时间序列分析

谢衷洁 编著

北京大学出版社

时间序列分析

谢衷洁 编著

北京大学出版社

内 容 提 要

本书的主要内容是时间序列分析的基础性知识，涉及到平稳随机过程、ARMA模型、马氏扩张、预测与滤波、模型拟合、谱估计及潜周期分析等。侧重于基本概念和方法的讲解，可作为进一步学习、研究时间序列分析的先导。

本书可供高等院校理工科高年级学生、研究生、大学教师及科技工作者学习参考。

时间序列分析

谢衷洁 编著

责任编辑：王明舟

北京大学出版社出版

（北京大学校内）

北京大学印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

850×1168毫米 32开本 11.5印张 298千字

1990年9月第一版 1990年9月第一次印刷

印数：00001—4,000册

ISBN 7-301-00849-X/O·154

定价：6.00元

前　言

本书是由1980年至1985年讲课的讲稿整理成的。讲课的对象是数学系、概率统计系高年级学生、研究生和进修教师。

本书的内容主要是时间序列分析的基础性知识，涉及到平稳随机过程，ARMA模型，马氏扩张，预测与滤波，模型拟合，谱估计及潜周期分析等。课程本身侧重于基本概念和方法的讲解而不着眼于某些过细分支内容的介绍，因此对学生讲它只起一个导引性的作用。

本书要求的先修课程是普通概率统计，线性代数，复变和实变函数论及泛函分析中有关Hilbert空间的一些知识。

本书有许多内容和思想是属于江泽培教授所领导的讨论班的，如极大一步预测误差准则下最优拟合的定理，弱P线性模型参数估计的强相容性及马氏扩张等等。

本书比较偏重于时间序列的概率分析而统计内容比较弱，应该说这是一个缺点。

感谢陈家鼎同志对本书出版的积极鼓励和支持，感谢李东风同志详细地阅读了全稿并提出了许多宝贵意见。

由于水平所限，错误一定不少，恳请读者批评指正。

谢衷洁

于北大燕东园

一九八六年十二月

目　录

第一章　平稳随机过程的基本知识

§1　随机过程的定义及例子

1°　随机过程的定义

在普通概率统计课程的学习中，我们已经学过一元、n 元随机变量及其分布，并初步了解到运用这些理论和方法可以解决许多实际问题。但是有大量的课题涉及到的不是有限多个的随机变量，求解问题的出发点也不是 n 元随机变量的 N 个独立样本而是无穷多个随机变量的一次实现观测。这样，以往学过的知识就不足以解决这些问题，例如：

(1) 对某城市的气温进行 n 年的连续观测，得记录 $\{x_t, a\leqslant t\leqslant b\}$，试问该地气温有没有以 T_0 年为周期的变化规律？

(2) 从杂乱电讯号的一段观测 $\{y_t, 0<t<T\}$ 中，研究是否存在某种随机信号 s_t？

(3) 监测器上收到某种电波记录 $\{\xi_t, \alpha<t<\beta\}$，试问它是否确实是追踪的某个信号？

等等。

以上三个问题是随机过程论(特别是应用随机过程)中的重要问题，(1)属于谱分析，(2)属于过程检测，(3)属于过程识别。在这里我们首先遇到的是具有连续足标的无穷多个随机变量的一段观测样本，即随机过程的有限(或无限)观测样本。首先，我们需引入随机过程的定义：

定义1.1　设 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 为概率空间，T 是某一足标集，若对任意的 $t\in T$，$\xi_t(\omega)$ $(\omega\in\Omega)$ 是该概率空间上的一个随机变量，则这一簇随机变量 $\{\xi_t(\omega), t\in T\}$ 就称为是随机过程。

