矩阵分析

杨克劭　包学游　编

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1m}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2m}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nm}(t) \end{bmatrix}$$

哈尔滨工业大学出版社

矩 阵 分 析

杨克劭 包学游 编

哈尔滨工业大学出版社

(黑)新登字第 4 号

内 容 提 要

本书是在已修《线性代数》课程的基础上，以工程和科技中常用的矩阵理论为选材标准而编写的。内容包括：线性空间与线性映射、酉空间与欧氏空间、矩阵的分解、向量与矩阵的范数、矩阵分析、矩阵函数和广义逆矩阵。书中各章均配有一定数量的习题。

本书为工科硕士研究生教材，也可供工程技术人员和科技工作者参考。

矩 阵 分 析

杨克劭 包学游 编

哈尔滨工业大学出版社出版
新 华 书 店首都发行所发行
黑 龙 江龙科印刷厂印刷

*

开本 787×1092 1/32 印张 8 字数 182 千字
1988 年 4 月第 1 版 1995 年 4 月第 2 次印刷
印数 3001—8000

ISBN 7-5603-0048-0/O·12 定价 7.80 元

前　　言

系统工程和自动控制已深入到现代工程技术的各个领域，使工程界对矩阵理论和知识的需求十分迫切。为了适应工科硕士研究生的教学需要，1982年由杨克劭编写了教材《矩阵分析》。在此基础上，几经修改和充实，重新编写了此书，使得教材更为恰当，结构更为合理。本书不仅注意到工程技术人员对矩阵理论的实际要求和学生的学时限制（三学分），也对数学本身的严谨性、系统性作了适当的考虑。

本书稿承蒙哈尔滨师范大学周汝奇副教授和张之凰副教授审阅，提出了很多宝贵意见和建议，并得到哈尔滨工业大学研究生院的大力支持，在此一并深表感谢。

限于编者学识水平，书中难免存在不当之处，热忱欢迎批评指正。

编　　者

1986年6月于哈尔滨工业大学

目　　录

第一章　线性空间与线性映射

线性空间是研究物理、力学中满足叠加原理的系统的数学模型，是对各种具体的线性运算封闭系统的共性加以概括、抽象而形成的新概念。线性映射则是用来研究线性空间之间关系的主要工具。因此，本章所讨论的内容既是已有线性代数知识的深化，也是本书的基础。本章主要介绍线性空间、线性子空间、线性映射和线性变换等基本概念和它们的性质。

§1.1　群、环、域的概念

为了今后能准确地叙述和理解有关的基本概念，学好矩阵分析，首先引入代数基本概念：群、环、域。

定义 1　设 G 为非空集，若在 G 中定义了代数运算"$\circ$"，且满足下列条件时，称 G 关于代数运算"$\circ$"构成一个**群**(group)，简称群：

a)对任意的 $\alpha,\beta\in G$，有唯一确定的元素 $\alpha\circ\beta\in G$(自闭性、唯一性)；

b)$\alpha\circ(\beta\circ\gamma)=(\alpha\circ\beta)\circ\gamma\quad\forall\,\alpha,\beta,\gamma\in G$(结合律)；

c)G 中存在元素 e，使得

$$\alpha\circ e=e\circ\alpha=\alpha\quad\forall\,\alpha\in G$$

成立，并称 e 为 G 关于运算"$\circ$"的**单位元**；

d)对每个 $\alpha\in G$，存在 $\alpha^{-1}\in G$，使得

$$\alpha\circ\alpha^{-1}=\alpha^{-1}\circ\alpha=e$$

成立，并称 α^{-1} 为元素 α 关于运算"$\circ$"的**逆元素**。

如果群 G 中的元素关于运算"$\circ$"还满足交换律，即

$$\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha \quad \forall\ \alpha, \beta \in G$$

