多复变数函数引论

陆启鏗编著

科学出版社

多复变数函数引论

陆启鏗编著

科学出版社

1961

内 容 簡 介

本书是多复变函数論方面的入門书，着重介紹多复变数的解析函数、正交系与核函数、解析映照、零点与奇异点等方面的基本結果及存在的主要問題．这些問題有的已获得一些結果，有的尚待进一步研究．本书供大学数学系高年級学生閱讀及教师参考，本书也可供理論物理学工作者参考．

多复变数函数引论

陆启鏗編著

*

科学出版社出版（北京朝阳門大街 117 号）

北京市书刊出版业营业許可証出字第 061 号

中国科学院印刷厂印刷　新华书店总經售

*

1961年11月第一版　书号：2444　字数：143,000

1961年11月第一次印刷　开本：850×1168 1/32

（京）0001－15,500　印张：5 1/2

定价：0.72 元

序

多复变数函数論的研究，可以說已有悠久的历史了，但直到十九世紀末与二十世紀初，Poincaré, Cousin, Hartogs, Levi 等人的工作相継出現，显示出它与单复变数函数論的本質差别后，才引起較多的人专門研究之．然而，甚至在本世紀中叶开始时，数学家 H. Weyl 回顧前五十年的数学发展情况，当他說到多复变数函数論时，仍謂它还处于幼稚时代．他的話刚說过不久，H. Cartan 及 J. P. Serre 漂亮地解决了 Cousin 問題，其后 K. Oka 解决了 Levi 猜想，而最近 Пятецкий-Шапиро 又給 É. Cartan 猜想以反例．这些問題对多复变数函数論的发展是十分重要的，而以往被認为是相当困难的．数学上一个有意义的問題的解决与一个有价值的猜想的肯定或否定，往往引起更多、更深刻的問題的研究；此外，解决問題时所創造的工具与所运用的技巧，又往往可应用到其他科学部門．因之近十年来多复变数函数論有比較迅速的发展，有更多的数学家研究它，并且应用范围逐漸超越出純粹数学領域．例如，在量子場論的重要問題色散关系的研究中，正有人应用多复变数解析函数的展拓理論．至于在数学的內部分支方面，多复变数函数論的应用更是广泛．

在国內，华罗庚教授研究多复变数函数論已十余載，他的工作是丰富的，受到国內外数学工作者的重視．然而从全国来說，以往研究多复变数函数的数学工作者只有极少数．最近这种情况正在改变，逐漸有更多的人重視这門学科，并希望对多复变数函数論开始进行研究或要求有一些了解．但是中文的介紹多复变数函数論的入門书籍还未曾有，作者写本书目的之一，便是企图对有兴趣于多复变数函数論的同志作一概括性的、入門性的介紹．

由于多复变数函数論的已有結果十分丰富，并且它們的証明

需要許多数学工具(包括代数的、微分几何的、李羣的、拓扑的、微分方程的、单复变数函数論的、泛函的工具),要作一全面而深入的介紹,不仅要浩繁的篇幅,而且是作者的能力所不及. 作者仅希望对于多复变数函数論的最基本的結果与存在的主要問題作一比較全面的介紹,同时要使得具有相当于大学数学系三、四年級知識水平的人也能够閱讀. 至于要用到其他較深刻数学工具的結果,則只有叙述其大概而不加詳細証明. 有兴趣的讀者可根据书中所介紹的情况及所引用的文献,沿此綫索而深入研究.

有一点值得注意的,虽然本书絕大部分定理及例題仅用不超过通常数学系同学的知識水平便能証明,但証明中有一些地方是有意省略的,留給讀者作为习題,讀者要比較仔細的,并且往往要經过一些思索才能証明. 另一方面,有一些結果的証明,为了仅使用初等的方法,不免要比原来的証明累贅,这希讀者原諒.

在 1959 年秋至 1960 年夏,作者曾試用本书在北京大学数学系四年級函数論专門化作为授課的講义,发觉其中缺点很多,虽然已作了一些修改,相信还会存在不少的缺点. 希望各方面的讀者閱后提供宝貴的批評和意見,以便将来作更进一步的修正.

最后,作者衷心地感謝我的老师华罗庚教授对本书所提出的許多珍貴的意見. 許以超同志对本书手稿的校閱、謄写方面的帮助,也在此表示感謝.

陸启鏗

1960 年 9 月 14 日于北京

目 录

I. 多复变数的解析函数

§ **1.1. 解析函数.** 我們命 C^n 表 n 个独立的复变数 $z_1, \cdots, z_n$ 的空間. 此空間的点为一組 n 个有限的复数 $(a_1, \cdots, a_n)$. 为簡便起見,我們常以 z 代表 n 个复变数, 即 $z = (z_1, \cdots, z_n)$, 而以 a 代表此空間的点,即 $a = (a_1, \cdots, a_n)$.