以后我们讲随机过程多指 T 是无穷多个元素，甚至主要是指

实数集 $\boldsymbol{R}_1$ 或直线上的一个区间 I；若 T 是整数集或非负整数集，就称$\{\xi_t(\omega)\}$为随机序列，特别，当 T 代表时间时就称为时间序列。如果不混淆就简记$\{\xi_t(\omega)\}$为 ξ_t 或 $\xi(t)$。ξ_t 大多指实值随机变量，但以后也要讨论复随机变量，即$\xi_t(\omega)=\eta_t(\omega)+\mathrm{i}\,\zeta_t(\omega)$，而 $\eta_t(\omega)$，$\zeta_t(\omega)$是实值随机变量。最简单的随机过程如

例1.1 设$(\Omega,\mathscr{F},P)$为对应于掷硬币的概率空间

$\Omega=\{$正$=\omega_1$，反$=\omega_2\}$，$\mathscr{F}=\{\omega_1,\omega_2,\varnothing,\Omega\}$，$P(\omega_1)=P(\omega_2)=\dfrac{1}{2}$，

作无穷多次独立实验可引入随机变量 $\xi_t(\omega)$：

$$\xi_t(\omega)=\begin{cases}0, & \omega=\omega_1,\\ 1, & \omega=\omega_2,\end{cases}\qquad t=0,1,2,\cdots. \tag{1.1}$$

则$\{\xi_t(\omega),\ t=0,1,2,\cdots\}$为随机序列。

设$\{\xi_t(\omega),t\in T\}$是随机过程，对 $t_1,t_2,\cdots,t_n\in T$，则$(\xi_{t_1}(\omega),\xi_{t_2}(\omega),\cdots,\xi_{t_n}(\omega))$是 n 元的随机变量。若 $T=\boldsymbol{R}_1$，或区间 I，则固定$\omega_0\in\Omega$，$\{\xi_t(\omega_0),t\in T\}$对应于一条曲线（见图1.1）。

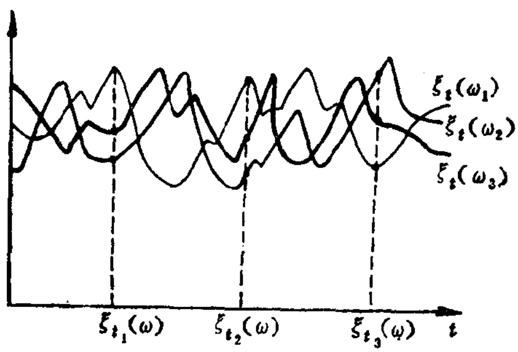

图 1.1

2° 随机过程的时律

设$\{\xi_t,t\in T\}$为某概率空间上的随机过程，对 $t_1,t_2,\cdots,t_n\in T$，$(\xi_{t_1},\cdots,\xi_{t_n})$为 n 元随机变量。由概率论知，此时必有一个 n 元分布函数

$$F_{t_1,t_2,\cdots,t_n}(x_1,x_2,\cdots,x_n),\quad (x_1,x_2,\cdots,x_n)\in \boldsymbol{R}_n \tag{1.2}$$

与之对应，考虑一切可能的n元分布函数的全体，记为F_ξ，即

$$F_\xi=\{F_{t_1,t_2,\cdots,t_n}(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,|\,n>0,\ \ t_1,t_2,\cdots,t_n\in T\}. \tag{1.3}$$

这一切有限维的分布函数簇F_ξ就称为是随机过程ξ_t的时律。

由概率论知识不难看出，F_ξ中的有限维分布函数$F_{t_1,t_2,\cdots,t_n}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$具有以下两条重要性质：

(a) 对$(t_1,t_2,\cdots,t_n)$的任一排列$(t_{\nu_1},t_{\nu_2},\cdots,t_{\nu_n})$，有

$$F_{t_1,t_2,\cdots,t_n}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=F_{t_{\nu_1},t_{\nu_2},\cdots,t_{\nu_n}}(x_{\nu_1},x_{\nu_2},\cdots,x_{\nu_n}). \tag{1.4}$$

(b) $$F_{t_1,t_2,\cdots,t_m}(x_1,x_2,\cdots,x_m)=F_{t_1,\cdots,t_m,t_{m+1},\cdots,t_n}(x_1,\cdots,x_m,+\infty,\cdots,+\infty). \tag{1.5}$$

