

YOU XIAN YUAN  
CHENG XU  
SHE JI

[英] E.欣顿 D.R.J.欧文 著

有限元程序设计

新 时 代 出 版 社

# 有限元程序设计

〔英〕 E.欣顿 D.R.J.欧文 著

杨楚泉 姚玉珉 黄冠雄 译

张相麟 校

新时代出版社

## 内 容 简 介

本书详细介绍了经过精心选择的,三个专用有限元程序设计的全部过程。这些程序比较简明、清晰易懂,并且很实用。书中重点使用了抛物线等参元类型。另外,还给出了用来检查输入数据和修改差错的若干子例行程序;对理解、消化目前我国引进的SAP5程序有参考价值。

本书可供工程、应用力学、应用数学、计算机科学等专业的科技工作者和学生参考使用。

FINITE ELEMENT PROGRAMMING

E. Hinton D. R. J. Owen

Academic Press

A Subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich, Publishers 1977

\*

## 有限元程序设计

〔英〕E. 欣顿 D. R. J. 欧文 著

杨楚泉 姚玉珉 黄冠雄 译

张相麟 校

---

新时代出版社出版 新华书店北京发行所发行

国防工业出版社印刷厂印刷

850×1168毫米 32开本 10.125印张 253千字

1982年5月第1版 1982年5月北京第1次印刷

印数: 0,001—7,500册

---

统一书号: 15241·3

定价: 1.90元

## 译者的话

有限元法, 由于它具有作业通用性的特点, 统一了各类工程问题的计算方法, 因此, 几年来在计算机的配合下, 已经推广应用到几乎一切工程领域, 为我国社会主义建设做出了很大贡献。事实表明, 它已成为科学研究上升为生产力的一个突出例证。

目前, 在结构分析领域里, 有限元程序已经从针对特定结构的特定单元、进行单一分析的专用程序, 逐步发展到适合多种类型单元和多种类型分析的大型通用程序系统。这种程序系统大都使用 FORTRAN 语言和模块式结构。一九七九年我国引进的 SAP 5 程序就是目前国际上应用较为广泛的程序系统之一, 已经受到国内普遍重视和欢迎。

由于国内还没有详细讲解有限元程序设计的书籍, 为了配合 SAP 5 程序的学习和应用, 我们翻译了这本书, 相信能对广大工程技术人员了解有限元程序的设计有所帮助。

本书是作者根据多年在英国斯旺西对学生讲授有限元和从事课题研究的经验写成的。并由计算数学丛书主编 J. R. Whiteman 先生把它选为丛书的第一卷。

参加本书翻译工作的还有李忠鑫, 马德成, 王玉兰, 李增霞同志, 在此表示感谢。由于译者水平有限, 译文肯定会有不少缺点, 恳请读者批评指正。

## 编者的话

为了填补一方面存在于数值数学与理论应用数学之间的空白，另一方面存在于数值方法的工程应用与科学应用之间的空白，拟订了这套新的计算数学丛书。数值主题是丛书的中心内容，因此从数值分析到数值方法在工程上的应用都是合适的题目。这套丛书是由涉及计算数学及其应用的教科书、专著和会议录组成。当然，有些书会专门化得仅限于理论或仅限于实践，然而，全部重点是要文章易读，并想使丛书中所有的书都成为便于人们学习的工具书。

丛书第一卷应当是关于有限元的问题，这是适宜的。当前有限元法已经成为工程技术广泛应用的一种工具。同时，近十年来它已经引起了数学家们的极大注意，因此现在已经有了很多数学方面的理论。这样，有限元是兼有理论又有实际，就无怪乎成了丛书的灵魂。将要成为有限元用户所遇到的很大困难是，从一开始编制有限元法程序的明显复杂性。目前普遍认为，实现有限元的程序设计比起像有限差分法这种对等的方法的程序设计要复杂得多，甚至它已经阻止了人们转到有限元领域里。Hinton 和 Owen 博士在说明有限元程序设计的问题和易犯的错误中起到很大作用，他们清晰的介绍有助于学生们自己的应用。作者根据多年来在斯旺西对土木工程系学生讲授有限元法的经验和课题研究工作中的经验写成此书。

我们认为，该丛书，尤其是本书将会成为此类文献的一个重要补充。

J. R. 怀特曼  
布鲁内尔大学  
1977年1月

## 序 言

有限元法已经吸引着来自不同学科,包括工程技术、数学和计算机科学的各种理论工作者和实际工作者。现有有限元教科书强调的是有限元法的基本理论方面,以提出的各种应用去说明这种技术的重要实用性。然而,任何从事过有限元程序的人都能证明,在基本理论与一个工作的计算机代码程序之间有一个巨大的鸿沟。的确,某些有限元教科书,几乎是事后的想法,通常在附录中提出了有限元计算机程序,但没有一本教科书是专门讲述程序设计方面技术的。