则称 G 为**交换群**或**阿贝尔**(Abel)**群**。

当群 G 是交换群，运算"$\circ$"称为"加法"时，则称群 G 为**加法群**，通常用"+"代替"$\circ$"，并把加法单位元 e 称为**零元素**，记为"θ"，以别于数 0。称元素 α 的加法逆元素 α^{-1} 为 α 的**负元素**，记为"$-\alpha$"；若运算"$\circ$"称为"乘法"时，则称 G 为**乘法群**，通常用"$\cdot$"代替"$\circ$"，或在元素之间不写符号(例如 $\alpha\cdot\beta=\alpha\beta$)。

例 1 实数集 R 关于实数的加法运算构成加法交换群；在 R 中所有非零数之集，关于实数的乘法运算构成乘法交换群。

元素为实数的 $n\times n$ 阶矩阵的集合，记为 $R^{n\times n}$，关于矩阵的加法运算构成加法交换群，此时零元素为零矩阵 $O_{n\times n}$，矩阵 $A_{n\times n}$ 的负元素为 $-A$；在 $R^{n\times n}$ 中可逆矩阵组成的子集合，关于矩阵的乘法运算构成乘法群，此时单位元为 n 阶单位矩阵 I_n，可逆矩阵 A 的逆元素为其逆矩阵 A^{-1}。但此乘法群不是乘法交换群。

定义 2 在一个集合 $\tilde{R}$[①] 中定义两种代数运算"+"、"$\cdot$"，且满足下列条件时，称 $\tilde{R}$ 关于这两种运算构成**环**(ring)：

a) $\tilde{R}$ 关于运算"+"构成加法交换群；

b) 对任意的 $\alpha,\beta\in\tilde{R}$ 有唯一确定的 $\alpha\cdot\beta\in\tilde{R}$(自闭性，唯

---

① 这里在 R 的上方加"~"，是由于习惯上已用 R 表示实数集，而又用 ring 的第一个字母的大写来代表环，故依此相区别。

一性)；

$c)\widetilde{R}$ 关于乘法运算"·"结合律成立，即

$$\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)=(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma \quad \forall\alpha,\beta,\gamma\in\widetilde{R}$$

$d)\widetilde{R}$ 关于加法运算"+"与乘法运算"·"满足两个分配律，即

$$\alpha\cdot(\beta+\gamma)=\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma \quad \forall\alpha,\beta,\gamma\in\widetilde{R}$$

$$(\alpha+\beta)\cdot\gamma=\alpha\cdot\gamma+\beta\cdot\gamma \quad \forall\alpha,\beta,\gamma\in\widetilde{R}$$

如果在环 $\widetilde{R}$ 中的乘法运算"·"适合交换律，即

$$\alpha\cdot\beta=\beta\cdot\alpha \qquad \forall\alpha,\beta\in\widetilde{R}$$

则称环 $\widetilde{R}$ 为**交换环**。

例 2 全体整数构成的集合

$$Z=\{0,\pm1,\pm2,\cdots\}$$

关于实数的加法与乘法构成交换环；

数域 F 上的所有多项式的集合

$$P[x]=\{\sum_{i=0}^{m}a_ix^i \mid a_i\in F, m=0,1,2,\cdots\}$$

关于多项式的加法与乘法构成交换环；

设 $\widetilde{R}$ 为交换环，则

$$\widetilde{R}^{n\times n}=\{A=(a_{ij})\mid a_{ij}\in\widetilde{R}, i,j\in\underline{n}\}^{①}$$

关于矩阵的加法运算与乘法运算构成环。由于矩阵乘法是不能交换的，虽然 $\widetilde{R}$ 是交换环，$\widetilde{R}^{n\times n}$ 也只能是环而不能是交换环。