以 a 为展开点的 (n 重) 冪級数

$$\sum_{m_1, \cdots, m_n=0}^{\infty} a_{m_1 \cdots m_n} (z_1 - a_1)^{m_1} \cdots (z_n - a_n)^{m_n} \tag{1.1.1}$$

($a_{m_1 \cdots m_n}$ 为常数) 称为在 $b = (b_1, \cdots, b_n)$ 点收斂, 如果在 $z = b$ 点[1]有一个方法把此級数排列成为单級数,而此級数是收斂的.

空間 C^n 中的多圓柱 $P(a, r)$为一点集, 由适合下列不等式的 z 点組成:

$$|z_1 - a_1| < r_1, \cdots, |z_n - a_n| < r_n,$$

此处 $r = (r_1, \cdots, r_n)$ 是一組 n 个正数, 而 $a = (a_1, \cdots, a_n)$ 点称为多圓柱的中心.

定理 1.1.1. 若級数(1.1.1)在 $z = b$ 点收斂,則此級数在多圓柱

$$|z_1 - a_1| < |b_1 - a_1|, \cdots, |z_n - a_n| < |b_n - a_n|$$

中任一紧致子集上一致收斂.

此定理可仿单重冪級数的相应定理的証明而得之, 即方法上是平行的推广. 讀者試自証之.

在 a 点解析的函数或函数元素 $f(z) \equiv f(z_1, \cdots, z_n)$, 即 $f(z)$ 在一以 a 点为中心的多圓柱 $P(a, r)$ 定义并在此多圓柱能展为收斂的冪級数者, 由冪級数的理論可知, 在 $P(a, r)$ 的每一点

1) $z = b$ 即 $z_1 = b_1, \cdots, z_n = b_n$.

$c=(c_1,\cdots,c_n)$，級数 (1.1.1) 若在 $P(a,r)$ 收斂，則能以 c 为展开点在一多圓柱 $P(c,\delta)$ [$\delta=(\delta_1,\cdots,\delta_n)$ 为一組适当小之正数] 展为收斂的冪級数，因之 $f(z)$ 在 $P(a,r)$ 的每一点皆是解析的.

又由冪級数的理論知，$f(z)$ 在 $P(a,r)$ 是連續的，其偏导数 $\frac{\partial f}{\partial z_\alpha}$ $(\alpha=1,\cdots,n)$ 存在[1)]，且等于級数的逐項偏导数之和；此外 $\frac{\partial f}{\partial z_\alpha}$ 在 $P(a,r)$ 也是解析的，因之 $f(z)$ 有任意次的对 $z_1,\cdots,z_n$ 的連續偏微分，并且易証 $f(z)$ 的展式的系数适合

$$a_{m_1\cdots m_n}=\frac{1}{m_1!\cdots m_n!}\left[\frac{\partial^{m_1+\cdots+m_n}f(z)}{\partial z_1^{m_1}\cdots\partial z_n^{m_n}}\right]_{z=a}. \qquad (1.1.2)$$

在 $P(a,r)$ 中，当 $z_1,\cdots,z_{\alpha-1},z_{\alpha+1},\cdots,z_n$ 固定时，显然 $f(z)$ 是单复变数 z_α 的在圓 $|z_\alpha-a_\alpha|<r_\alpha$ 解析的函数. 若命 $z_\alpha=x_\alpha+iy_\alpha$ $(\alpha=1,2,\cdots,n)$，$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$，其中 $x=(x_1,\cdots,x_n)$，$y=(y_1,\cdots,y_n)$ 是实变数，u 与 v 是实函数，則根据单复变数解析函数的性質知道，对每一整数 $\alpha(=1,\cdots,n)$，u 与 v 适合 Cauchy-Riemann 方程

$$\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}=\frac{\partial v}{\partial y_\alpha},\quad \frac{\partial u}{\partial y_\alpha}=-\frac{\partial v}{\partial x_\alpha}. \qquad (1.1.3)$$

C^n 中的一**开集** D 定义为 C^n 的一个子集，对 D 的每一点 a 能有一多圓柱 $P(a,r)$ 包含于 D 者. 开集 D 称为(单叶)**域**，如果 D 是連通的. 在单叶域 D 定义的函数 $f(z)$，在每一点 $z\in D$，对应有唯一的复数值 $f(z)$. 若 $f(z)$ 在 D 的每一点皆是解析的，則 $f(z)$ 称为**在域 D 解析**[2)].

利用单复变数函数論的 Liouville 定理，立刻得到

定理 1.1.2. 若 $f(z)$ 在 C^n 解析并且有界，則必为常数.

§ 1.2. 多圓柱的 Cauchy 积分. 設 D_α 为 z_α 平面的一域，广

1) 如单复变数函数論一样，有人利用偏导数的存在定义解析 (参閱 § 1.4).

2) 在单叶域上定义的解析函数即单值的解析函数. 非单叶域的定义比較复杂；本书只限于討論单叶域. 以后我們簡称单叶域为域.

义多圆柱 $D_1\times\cdots\times D_n$ 是 C^n 中的域，由所有的 $z=(z_1,\cdots,z_n)$ 点所組成，其中 $z_1\in D_1,\cdots,z_n\in D_n$.