考虑到这些情况,我们决定写一本详细描述三个特意编写的有限元程序的书,其基本目的是,使这些程序能够帮助读者克服从理论到程序之间这个令人讨厌的一步,从而使他能够在他自己的环境中针对自己的特殊应用来编制(或者至少要鉴别)程序。在程序编制中,重点放在简单、易懂和实用上,单元的形式始终只采用了一种,就是抛物线等参元。这个由曲边组成的,经反复验证的,好的单元可以使我们用以说明全部有限元计算机程序的特征,尤其是数值积分的作用。方程求解采用的是非常有效的波前解法。

本书在很大程度上要归功于做出卓越工作的 Bruce Irons,他不仅在有限元法上建立了许多分析工作的基础,而且还提出使该法成为一种实用工具所必需的程序设计方法。尤其是我们承认 Irons 教授是波前解法和抛物线等参元的创始人,他还使我们注意了有限元程序中差错诊断的重要性。

我们愿意利用这一机会向一些直接或间接对我们有所帮助的人表示感谢: O. C. Zienkiewicz 教授,他一年多来曾极大地激

励了我们对有限元法的兴趣；G. A. Fonder 博士，他帮助我们在波前解法上获得了新的前景，并大大有助于我们对第八章内容的描述；丛书主编 J. R. Whiteman 教授，他提出了很多有价值的意见、评述和批评；我们的同事和研究生们，依靠他们使这本书提出的观点得到了检验。最后还有 M. J. Davies 夫人对手稿的细致地打印，R. Edwards 先生对曲线和插图的准备以及 P. Ellison 先生对制作程序表提出的意见。

E. Hinton

D. R. J. Owen

斯旺西

1977 年 1 月

# 目 录

第一章 引言和理论 .....	1
1.1 引言 .....	1
1.2 一般方法和有限元的离散化 .....	5
1.3 本书的基本目的与范围 .....	7
1.4 抛物线等参元的应用 .....	11
1.5 有限元位移法 .....	11
1.6 有限元程序结构 .....	17
1.7 变量术语表 .....	22
1.8 程序的叙述方法 .....	23
参考文献 .....	24
第二章 单元的组装与刚度方程的解 .....	25
2.1 引言 .....	25
2.2 对一维轴向载荷构件的单元组装 .....	25
2.3 对二维等参元的单元组装 .....	28
2.4 以 FORTRAN 语言编写的单元组装——子例行程序 ASSEMB .....	29
2.5 方程的解 .....	35
2.6 对称矩阵与带状矩阵 .....	48
第三章 输入与输出 .....	51
3.1 引言 .....	52
3.2 输入数据 .....	52
3.3 控制数据 .....	53
3.4 几何数据 .....	56
3.5 边界条件 .....	58
3.6 材料性质 .....	60
3.7 子例行程序 INPUT .....	61
3.8 边中节点坐标值的产生 .....	65
3.9 子例行程序 NODEXY .....	65



3.10	子例行程序 GAUSSQ	67
3.11	输出的说明	68
3.12	自动数据准备和输出图形显示	68
	参考文献	69
<b>第四章 等参梁单元</b>		<b>70</b>
4.1	引言	71
4.2	单元的定义	72
4.3	雅可比矩阵	74
4.4	应变的定义	74
4.5	应力应变关系	75
4.6	刚度矩阵计算	75
4.7	一致节点力	76
4.8	单元应力合成	77
4.9	数值积分	77
4.10	子例行程序	79
<b>第五章 平面应力/应变的单元特性</b>		<b>101</b>
5.1	引言和基本理论	102
5.2	形状函数	104
5.3	子例行程序 SFR2	107
5.4	雅可比矩阵和笛卡尔形状函数的导数	109
5.5	子例行程序 JACOB2	110
5.6	应变矩阵—— <b>B</b>	114
5.7	子例行程序 BMATPS	116
5.8	弹性常数矩阵—— <b>D</b>	117
5.9	子例行程序 MODPS	118
5.10	应力矩阵 <b>S</b>	119
5.11	子例行程序 DBE	120
5.12	单元刚度矩阵	120
5.13	子例行程序 STIFPS	121
5.14	计算单元应力	126
5.15	子例行程序 STREPS	127
	参考文献	131
<b>第六章 应用于板弯曲的单元特性</b>		<b>132</b>