定义 3 一个至少包含两个元素的集合 F 满足下列条件时，称 F 为**域**(field)。

$a)F$ 是交换环；

---

① 记号 $i\in\underline{n}$ 表示 $i=1,2,\cdots,n$。

b)F 中所有不等于 θ 的元素对乘法构成交换群。

例 3 全体有理数集 Q、实数集 R、复数集 C 关于数的加法运算与乘法运算构成域。

例 4 设 p 为质数(即只能被 1 和它自身整除的大于 1 的自然数),在有限集

$$GF(p) = \{0,1,2,\cdots,p-1\}$$

中分别定义运算"$\circ$"、"$\cdot$"如下:

$$\alpha \circ \beta \triangleq \gamma_1 \qquad \forall\, \alpha,\beta \in GF(p)$$

$$\alpha \cdot \beta \triangleq \gamma_2 \qquad \forall\, \alpha,\beta \in GF(p)$$

其中 $\gamma_1 \equiv \alpha+\beta \pmod{p}$,$\gamma_2 \equiv \alpha\beta \pmod{p}$,$0 \leqslant \gamma_1, \gamma_2 < p$,即 $\alpha \circ \beta$ 为 $\alpha+\beta$ 被 p 除的余数,$\alpha \cdot \beta$ 为 $\alpha\beta$ 被 p 除的余数,不难证明 $GF(p)$ 是域。

特别,在 $GF(3)$ 上的 mod3 加法运算和乘法运算如下:

加　法

	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

乘　法

	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

由此可见,$GF(3)$ 关于 mod3 加法运算和乘法运算构成域。

例 5 $\tilde{R}^{n\times n}$ 是环但不是交换环,故不是域。

注意:每一个数学概念都有其适用范围,如讨论一个矩阵是否可逆,必须明确其元素取自什么集合,如设 $\tilde{R}$ 是交换环

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \tilde{R}^{2\times 2}$$

$$\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \in \tilde{R}$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} \in \tilde{R}^{2\times 2}$$

容易验证

$$A\widetilde{A} = \widetilde{A}A = \Delta I_2$$

当且仅当 Δ 是 $\widetilde{R}$ 的可逆元时，即 $\Delta^{-1}\in\widetilde{R}$ 时，A 的逆矩阵 A^{-1} 才可由

$$A^{-1} = \Delta^{-1}\widetilde{A} \in \widetilde{R}^{2\times 2}$$

给出，亦即 A 是 $\widetilde{R}^{2\times 2}$中可逆元的充要条件为 Δ 是 $\widetilde{R}$ 中的可逆元。

一般，若 $A\in\widetilde{R}^{n\times n}$为可逆元，则称 A 为**么模阵**。

设 F 为一个域，若 $A\in F^{n\times n}$，A 可逆的充要条件为 $\det A\neq 0$，此时称 A 为**正则阵**。

例如

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

作为 $R^{2\times 2}$的元素，由于 $\det A=2$，故 A 是正则阵，且

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

但将 A 作为 $Z^{2\times 2}$的元素，由于 2 在 Z 中无乘法逆元素，故 A 不是么模阵。又设

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in Z^{2\times 2}$$

$\det B=1$，且

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \in Z^{2\times 2}$$

故 B 既是 $Z^{2\times 2}$中的么模阵，也是 $R^{2\times 2}$中的正则阵。因此，“A 可逆的充要条件为 $\det A\neq 0$”，这只对域上的矩阵适用。由此可见，明确一个数学概念的适用范围是十分重要的。

§1.2 线性空间的定义与简单性质

在 n 维向量空间

$$R^n=\left\{x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}\middle| x_i\in R, i\in \underline{n}\right\}$$

或

$$C^n=\left\{z=\begin{bmatrix}z_1\\z_2\\\vdots\\z_n\end{bmatrix}\middle| z_i\in C, i\in \underline{n}\right\}$$

中，关于向量的加法运算，数与向量的乘法运算所具有的性质，对于矩阵集合 $R^{m\times n}$ 或 $C^{m\times n}$、多项式集合 $P[x]$、齐次线性方程组 $A_{m\times n}x=\theta$ 的解集等的元素的加法与数乘运算，也具有相应的性质。因此，有必要对具有此类特性的集合的共性作进一步研究。为此我们引进线性空间的概念，并在本节讨论它的一些简单性质。