以上两条件称为Колмогоров的相容性条件。

有穷维分布函数簇满足K氏相容性的条件，关系到以下的随机过程的存在性定理：

定理1.1 设给定一个足标集T以及一簇满足K氏相容性条件的有穷维分布函数簇

$$F=\{F_{t_1,t_2,\cdots,t_n}(x_1,x_2,\cdots,x_n),\quad n>0,\quad t_1,t_2,\cdots,t_n\in T\},$$

则必存在一个概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的随机过程$\{\xi_t(\omega),t\in T\}$，使得其时律$F_\xi=F$。

此定理在理论上具有重要意义。它肯定了对给定有穷维分布簇F必存在随机过程以F为时律，但需注意概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$和$\{\xi_t(\omega)\}$的构造并不唯一。定理1.1的证明我们略去，有兴趣的读者可参看[1],[2]。

3° 正态过程及存在性定理

作为随机过程的重要例子，我们将介绍正态过程(或称Gauss

过程)及其存在性定理。首先介绍正态过程的定义：

定义1.2 设$\{\xi_t, t\in T\}$是实随机过程①，若对任意的n元向量$\boldsymbol{t}=(t_1,t_2,\cdots,t_n), t_i\in T$，$(\xi_{t_1},\xi_{t_2},\cdots,\xi_{t_n})$的特征函数$f(\boldsymbol{u})$，$\boldsymbol{u}\in \boldsymbol{R}_n$，具有形式

$$f(\boldsymbol{u})=e^{i\boldsymbol{a}\boldsymbol{u}'-\frac{1}{2}\boldsymbol{u}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{u}'}, \tag{1.6}$$

其中$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$为实向量，$\boldsymbol{\Sigma}$为实对称非负定阵，则称$\{\xi_t\}$为实正态过程。

需说明的是：如果$\boldsymbol{\Sigma}>0$(正定阵)，则(1.6)显然可以直接写出所对应的分布密度$N(\boldsymbol{a},\boldsymbol{\Sigma})$，其中$\boldsymbol{\Sigma}$的元素

$$\sigma_{ij}=E(\xi_{t_i}-a_i)(\xi_{t_j}-a_j), \quad i,j=1,2,\cdots,n.$$

但如果$\boldsymbol{\Sigma}\geqslant 0$(非负定阵)，即矩阵可能退化，这时虽然写不出$(\xi_{t_1},\xi_{t_2},\cdots,\xi_{t_n})$的概率密度，但(1.6)式的$f(\boldsymbol{u})$仍然是特征函数。事实上，可令

$$\boldsymbol{\Sigma}_N=\boldsymbol{\Sigma}+\frac{1}{N}\boldsymbol{I}, \tag{1.7}$$

其中$\boldsymbol{I}$为单位阵，N为正整数，则对$\boldsymbol{\alpha}\in\boldsymbol{R}_n$，均有

$$\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\Sigma}_N\boldsymbol{\alpha}'=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\alpha}'+\frac{1}{N}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}'\geqslant\frac{1}{N}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}'>0.$$

可见

$$f_N(\boldsymbol{u})=e^{i\boldsymbol{a}\boldsymbol{u}'-\frac{1}{2}\boldsymbol{u}\boldsymbol{\Sigma}_N\boldsymbol{u}'}=f(\boldsymbol{u})e^{-\frac{1}{2N}\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}'} \tag{1.8}$$

为特征函数。

然而当$N\to\infty$时，在$\boldsymbol{u}$的任意有界集上，$f_N(\boldsymbol{u})$一致收敛到$f(\boldsymbol{u})$，又由于$f(\boldsymbol{u})$在0点是连续函数，由特征函数的极限定理知$f(\boldsymbol{u})$是特征函数。

---

① 全义讲应为“某概率空间上的取实值的随机过程”，以后多采用简化写法。

以下的 Gauss 过程存在定理对随机过程的理论和方法的研究具有重要意义。

定理1.2 设 T 为足标集，a_t 为任意实值函数，$t\in T$，$\sigma_{s,t}$ 为二元实值函数，$s,t\in T$，满足

(1) $\sigma_{s,t}=\sigma_{t,s}$； (1.9)

