H. 嘉当 等著

代数结构与拓扑结构

代数结构与拓扑结构

H. 嘉当　等著

刘应明　胡师度　译

江嘉禾　校

上海科学技术出版社

Structures Algébriques

et

Structures Topologiques

H. Cartan

L' Enseignement Mathématique, Genève

代数结构与拓扑结构

H. 嘉当　等著

刘应明　胡师度　译

江嘉禾　校

上海科学技术出版社出版
(上海瑞金二路450号)

新华书店上海发行所发行　　江苏溧水印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32　印张 7.75　字数 171 000
1988年2月第1版　1988年2月第1次印刷
印数 1—5,000

ISBN 7-5323-0086-2/O·4

定价: 2.50元

告 读 者

1956 年,法国数学会决定与公立学校数学教师联合会一起专为各级学校的数学教师组织几期讲座.

第一期的七个讲座(1956 年 2 月至 6 月)讨论代数结构;第二期的十个讲座(1956 年 11 月至 1957 年 6 月)讨论拓扑结构.

所有的讲座都是在巴黎索尔本大学的昂利-普昂卡雷学院进行的,众多的在职教师专心听讲,新教师与老同行又济济一堂. 讲演后往往有人提出问题进行争论,这里就不转述了.

这些讲演经各位作者本人撰写成文,分期发表于《数学教师联合会公报》,从而传达给全国各级学校的二千六百多名联合会成员. 就我们所知,有些讲稿还曾发表在比利时数学教师联合会的刊物《数学与教育》以及一份意大利的杂志上.

现将这些讲稿汇集成册,编作《数学教育专题论丛》第七卷,为没有得到这些刊物相应各期(有的已售缺)的读者提供便利;同时,这也体现了教育界的一项合作事业,它的意义是值得强调的.

其实,本书并非研究论著(优秀的论著已经问世). 不过是科普作品,因此注定是不痛不痒的. 更恰当地说,本书应视为学习和研究当代研究论著的一本入门书. 无论如何,本书将使读者向往了解近代数学各方面的内容,从而有助于他们的教改工作. 此外,组织这些讲座正是要实现这个目标. 讲授已经定型的学科的人与讲授正在成型的学科的人,这两者之间人们感到需要有这样的接触,这一点由于讲座的成功已

经得到证明.

研究的领域日益扩展,发现的成果日新月异,这也使从事初等教育的教员们不得不更新他们的理论知识. 学院中学到的学问应该定期地加以更新; 他们的教学本身应该利用科学的新成就: 今日须教今日的数学. 这样将使学生对于他们将来的学习或研究获得较好的预备知识.

这些讲座有助于形成一种经常性的教育体系, 以满足科学及教育本身的发展这两方面提出的要求. 人们正确地批评了一种只讲"职业诀窍", "成功之途"而无视科学进步的教育研究. 与之相反,这些讲座开辟了俯视当代科学景象的窗口,有可能使教育研究有一个飞跃的进展, 适应对科学教育法的大量需要.

瞻望未来,这项研究的前景应该说是乐观的. 在这些讲座进行期间, 各级现职教师都表现出一种令人十分满意的合作与尊重的气氛. 可以一眼看出,各学院的教授们真是尽了最大的努力,对于各位讲演者堪为楷模的全心全意的精神,我们谨致谢忱. 同时, 如果中学教师能够使他们的学生对于大学学习有较好的预备知识, 这将同样是对教授们的帮助. 至少,这种合作正好反映了科学教学高度的一致性;科学教学应当采用多种多样适当的方法, 使学生一直到大学学习阶段都保持着每个儿童身上几乎总要表现出来的巨大而惊人的创造才能.

由于各位讲演者与听众的热心,本书才得以问世,我们谨致谢意. «数学教育»杂志一贯热心于通过教育促进科学的发展,对于本书的出版给予了赞助,使本书具有明显的国际影响.

