(g·K)，水的比热容为1×4.18J/(g·K)，1g0℃的冰变成0℃的水的溶解热为80×4.18J，所以Q与t之间的函数关系为

$$Q=\begin{cases}0.5\times4.18(t+10), & -10\leqslant t<0\\ 1\times4.18(t+85), & 0<t\leqslant10\end{cases}$$

上面的函数被称为分段函数。

下面举几个常见函数的例子。

例5 常数$y=c$可以看成是一个特殊的函数，定义域$D_f=(-\infty, +\infty)$，值域$R_f=\{c\}$，其图象是一条平行于x轴的直线(图1-3)。

例6 函数

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant0\\ -x, & x<0\end{cases}$$

的定义域$D_f=(-\infty, +\infty)$，值域$R_f=[0, +\infty)$，它的图象如图1-4所示。

例7 函数

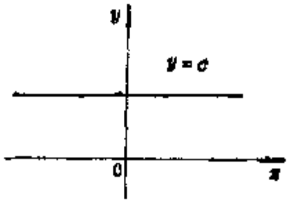

图 1-3

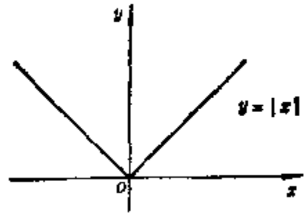

图 1-4

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & \text{当}x>0\text{时}\\ 0, & \text{当}x=0\text{时}\\ -1, & \text{当}x<0\text{时}\end{cases}$$

称为符号函数，它的定义域是$D_f=(-\infty,\ +\infty)$，值域是$R_f=\{-1,\ 0,\ 1\}$，其图象如图1-5所示。

例8 函数

$$y=[x]$$

称为取整函数，其中$[x]$表示不超过实数x的最大整数。显然$D_f=(-\infty,\ +\infty)$，$R_f=\{0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots\}$，其函数图象为阶梯曲线，如图1-6所示。

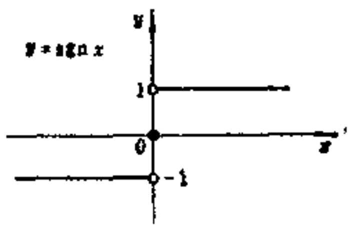

图 1-5

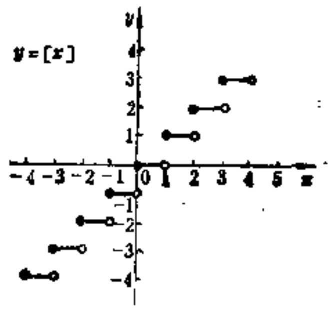

图 1-6

例9 求$y=\dfrac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+2}$的定义域。