(2) 对任意的 $t_1,t_2,\cdots,t_n\in T$，矩阵

$$\boldsymbol{B}_n=(\sigma_{t_i,t_j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}\geqslant 0. \tag{1.10}$$

则必存在一个正态过程$\{\xi_t,t\in T\}$使得

$$E(\xi_t)=a_t,\ \ t\in T,$$

$$E(\xi_t-a_t)(\xi_s-a_s)=\sigma_{t,s}.$$

证明 对任意的 $t_1,t_2,\cdots,t_n\in T$，记

$$\boldsymbol{B}_n=(\sigma_{t_i,\ t_j}), \tag{1.11}$$

$$\boldsymbol{a}^{(n)}=(a_{t_1},a_{t_2},\cdots,a_{t_n}),$$

则

$$f_n(\boldsymbol{u})=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{a}^{(n)}\boldsymbol{u}'-\frac{1}{2}\Sigma_k\Sigma_l\sigma_{t_k,t_l}\cdot u_k u_l}$$

$$=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{a}^{(n)}\boldsymbol{u}'-\frac{1}{2}\boldsymbol{u}\boldsymbol{B}_n\boldsymbol{u}'} \tag{1.12}$$

是 n 维特征函数。不难看出，$\{f_n(\boldsymbol{u})\}$ 所对应的分布函数簇 $\{F_{t_1,\cdots,t_n}(x_1,\cdots,x_n)\}$满足K氏相容性条件：

(a) $F_{t_{\nu_1},\cdots,t_{\nu_n}}(x_{\nu_1},\cdots,x_{\nu_n})$对应的特征函数为

$$f_n(u_{\nu_1},u_{\nu_2},\cdots,u_{\nu_n})=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Sigma_l a_{\nu_l}u_{\nu_l}-\frac{1}{2}\Sigma_k\Sigma_l\sigma_{\nu_k,\nu_l}\cdot u_{\nu_k}\cdot u_{\nu_l}}$$

$$=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Sigma_l a_{t_l}u_{t_l}-\frac{1}{2}\Sigma_k\Sigma_l\sigma_{t_k,t_l}u_{t_k}u_{t_l}}$$

$$=f_n(\boldsymbol{u}).$$

而$f_n(\boldsymbol{u})$对应的分布函数为

$$F_{t_1,\cdots,t_n}(x_1,\cdots,x_n).$$

(b) $F_{t_1,\cdots,t_m}(x_1,\cdots,x_m)=F_{t_1,\cdots,t_m,t_{m+1},\cdots,t_n}(x_1,\cdots,x_m,$

$+\infty,\cdots,+\infty$)显然满足(相当于n维分布与m维($m<n$)边缘分布的关系)。

由定理1.1的存在性定理，必存在随机过程$\{\xi_t, t\in T\}$以上述正态分布函数簇为时律，因而$\{\xi_t, t\in T\}$是实值正态过程。由(1.12)知$\{\xi_t\}$以a_t为期望，以$\sigma_{t,s}$为协方差。 ▌

上述Gauss过程存在定理还可以推广到复正态过程的场合。

定义1.3 设$(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$为$n$元复随机变量，称它们是遵从$n$元复Gauss分布的，假若它们的实虚部的联合$(\eta_1,\zeta_1,\eta_2,\zeta_2,\cdots,\eta_n,\zeta_n)$是遵从$2n$元的Gauss分布。设$\{\xi_t, t\in T\}$是复值随机过程，如果对任意的正整数$n$，$(\xi_{t_1},\xi_{t_2},\cdots,\xi_{t_n})$是遵从复Gauss分布的，则称$\{\xi_t, t\in T\}$为复Gauss过程。

定理1.3 设T为足标集，a_t为定义在T上的复值函数，$\sigma_{s,t}$为定义在$T\times T$上的满足以下二个条件的二元复值函数：

(1) $\sigma_{s,t}=\bar{\sigma}_{t,s}$，$(s,t)\in T\times T$， (1.13)