G. 硕克 (索尔本大学教授)

G. 瓦卢辛斯基 (数学教师联合会主席)

目　录

第一编 代数结构

第一讲 代数结构

H. Cartan (索尔本大学教授)

1. 引　　言

近几十年来，我们目睹到代数在数学中名副其实地到处渗透．特别是二十年代以后，在E.诺特的推动下，数学家日益清楚地意识到代数的基本概念在数学的几乎所有分支中所起的作用；更确切地说，例如，他们意识到有可能把纯代数中某些多少算是深刻的定理用来考虑分析问题．诚然，这种应用本身并非今日方有(尤其应当提到上世纪末李氏理论的发展)；特别新颖的东西才能引起人们的注意．

随着目前数学的这种代数化，任何研究人员再也不能无视近世代数这一必不可少的工具了．反之，代数也从这种形势下得益不浅，因为拓扑与分析不断向代数提出一些新问题，产生了几十年前也许几乎无法想象的进展．

中学的数学教学，至少在最后一个学年，理应受到这个演变的影响．如果说要重视新观点，问题无疑不在修订教学大纲，而在如何阐述古典理论．这无疑就是法国数学会发起组织这一系列讲座的理由．

然而代数是什么呢？用几句话给出代数的定义，使得代数与其他数学分枝的界限一目了然，这是不容易的．诚然，在

科学发展的每个时期，每位数学家对什么是代数与什么不是代数的看法是足够清楚的．但是任何明确的定义在以后科学的发展中都有变得陈旧或过于狭隘的危险．事实上，不可能预先给代数划定什么不可逾越的范围(任何科学分支的情形也是如此)，因为无法预见到在探索过程中会显现出哪些新领域．

粗略地说，可以认为代数是研究对一个或几个集合的元素施行的某些运算，而不考虑这些元素本身的性质．对于给了某些运算的一个集合，一切所能阐述的内容也完全适用于与它同构的任何其他集合(后文中要介绍同构的概念)．对代数的这种理解可能一个世纪以来都占上风，然而最近的进展无疑必将使代数扩大其过于狭窄的范围，因而上述理解今日可能已经过时了．这里，我们只限于用几个例子来说明我所谓的经典的代数概念，至于开创了目前某些进展的那些新观点，过几十年再让别人向读者说明吧！

2. 运算的概念

从算术起就有了运算的概念．运算是一个法则：对于两个元素 a 与 b，相应地给出一个元素 c(元素 c 有时称为 a 与 b 的和，有时称为它们的积，有时还有另外的名称)．其实，这里不过就是一个函数的概念：给了三个集合 A、B 与 C，考虑由元素 $a\in A$ 与元素 $b\in B$ 形成的偶对 (a, b) 的集合，叫做 A 与 B 的积集合，记作 $A\times B$；于是，一个运算就是定义在集合 $A\times B$ 上并在集合 C 中取值的函数．我们也说，运算是把 $A\times B$ 映入 C 的一个映射．

一个重要情形是这三个集合 A、B 与 C 相同的情形，此

时，考虑的是一个映射 $f: A\times A\to A$，这样的函数叫做内合成法则．如果只假定 $B=C$，则得到所谓的外合成法则：即是把 $A\times B$ 映入 B 的函数．此时，每个元素 $a\in A$ 确定一个把 B 映入 B 的映射，即是与 b 相应的是 $f(a, b)$．不过，把 B 映入 B 的映射也称作 B 的一个变换，于是外合成法则相应于 A 的每个元素给出 B 的一个变换；集合 A 就叫做算子域，并说 A 作用于 B.

下面举几个合成法则的例子．整数加法：与一对整数对应的是一个整数．整数乘法也一样．这些都是整数集合中的内合成法则．分数、实数、复数的加法与乘法，以及一个变量或多个变量的多项式的加法与乘法，也都是内合成法则．在初等几何中有位移概念．我们知道相继施行位移 a 与位移 b 就得到一个位移 c，有时称为 a 与 b 的积(或合成)．这样，相应于一对位移 (a, b) 我们得到一个位移 c，这是位移集合中的内合成法则.