定义 1 当非空集合 V 与域 F 满足下列条件时，称 V 为域 F 上的**线性空间或向量空间**(并记为 $V(F)$)。

a)在 V 中定义了一个加法运算，记为"+"，即对任意的 $x,y\in V$，有唯一确定的 $x+y\in V$，且 V 关于这个加法运算构成加法群；

b)在域 F 与集合 V 之间，定义一个数乘运算，对任意的 $\alpha\in F$，$x\in V$，有唯一确定的

$$\alpha x\in V$$

且适合

①$\alpha(\beta \boldsymbol{x})=(\alpha\beta)\boldsymbol{x} \quad \forall\ \alpha,\beta\in F,\forall\ \boldsymbol{x}\in V$

②对于域 F 的单位元 1，有

$$1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x} \qquad \forall\ \boldsymbol{x}\in V$$

③下列分配律成立：

$$\alpha(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=\alpha\boldsymbol{x}+\alpha\boldsymbol{y} \qquad \forall\ \alpha\in F,\forall\ \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in V$$

$$(\alpha+\beta)\boldsymbol{x}=\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{x} \qquad \forall\ \alpha、\beta\in F,\forall\ \boldsymbol{x}\in V$$

例 1 按通常向量的加法与数乘运算，R^n 是实数域 R 上的线性空间；C^n 是复数域 C 上的线性空间；

$R^{n\times n}$ 关于矩阵的加法运算，域 R 中的数与 $R^{n\times n}$ 中矩阵的数乘运算，构成线性空间；

数域 F 上所有多项式的集合 $P[x]$，关于多项式的加法运算，数域 F 中的数与 $P[x]$ 中的多项式的数乘运算，构成线性空间；

区间 $[a,b]$ 上的连续函数集合（a、b 是两个固定的实数），关于函数的加法运算，域 R 上的数与函数的乘法运算，构成线性空间。

例 2 设正实数集

$$R^+=\{a\,|\,a>0,a\in R\}$$

对 R^+ 规定加法运算“$+$”：

$$a+b\triangleq ab \qquad \forall\ a,b\in R^+ \tag{1}$$

另外再规定 R 中的数与 R^+ 中的数的数乘运算“$\cdot$”：

$$\lambda\cdot\alpha\triangleq\alpha^\lambda \qquad \forall\ \lambda\in R,\forall\ \alpha\in R^+ \tag{2}$$

那么集合 R^+ 是域 R 上的线性空间。

证　由(1)，因为 $a>0,b>0$，故 $ab>0$，所以 $a+b=ab\in R^+$，且

$$a+b=ab=ba=b+a$$

$$(a+b)+c=ab+c=abc=a+(b+c)$$

$$\forall a,b,c \in R^+$$

在 R^+ 中存在唯一的“+”运算零元素 1，使得

$$a + 1 = 1 + a = 1a = a \quad \forall a \in R^+$$

又由于 $a \in R^+$ 时，$a > 0$，故 $\frac{1}{a} > 0$，$\frac{1}{a} \in R^+$，且

$$a + \frac{1}{a} = \frac{1}{a} + a = \frac{1}{a}a = 1 \quad \forall a \in R^+$$

即 R^+ 构成加群；

其次，由于 $a \in R^+$，显然

$$a^\lambda > 0 \qquad \forall \lambda \in R, \forall a \in R^+$$

故 $\lambda \cdot a = a^\lambda \in R^+$，且唯一，又

$$\lambda \cdot (\mu \cdot a) = (a^\mu)^\lambda = a^{\lambda\mu} = (\lambda\mu) \cdot a$$

$$\forall \lambda,\mu \in R, \forall a \in R^+$$

取 $1 \in R$，有

$$1 \cdot a = a^1 = a \qquad \forall a \in R^+$$

且

$$\lambda \cdot (a + b) = \lambda \cdot (ab) = (ab)^\lambda = a^\lambda b^\lambda = \lambda \cdot a + \lambda \cdot b$$