(2) 对$t_1,t_2,\cdots,t_n\in T$，

$$\boldsymbol{B}_n=(\sigma_{t_i,t_j})_{1\le i,j\le n}\geqslant 0, \tag{1.14}$$

则必存在一复Gauss过程$\{\xi_t, t\in T\}$满足①

$$E(\xi_t)=a_t, \tag{1.15}$$

$$E(\xi_t-a_t)\overline{(\xi_s-a_s)}=\sigma_{t,s}. \tag{1.16}$$

此定理的证明可在[1],[2]中找到，此处不细叙。

4° 宽平稳过程与严平稳过程

以下我们将着重介绍与时间序列分析的理论及方法有密切关系的平稳随机过程的概念。

定义1.4 设$\{\xi_t, t\in T\}$为复值随机过程，其期望与协方差存在，并满足

(1) $E\xi_t\equiv a$，对一切$t\in T$，

---

① 复值变量的期望为实虚部期望之和，即$E\xi_t=E\eta_t+iE\zeta_t$。

(2) $E(\xi_{t+\tau}-a)\overline{(\xi_t-a)}=R_\xi(\tau)$，对 $t,t+\tau\in T$ 成立，则称$\{\xi_t,t\in T\}$为宽平稳过程，$R_\xi(\tau)$称为ξ_t的协方差函数。若不混淆亦简记为 $R(\tau)$。

由定义1.4可看出：第一条要求表明过程的期望值不随时间的推移而变化；第二条要求表明过程前后两个时刻的线性相关性（统计意义）的强弱只依赖这两个时刻间的间隔而与它们所处的位置 t 无关（参看图1.2）。这类过程在工程技术、自然科学和医学

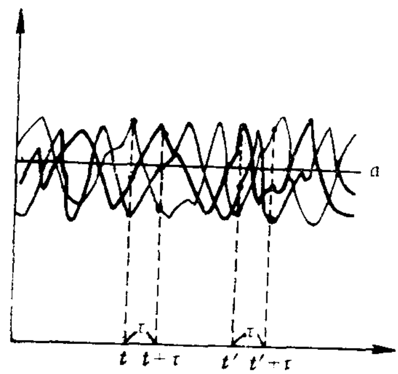

图 1.2

等领域中具有极其广泛的代表性，它反映了一个系统处于稳态工作条件下的统计性质（稳态并不是指固定不变，系统的工作仍具随机性）。

通常称

$$B(\tau)=E\xi_{t+\tau}\overline{\xi}_t \tag{1.17}$$

为宽平稳过程的相关函数，显见有

$$R(\tau)=B(\tau)-|a|^2$$

成立。当 $a=0$ 时，相关函数与协方差函数等价。以后如不声明，我们皆指过程的期望为零。若不然，可令

$$x_t=\xi_t-a,\quad t\in T,$$

则

$$Ex_t=0,\ B_x(\tau)=R_x(\tau)=R_\xi(\tau).$$

以下我们举几个宽平稳过程的例子。

例1.2 白噪声序列。

设$\{\xi_t, t=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$是独立同分布序列(实)，具有二阶矩，并满足

$$E\xi_t=0,\qquad t=0,\pm1,\pm2,\cdots,$$

$$R(\tau)=E\xi_{t+\tau}\xi_t=\begin{cases}1, & \tau=0;\\ 0, & \tau\neq0.\end{cases}\tag{1.18}$$

显然，ξ_t 满足定义1.4，因而是宽平稳过程。

例1.3 随机振荡(随机相位)。

设

$$\xi_t=Ae^{i(\omega t+\theta)},\ \theta\sim U(0,2\pi),\qquad t\in R_1\tag{1.19}$$