下面是另外一些例子．设 X 与 Y 是同一集合 E 的两个子集，其交 $X\cap Y$ 是 E 中同时属于 X 与 Y 的那些元素组成，其并 $X\cup Y$ 是 E 中至少属于集合 X 与 Y 之一的那些元素组成．在 E 的所有子集构成的集合 A 中，对于偶对 (X, Y) 相应地给出交 $X\cap Y$ 的法则是一个内合成法则；同样，对于 (X, Y) 相应地给出并 $X\cup Y$ 的法则也是 A 中的内合成法则.

按照另一种思路，我们也会考虑两个整数 a 与 b 以及它们的最大公约数 $d(a, b)$；映射 $(a, b)\to d(a, b)$ 是整数集中的内合成法则．最小公倍数情形也是一样.

再给出字的例子．设有集合 E，所谓“字”是指 E 中元素组成的有限序列 uvwxy，这些元素可以不同，也可以相同．其

中还有一个"空字",即是空序列定义的字. 给了两个字 uvwxy 与 pqrs, 相继写下这两个字可确定出一个新字 uvwxyp-qrs. 这是 E 的元素生成的字集 A 中的一个内合成法则. 如果将字 uvw 与空字合成, 仍得到同一个字 uvw.

上述所有例子都是内合成法则的例子. 现在举两个外合成法则的例子. 考虑初等几何中的平面(或空间), 取定一点 O. 对每个实数 t, 我们使以 O 为中心, 以 t 为比例常数的位似与之相应; 这是一个变换. 这里我们得到一个外合成法则, 其算子域 A 是实数 t 的集合, 相应的集合 B 是几何学中的平面(或空间).

再考虑空间的"图形"(例如三角形). 一个位移将图形变成图形. 于是若取位移集合为 A, 空间图形的集合为 B, 就得到一个外合成法则, 其算子域是位移集合.

以后我们几乎只讨论内合成法则.

3. 内合成法则的各种性质

结合性 一个合成法则, 比如记作乘法 (ab 表示 a 与 b 的合成), 称为结合的, 如果对任意的 a、b 与 c, 有 $(ab)c=a(bc)$.

在上面例子中我们给出的所有内合成法则都是结合的. 容易给出非结合法则的例子: 对一对实数 (a, b), 我们使其和之半 $(a+b)/2$ 与之相应; 立即可以验明这个法则不是结合的.

如果一个法则是结合的, 可以定义任何有限多个元素的序列 $a_1, \cdots, a_n$ 的合成, 并证明有关结合性的一个一般定理; 例如, 有

$$(ab)(cdef)g=(abc)(de)(fg).$$

交换性 一个内法则(为确定计记作乘法)称为*交换的*,如果对任意 a 与 b, 有 $ab=ba$. 在上述例子中,实数、复数以及多项式的加法与乘法都是交换法则. 同样,集合的交运算与并运算也是交换的;求两个整数的最大公约数或最小公倍数的法则也是交换的. 与此相反,几何中位移的合成不是交换的;"字"的合成也不是交换的.

这样,就存在结合的但不是交换的法则. 同样也有一些交换的但不是结合的法则,例如求两实数 a 与 b 之和之半的法则.

一个法则如果既交换又结合,则可以定义任意元素组(自然是有限组——译注)的合成,而不必计及它们的次序.

中性元 给了一个内法则(为确定计记作乘法),元素 e 称为*中性元*,若对每个元素 a, 有 $ae=ea=a$. 这种元素不一定存在,但*若存在必唯一*,因为若 e 与 e' 是两个中性元,则有 $e=ee'=e'$.

逆元 考虑一个有中性元 e 的内法则. 我们说 a 与 b 互为*逆元*,若 $ab=ba=e$.