6.1	引言和基本理论 .....	133
6.2	形状函数及其笛卡尔导数 .....	137
6.3	应变矩阵—— $B$ .....	138
6.4	子例行程序 BMATPB .....	139
6.5	弹性刚度矩阵 $D$ .....	140
6.6	子例行程序 MODPB .....	141
6.7	应力矩阵 $DB$ .....	142
6.8	单元刚度矩阵 .....	143
6.9	子例行程序 STIFPB .....	143
6.10	计算单元应力的合成 .....	147
6.11	子例行程序 STREPB .....	147
	参考文献 .....	150
<b>第七章 载荷的等效节点描述 .....</b>		<b>151</b>
7.1	引言 .....	152
7.2	关于平面应力/应变状态的重力载荷 .....	154
7.3	关于平面应力/应变状态下, 作用在单 元边界单位长度上的法向和切向载荷 .....	158
7.4	在平面应力或平面应变条件下固体的热载荷 .....	165
7.5	节点载荷和载荷子例行程序的组装 .....	171
7.6	板弯曲状态的载荷数据 .....	174
	参考文献 .....	178
<b>第八章 方程求解子例行程序 .....</b>		<b>179</b>
8.1	引言 .....	180
8.2	波前法的一般说明 .....	180
8.3	求解例行程序的“预波前 (Pre-front)”段 .....	181
8.4	终点、活动变量和消去变量数组的系统阐述 .....	182
8.5	实际的组装与消去过程 .....	188
8.6	回代阶段 .....	197
8.7	方程重复求解的能力 .....	199
8.8	波前法的讨论 .....	200
8.9	波前解的子例行程序 .....	201
8.10	概述 .....	220

参考文献 .....	221
第九章 数据校对和差错诊断 .....	222
9.1 引言 .....	223
9.2 差错诊断子例行程序 CHECK1 .....	223
9.3 数据返回子例行程序 ECHO .....	226
9.4 差错诊断子例行程序 CHECK2 .....	227
9.5 差错诊断表 .....	233
9.6 实例 .....	235
参考文献 .....	242
第十章 程序结构和数值例题 .....	243
10.1 引言 .....	243
10.2 公共块的构成 .....	243
10.3 组装程序 .....	245
10.4 数值例题 .....	250
参考文献 .....	278
第十一章 讨论和展望 .....	279
11.1 引言 .....	279
11.2 列单元刚度公式 .....	280
11.3 多种载荷情形 .....	281
11.4 子结构 .....	281
11.5 约简了的方程的暂存器 .....	282
11.6 每个节点自由度的不同数目 .....	282
11.7 多种单元 .....	283
11.8 方程再解的能力 .....	284
11.9 非对称矩阵 .....	285
11.10 倾斜边界轴 .....	285
11.11 扇形对称 .....	287
11.12 三维实体和轴对称问题的应力分析 .....	288
11.13 动态维数和有关诊断的需要 .....	288
11.14 外部附加刚度 .....	289
11.15 应力计算平滑方法 .....	289
11.16 程序结构 .....	292

11.17 程序的进一步应用.....292

参考文献 .....293

附录 I 关于准备输入数据的说明 .....295

    A.1 梁程序 BEAM .....295

    A.2 平面应力/应变程序 PLANE .....296

    A.3 板弯曲程序 PLATE.....301

附录 II 变量名字汇编 .....305

# 第一章 引言和理论

## 1.1 引言

有限元法目前被牢固地建立为一种有广泛适用性的技术工具。它不再是研究工作者或专门学院的唯一的研究领域，现在它正被用在许多技术部门的设计上。有限元法的一个主要优点是统一了各类工程问题的求解方法。

这种方法，在它早期对应力分析问题的发展中，在很大程度上是依靠一种物理的解释，即结构被假定为仅在若干离散节点处，相联的单元组成。以后，在结构力学问题上的应用通过虚功原理和能量方法得出；于是这个方法被归纳出来，它的广泛的数学根据也得到认识。也已表明，有限元可应用于具有变分泛函的任何数学问题。最近，又以大家所熟知的经典的方法，称做“加权剩余法”，例如加辽金法、配置法和最小二乘逼近法等去研究有限元解法了。实际上这种方法现在已经广泛地被认为是在满足适当边界条件和初始条件下解偏微分方程组的一般数值方法了。

在工程技术、物理学和应用数学方面，可以看到有限元法的三个主要应用领域<sup>[1~4]</sup>，它们是：

**平衡问题** 在平衡问题中系统是不随时间变化的。这种问题的例子包括线弹性系统的应力分析、静电学、静磁学、稳态热传导和在多孔介质中的流体流动。其结构首先分为被称做单元并在其上的主要变量是用内插法求出的，不同的和互不重叠的区域。这些单元是以沿它们的边界的许多离散的称做节点的点联结起来的。图 1.1 表示一个工业用风扇的线弹性应力分析中应用的有限元模型，需要求出它的位移和应力分量。