(θ 遵从$(0,2\pi)$上的均匀分布)，$A>0$和ω 均为常数，则$\{\xi_t, t\in \boldsymbol{R}_1\}$是宽平稳过程。

事实上可验证平稳性的两条件如下：

$$\begin{aligned}E(\xi_t)&=Ae^{i\omega t}E(e^{i\theta})\\&=Ae^{i\omega t}\int_0^{2\pi}e^{i\theta}\frac{d\theta}{2\pi}\equiv0,\qquad \text{对一切 } t\in\boldsymbol{R}_1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E\xi_{t+\tau}\bar{\xi}_t&=E(Ae^{i[\omega(t+\tau)+\theta]}\bar{A}e^{-i(\omega t+\theta)})\\&=|A|^2e^{i\omega\tau}=A^2e^{i\omega\tau},\qquad t,\tau\in\boldsymbol{R}_1.\end{aligned}\tag{1.20}$$

式(1.20)表明与 t 无关。

进一步若考虑

$$\xi_t=\sum_{k=1}^N A_ke^{i(\omega_kt+\theta_k)},\qquad t\in\boldsymbol{R}_1,\tag{1.21}$$

A_k,ω_k 为常数，$\{\theta_k\}$是 n 个相互独立同 $U(0,2\pi)$分布的随机变量，则 ξ_t 也是宽平稳过程。

例1.4 随机振荡(随机振幅)。

设 $\xi_t=\xi e^{i\omega t}$，ω 为常数，$E|\xi|^2<+\infty$，$E\xi=0$，则$\{\xi_t, t\in\boldsymbol{R}_1\}$是宽平稳过程。因为

$$E\xi_t = e^{i\omega t}E\xi = 0, \quad t \in \boldsymbol{R}_1,$$
$$E(\xi_{t+\tau}\bar{\xi}_t) = E|\xi|^2 e^{i\omega\tau}, \quad t, \tau \in \boldsymbol{R}_1$$

与 t 无关。

进一步若考虑

$$\xi_t = \sum_{k=1}^{N} \xi_k e^{i\omega_k t}, \quad t \in \boldsymbol{R}_1, \tag{1.22}$$

其中 ω_k 为常数，$\{\xi_k\}$是N个相互独立、均值为零且具有二阶矩的随机变量，则$\{\xi_t, t \in \boldsymbol{R}_1\}$也是宽平稳过程。

例1.5 白噪声的过滤.

设有一个滤波器，它的滤波权系数(实)为$C_0, C_1, \cdots, C_N$。今将白噪声列$\{\varepsilon_t, t = 0, \pm 1, \cdots\}$送入该滤波器，则其输出(参看图1.3)可表为

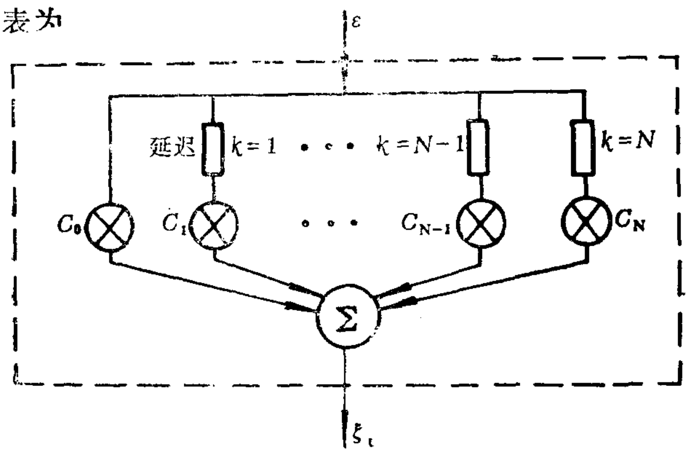

图 1.3

$$\xi_t = \sum_{k=0}^{N} C_k \varepsilon_{t-k}, \quad t = 0, \pm 1, \cdots, \tag{1.23}$$

它是宽平稳列。事实上：

$$E(\xi_t) = \sum_{k=0}^{N} C_k E(\varepsilon_{t-k}) \equiv 0, \quad t = 0, \pm 1, \cdots,$$

$$E(\xi_{t+\tau}\xi_t) = \sum_{k=0}^{N}\sum_{l=0}^{N} C_k C_l E(\varepsilon_{t+\tau-k}\varepsilon_{t-l}).$$