如果 a 至少有一个逆元,并且法则是结合的,那么 a 的逆元是唯一的;因为,若 b 与 b' 都是 a 的逆元,则有

$$b=be=b(ab')=(ba)b'=eb'=b.$$

如果考虑的法则表作加法(通常只是在法则是交换的时候才行),其中性元若存在,一般记作 0(零). 我们有

$$a+0=0+a=a.$$

此时,"逆元"改称为"反元":若 $a+b=0$, 则称 a 与 b 互为反元.

4. 由一个或多个合成法则定义的代数结构

设 E 是一集合. 给了一个或多个合成法则, 就在 E 上定义了一个代数结构. 所有的代数结构(不论定义在哪个集合上), 只要定义它们的法则数目一样, 满足同样一些明确罗列的条件, 就都用同一个名称. 用几个例子来说明这点.

群 集合 E 上的群构造是由一个合成法则定义的, 这个法则必须满足下列条件(或"公理"):

公理 1 法则是结合的;

公理 2 存在中性元;

公理 3 每个元素具有逆元.

具有这样一个合成法则的集合 E 就称为*群*.

例如, 整数(正、负及零)的加法是一个群法则. 实数或复数的加法也是群法则; 具有前述合成法则的位移集合是一个群. 非零实数或非零复数的乘法是一个群法则. 反之, 正整数的乘法法则不是群法则, 因为一个正整数一般没有逆元. 集合的交运算法则或并运算法则也都不是群法则. 同样, "字"的合成法则不是群法则.

一个群称为*交换群*(或*阿伯尔群*), 若其合成法则是交换的.

环 一个集合 A 上的环构造是由两个合成法则定义的, 分别称为*加法*与*乘法*; 这两个法则必须满足下列公理:

公理 1 加法是一个阿伯尔群法则(其中性元记作 0).

公理 2 乘法是结合, 有中性元(称作单位元), 记为 1; 约定 $1 \neq 0$.

公理 3 乘法对于加法是分配的:

$$a(b+c)=(ab)+(ac),\ (b+c)a=(ba)+(ca).$$

易见，每个元素与 0 的积等于 0；因而 0 没有乘法逆元.

一个环称为交换环，若其乘法是交换的.

环的例子：全体整数；实数或复数集；实系数或复系数的多项式.（其加法与乘法运算如平常所定义——译注.）

体　一个体是一个环 A 并满足下面补充条件：每个非零元素都有乘法逆元素；这也就是说，A 的非零元素构成一个*乘法群*.

例子　整数集不是一个体，多项式全体不构成一个体；有理数集，实数集以及复数集都是体.

当然，存在各种各样的群，环与体. 伽罗华已经确定了所有的*有限体*，亦即具有有限多个元素的体. 最简单的是只有两个元素 0 与 1 的体，其加法与乘法是显然的（特别有 $1+1=0$）. 对每个素数 p 与每个整数指数 $f\geqslant 1$，存在恰好有 p^f 个元素的体，并且这样的体是唯一的. 记整数 p^f 为 n，体中每个元素 x 满足方程 $x^n-x=0$（这就给出一个例子，说明存在系数不全为零的多项式，对变量所有的值均为零；这个多项式是 n 次的，并且变量仅能取 n 个不同的值，因为体中仅有 n 个元素）. 如果整数 n 不是 p^f 形状的数，则不存在由 n 个元素数组成的体.

5. 同构概念

方才说存在唯一一个具有 p^f 个元素的体. 这不完全对. 正确的说法是：如果两个体有同样多个元素，则它们是同构的. 就是说在这两个体的元素之间存在一个一一对应，并且这个对应保持加法与乘法. 一般，对各有其代数结构的两个

集合 E 与 E'，可以建立同构的概念；例如，两个群之间的同构是这两个群的元素之间的一一对应，并保持每个群的合成法则；例如，指数函数 $f(x)=a^x$（这里 a 是不等于 1 的正常数）就是把实数加法群映成正实数乘法群的同构，因为 $f(x+y)=f(x)f(y)$．又两个环 A 与 A' 之间也有同构概念：即是一个一一对应，保持加法与乘法，还使 A 与 A' 的单位元彼此对应．