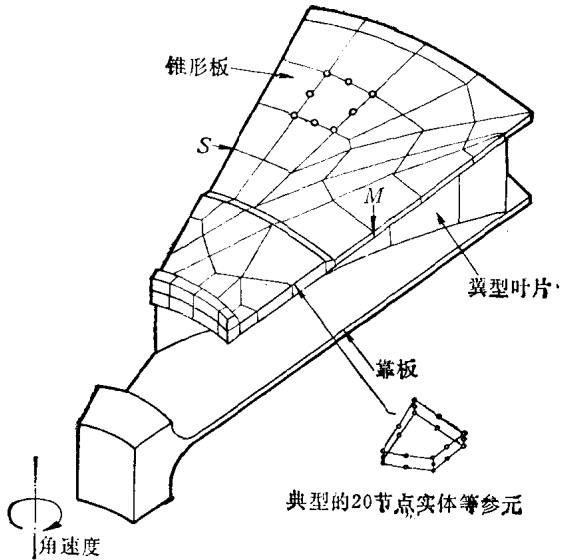


图1.1 一个扇形对称三维风扇的可重复的断面

这个三维问题是用 20 个节点的等参数“砖块”单元解出的,它的复杂的几何形状,是这种类型的问题必须应用有限元法的典型。

**本征值问题** 本征值问题是平衡问题的推广,在本征值问题中必须确定某些参数的特种值或临界值。结构的稳定性和线弹性系统自然频率的确定就是这些问题的例子。在振动问题的有限元解当中,每一种模态形状或本征向量都与特定的频率或本征值相联系。图 1.2 表示悬臂板的振动模态<sup>[5]</sup>。它是用四个三角形板弯曲单元算出的。

**传播问题** 它包括一些随时间而变的问题。流体动力学和弹性连续体的瞬时动态分析就是这类问题的两个例子。图 1.3 给出了北海有限元流体动力分析的结果<sup>[6]</sup>,在这个分析中寻求了水流速度分量的近似值。潮汐变化是用距平均海平面的高度和在相应边界上以正弦曲线摆动的相容速度来规定的。由泰晤士河和马斯河的流入亦是规定的。图 1.3 表示了特定时刻用矢量画出的