$$\forall \lambda \in R, \forall a,b \in R^+$$

$$(\lambda + \mu) \cdot a = a^{\lambda+\mu} = a^\lambda a^\mu = a^\lambda + a^\mu = \lambda \cdot a + \mu \cdot a$$

$$\forall \lambda,\mu \in R, \forall a \in R^+$$

所以 R^+ 是域 R 上的线性空间（对于所规定的加法运算与数乘运算）。

注意：现行空间 $V(F)$ 与域 F 有密切关系，例如，R^n 是域 R 上的线性空间，但 R^n 不是域 C 上的线性空间。

由于线性空间 $V(F)$ 也可称为“向量空间”，故 $V(F)$ 的元素也可称为“向量”，当然，与 R^n 或 C^n 的元素相比，这里的“向量”是广义的向量，今后不再说明，而应作这样的理解。$x \in$

$V(F)$的**逆元素**$-x$也可称为x的**逆向量**，并可由此定义$V(F)$中向量之间的"减法运算"为

$$x - y \triangleq x + (-y) \qquad \forall\, x, y \in V(F)$$

线性空间具有以下简单性质：

性质 1 线性空间$V(F)$的零元素唯一；逆元素唯一。

事实上，设θ_1、θ_2均为$V(F)$的零元素，则

$$\theta_1 = \theta_1 + \theta_2 = \theta_2 + \theta_1 = \theta_2$$

其次，设x_1，x_2均为$x \in V(F)$的逆元素，θ为$V(F)$的零元素，则

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1 + \theta = x_1 + (x + x_2) = (x_1 + x) + x_2 \\ &= \theta + x_2 = x_2 \end{aligned}$$

性质 2 设$\alpha, 0, -1, 1 \in F$，$x, -x, \theta \in V(F)$，则

a) $0x = \theta$

b) $(-1)x = -x$

c) $\alpha\theta = \theta$

d) 若$\alpha x = \theta$，则$\alpha = 0$或$x = \theta$。

事实上，因为

$$\begin{aligned} x + 0x &= 1x + 0x = (1 + 0)x \\ &= 1x = x \end{aligned}$$

故

$$0x = \theta$$

因为

$$\begin{aligned} x + (-1)x &= 1x + (-1)x = (1 - 1)x \\ &= 0x = \theta \end{aligned}$$

故

$$(-1)x = -x$$

因为

$$\alpha\theta = \alpha(x - x) = \alpha x - \alpha x$$
$$= (\alpha - \alpha)x = 0x = \theta$$

故

$$\alpha\theta = \theta$$

若 $\alpha \neq 0$ 且 $x \neq \theta$ 则

$$x = 1x = (\frac{1}{\alpha}\alpha)x = \frac{1}{\alpha}(\alpha x)$$
$$= \frac{1}{\alpha}\theta = \theta$$

这与 $x \neq \theta$ 矛盾，故 $\alpha \neq 0$ 与 $x \neq \theta$ 不能同时成立。

§1.3 线性空间的基

在 R^n 中有了向量的坐标表示式后，对于理论分析和实际应用都十分方便。为此，本节将 R^n 中有关基、维数和坐标等概念推广到一般线性空间中来。首先需要定义 $V(F)$ 中元素组的线性相关性等基本概念。

定义 1 设 $x_i \in V(F)$，$\alpha_i \in F$，$i \in \underline{m}$，则表达式

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_m x_m$$
$$= \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i \qquad (x \in V(F)) \tag{1}$$

称为 x 用 x_1、x_2、…、x_m **线性表示**，或称 x 是 x_1、x_2、…、x_m 的**线性组合**。

定义 2 $V(F)$ 中的向量 x_1、x_2、…、x_m 所组成的向量组 $\{x_1$、x_2、…、$x_m\}$ 称为是**线性相关的**，系指存在不全为零的 $\alpha_i \in F$，$i \in \underline{m}$，使

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i = \theta \tag{2}$$

否则称向量组 $\{x_1$、x_2、…、$x_m\}$ 是**线性无关的**，即仅当