代数对象实际上只研究到同构为止．这正是实质所在，因为我们只关心所研究运算的性质．如果有两位数学家谈到整数环，我们并不问他们是否谈的是同样的对象，因为从他们对整数环研究出来的那些性质推知，任何两个环如果具有这些性质就必然同构．

6．从已有的代数对象构造新的代数对象：多项式环的例子

设给了一个交换环 A（例如实数体或整数环，等等）．我们来定义一个新环，称为字母 X 的（形式）多项式环．它的元素用符号 $\sum_{n\geq 0} a_n X^n$ 表示，这里诸 a_n 是 A 中元素，只有有限多个不为零；记号 X^n 暂时没有任何内容，只是一个形式记法，因此，定义多项式的，不过就是一序列"系数"a_0，a_1，…，a_n，…，罢了，这些"系数"除有限多个外全为零．在多项式集合中定义加法如次：多项式 $\sum_{n\geq 0} a_n X^n$ 与多项式 $\sum_{n\geq 0} b_n X^n$ 的"和"定义为多项式 $\sum_{n\geq 0}(a_n+b_n)X^n$，其系数是相应系数之和 a_n+b_n．立刻可见这个加法是交换的，结合的，具有零元 0（所有系数全为零的多项式），并且每个多项式都具有"反元"；换句话说，多项式集构成**加法群**．

p 次单项式是指一个多项式 $\sum_{n\geq 0} a_n X^n$，使得 $n \neq p$ 时所有系数 a_n 皆为零；这样的单项式可以简记作 $a_p X^p$. 我们看到每个多项式 $\sum_{n\geq 0} a_n X^n$ 是其各次单项式 $a_n X^n$ 的和. 这就反过来说明了所用记法的理由.

多项式的乘法定义如次：首先定义单项式 $a_p X^p$ 与单项式 $b_q X^q$ 的积为单项式 $(a_p b_q) X^{p+q}$，其次数 $p+q$ 是两个单项式的次数之和，其系数 $a_p b_q$ 是系数 a_p 与 b_q 的积. 为了定义两个多项式 $\sum a_n X^n$ 与 $\sum b_n X^n$ 的积，先把每个多项式分解为它的不同次数的单项式，然后对这些单项式两两求积再相加；这给出下列公式：积是多项式 $\sum c_n X^n$，这里 $c_n = \sum_{p=0}^{n} a_p b_{n-p}$.

可以验明，字母 X 的多项式集 $A[X]$，照上面那样定义加法与乘法后，成为一个交换环，其单位元是系为 1 的零次单项式. 这样就定义了字母 X 的多项式环（系数在交换环 A 中）.

X 纯粹是一个符号. 但我们可以用"值"来替代它. 给了一个元素 $x \in A$，约定：对每个单项式 $a_n X^n$，我们相应地有 A 的元素 $a_n x^n$（系数 a_n 与 x 的 n 次幂的积）；然后，对多项式 $\sum a_n X^n$ 也相应地有这些 $a_n x^n$ 的和. 这样就得到A的一个元素，称为这个多项式在 X 取值 x 时的"值". 当 x 在 A 中变化时，一个多项式的"值"就是 x 的一个函数，其值属于 A. 这样，每个多项式都定义一个函数，但一开始就应该提防将形式多项式与它所确定的函数混为一谈.