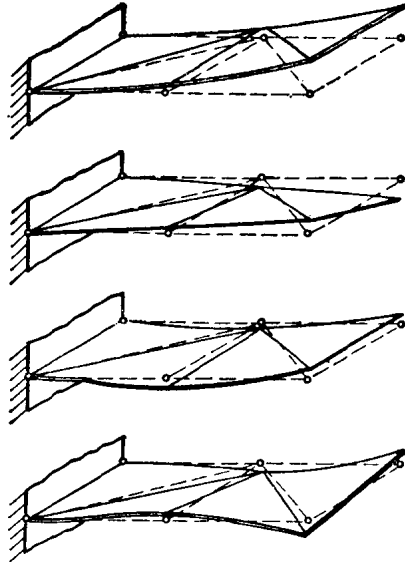


图1.2 一块悬臂板区分成四个三角形单元的振动；模态形状

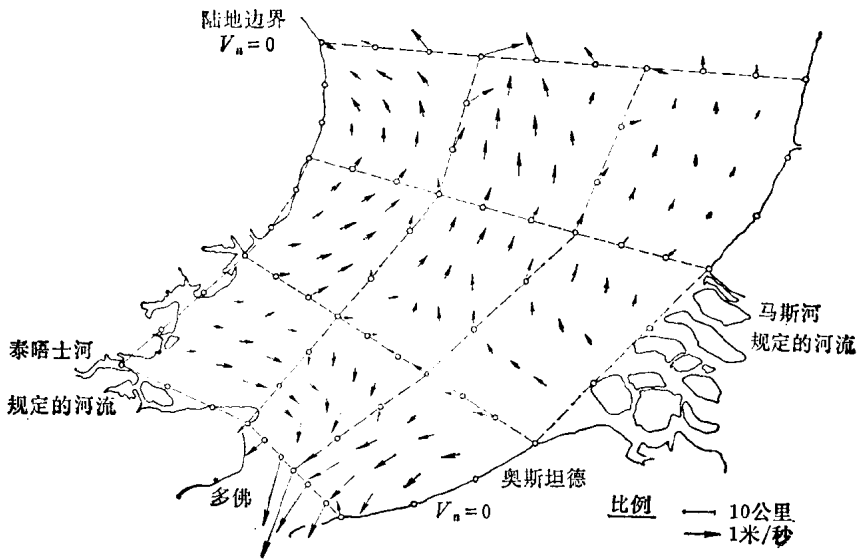


图1.3 北海的水流矢量图

水流速度图。

在这三个应用的领域中，有些问题会包含一些非线性性质，从而使分析复杂了。图 1.4 表示一个典型的非线性问题，它说明了一个带有齐平喷嘴的球形压力容器的弹塑性应力分析<sup>[7]</sup>。图 1.4 指出了容器的几何尺寸，并给出了焊缝填脚的角度。图中还表示了塑性屈服区随着压力增加的发展。

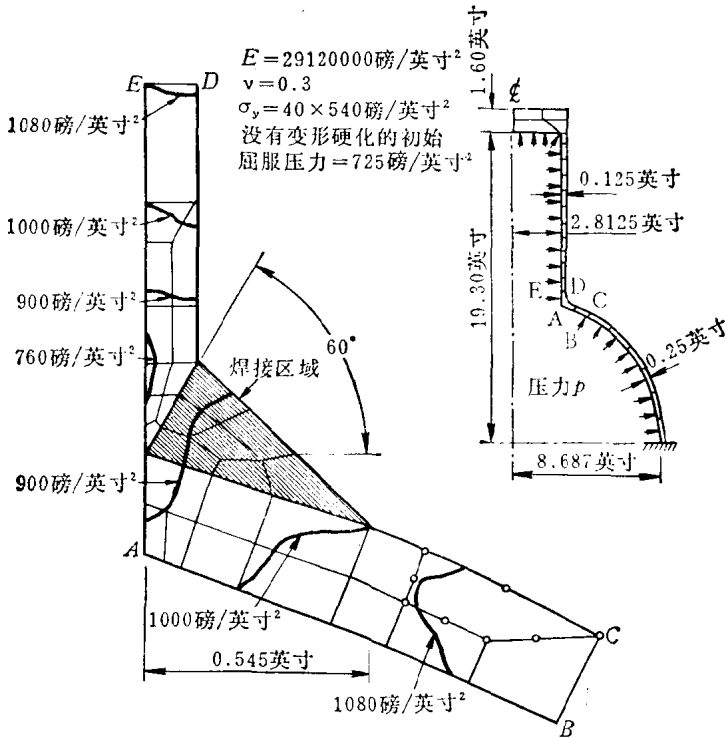


图 1.4 带有齐平喷嘴的钢制球形压力容器，运用等参元表示发展了塑性区的有限元法的理想化

有限元法成功地作为一个实际的设计辅助，是依赖于有一个有效率的，求解最后得到的线性或非线性联立方程组的手段。显然，计算机的存在对于它的成功是非常重要的。



磁芯存贮器的容量增加到目前的水平，已经可以轻松的处理多种多样的问题，而不再需要用复杂的数据处理技术了。然而辅助硬件设备的平行发展，如代替磁带系统的直接存取磁盘就可以允许求解一个新量级的题目了。举例来说，在近海结构的设计中，分析一个超过 10,000 个自由度的系统并不算罕见。继续发展的趋向也正在彻底改变着非线性应用的地位。

过去，受计算机成本的经济限制阻碍着这一技术的普遍应用，然而这个障碍正在很快被排除，而这类题目的有限元解，已经比较经济地为有选择的工业应用达到了可以被接受的地步。

从这些进展与将来在单元特性、方程解法等方面的提高，可以设想在将来的许多年内有限元法会在工程设计上起到重要的作用。

## 1.2 一般方法和有限元的离散化

在本书中，我们把注意力放在线性平衡问题有限元法的应用上，而且详细研究的也仅仅是结构分析有限元的位移法。不过，在各种线性平衡问题之间存在的基本相似性会反映在相应的有限元模型上。因此，可以从这个专门的，作为我们基础的平衡模型学到许多东西。尽管本征值和传播问题没有特别考虑到，但希望对于用有限元法求解这类问题感兴趣的读者仍能得到本书的有益启示。

为了定义各项术语，我们简要地回顾一下有限元法。在任何连续体中，实际的自由度数是无穷的，除非有一个封闭形式的解外，准确的分析（在所做的假定以内）是不可能的。就任何数值方法来说，打算取得一个近似的解，是假定连续体的行为能够用有限个未知量来表达的。像以前所提到的那样，有限元法是把连续体分成一系列的单元，这些单元是由有限数目的称做节点的点相联的，这个过程称做离散化。图 1.4 表示了一个典型剖分的例子。