现取定元素 $\alpha \in A$，对每个多项式 $\sum a_n X^n$，我们有与它相应的值 $\sum a_n \alpha^n \in A$. 这就得到一个映射 f，把环 $A[x]$ 映入环 A；这个映射使得对应于两个多项式之和的值，就是这两个多项

式之值的和，而对应于两个多项式之积的值，则是这两个多项式之值的积．我们定义形式多项式的加法与乘法的方式，正是为了保证映射 f 具有上述性质．于是，设 u 与 v 为两个多项式，则有

$$f(u+v)=f(u)+f(v),\ f(uv)=f(u)f(v),$$
$$f(1)=1.$$

只要两个环 B 和 A 以及把 B 映入 A 的映射 f 满足这些条件，就说 f 是把 B 映入 A 的一个同态．同态的概念可以推广至其他种种代数结构中；粗略地说，同态是一个保持合成法则的映射．

再来讨论多项式，我们可以将前面所述推广．设 A' 是包含 A 的一个环；可以将字母 X 换成属于 A'(不再只属于 A)的值 x；这时，每个多项式 $\sum a_nX^n$ 取值 $\sum a_nx^n$，这个值是 A' 的元素．只要 x 与 A 的元素可交换，即对于每个 $a\in A$，有 $ax=xa$，上述做法仍然定义了一个把环 $A[x]$ 映入环 A' 的同态．例子：设 A 是实数体，E 是三维空间中由原点 O 发出的向量构成的向量空间．把 E 映入 E 的线性映射构成一个环(我们知道如何定义两个线性映射的和，相继施行两个线性映射就得到它们的积)；这个环 A' 包含了以 0 为中心的全体位似构成的环 A，环 A 可以与纯量体(即实数体——译者注)等同．于是，如果在实系数多项式 $\sum a_nX^n$ 中，将 X 换成把 E 映入 E 的线性映射 x，就给出了 $\sum a_nx^n$，这仍然是一个把 E 映入 E 的线性映射．这个法则使得与每个多项式对应的是一个线性映射，这对研究向量空间的线性变换十分重要．这个例子使我们看到从形式多项式概念得到的好处，即是可以将“变量” X 换成系数环的元素以外的东西．另外一个例子是把 X 换成线性微分方程理论中讲的那种微分算子．

7. 商 结 构

从已有代数结构造出新的代数结构时(例如,从整数环造出有理数体或从实数体造出复数体),常常需要等价关系的概念. 集合 E 的元素 x 与 y 之间的关系 $R(x, y)$ 称为一个等价关系,如果

1° $R(x, x)$ 总是真的("反身律");

2° $R(x, y)$ 蕴涵 $R(y, x)$("对称律");

3° $R(x, y)$ 与 $R(y, z)$ 蕴涵 $R(x, z)$("传递律").

下面是代数中出现的等价关系的若干例子:

1) 设 m 为已知整数,两个整数 x 与 y 之差 $x-y$"被 m 整除"这个关系是整数 x 与 y 之间的等价关系.

2) 更一般地,设 G 为乘法群(元素 x 的逆元记作 x^{-1}),H 为 G 的子群,即是含单位元 e 的一个子集,使得 $x\in H$,与 $y\in H$ 蕴涵 $x^{-1}y\in H$. 对于 G 的元素 x 与 y,关系 $x^{-1}y\in H$ 是 G 中的一个等价关系. 例 1 的情形就是:G 是整数加法群,H 是 m 的倍数构成的子群(这时用加号表示合成法则).

3) 设 (a, b),(a', b') 是两对整数,满足 $b\neq 0$, $b'\neq 0$. 若 $ab'=a'b$,则称它们等价. 需要验明,这的确是一个等价关系. 易见这个关系是反身的与对称的,于是只要说明它是传递的即可. 这有三对整数 (a, b),(a', b') 与 (a'', b''),满足 $ab'=a'b$, $a'b''=a''b'$,问题是要证明 $ab''=a''b$. 将式子 $ab'=a'b$ 两边乘以 b'',注意乘法的结合性与交换性,有 $ab'b''=a'bb''=ba'b''$,据 $a'b''=a''b'$,前式后一元素等于 $ba''b'$,于是 $ab'b''=ba''b'$,从而 $b'(ab''-a''b)=0$;因为 $b'\neq 0$,而一个乘积只有当一个因子为零时才能为零,所以得到 $ab''=a''b$.