現設每一 D_α 皆是 z_α 平面的有界域，其边界 C_α 由有限多个互不相交的、有长的、簡单的閉曲綫組成. 設 $f(z)$ 在 $D_1\times\cdots\times D_n$ 解析，且在其边界仍然連續，則对任一点 $z\in D_1\times\cdots\times D_n$ 有广义多圆柱的 Cauchy 公式

$$f(z)=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{C_1\times\cdots\times C_n}\cdots\int\frac{f(\zeta_1,\cdots,\zeta_n)}{(\zeta_1-z_1)\cdots(\zeta_n-z_n)}d\zeta_1\cdots d\zeta_n. \tag{1.2.1}$$

实际上，当 $n=1$ 时上式是熟知的. 利用归納法，假設 $n-1$ 个复变数时上式成立. 現在視 $f(z_1,z_2,\cdots,z_n)$ 为 z_1 的在 D_1 解析的函数族，$z_2,\cdots,z_n$ 为参数，則由 $f(z)$ 的連續性假定知，$f(z_1,z_2,\cdots,z_n)$ 是单复变数 z_1 的正規族，并且对任一組数 $\zeta_2\in C_2,\cdots,\zeta_n\in C_n$，函数

$$f(z_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_n)=\lim_{z_2\to\zeta_2,\cdots,z_n\to\zeta_n}f(z_1,z_2,\cdots,z_n)$$

仍然在 D_1 解析. 应用归納法的假定，便有

$$\begin{aligned}f(z_1,z_2,\cdots,z_n)&=\\&=\frac{1}{(2\pi i)^{n-1}}\int_{C_2\times\cdots\times C_n}\cdots\int\frac{f(z_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_n)}{(\zeta_2-z_2)\cdots(\zeta_n-z_n)}d\zeta_2\cdots d\zeta_n=\\&=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{C_2\times\cdots\times C_n}\cdots\int\frac{d\zeta_2\cdots d\zeta_n}{(\zeta_2-z_2)\cdots(\zeta_n-z_n)}\int_{C_1}\frac{f(\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_n)}{\zeta_1-z_1}d\zeta_1.\end{aligned}$$

由于 $f(\zeta)$ 的連續性，上式即(1.2.1).

由(1.2.1)易知

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{m_1+\cdots+m_n}f(z)}{\partial z_1^{m_1}\cdots\partial z_n^{m_n}}&=\\&=\frac{m_1!\cdots m_n!}{(2\pi i)^n}\int_{C_1\times\cdots\times C_n}\cdots\int\frac{f(\zeta_1,\cdots,\zeta_n)\,d\zeta_1\cdots d\zeta_n}{(\zeta_1-z_1)^{m_1+1}\cdots(\zeta_n-z_n)^{m_n+1}}.\end{aligned} \tag{1.2.2}$$

特别取 D_α 为圓 $|z_\alpha-a_\alpha|<r_\alpha$ 时，由上式及(1.1.2)可得

$$a_{m_1\cdots m_n}=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{|\zeta_1-a_1|=r_1}\cdots$$

$$\cdots\int_{|\zeta_n-a_n|=r_n}\frac{f(\zeta_1,\cdots,\zeta_n)\,d\zeta_1\cdots d\zeta_n}{(\zeta_1-a_1)^{m_1+1}\cdots(\zeta_n-a_n)^{m_n+1}} \quad (1.2.3)$$

及

$$|a_{m_1\cdots m_n}|\leqslant\frac{M}{r_1^{m_1}\cdots r_n^{m_n}}, \quad (1.2.4)$$

其中 M 是 $|f(\zeta)|$ 在 $|\zeta_1-a_1|=r_1,\cdots,|\zeta_n-a_n|=r_n$ 之高界.

若有在域 D 解析的函数 $f(z)$. 在 D 的一点 a 取一多圓柱 $P(a,r)$, 其閉包 $\bar{P}(a,r)$:

$$|z_1-a_1|\leqslant r_1,\cdots,|z_n-a_n|\leqslant r_n$$

仍然包含于D中,則由(1.2.3)及(1.2.4)可知

定理 1.2.1. 若 $f(z)$ 在域D解析,則它在域 D 的 a 点的展式(1.1.1)是唯一的,并且此展式在任一包含于D的以 a 为心的多圓柱成立.

定理 1.2.2. 若 $f(z)$ 在域D解析,且在域 D 中一非空的开子集上等于零,則 $f(z)$ 在整个域D恆等于零.

实际上, $f(z)$ 最少在一包含于D的多圓柱 $P(a,r)$ 內恆等于零. 如 b 是D的任一点,可以用D中的一曲綫与 a 点相联,而以有限个包含于 D 的多圓柱蓋过此曲綫,則 $f(b)$ 亦必須等于零,只要我們証明,在一多圓柱解析的函数若在一非空开子集上为零則恆等于零. 后者用解析函数的冪級数展式是容易証明的.

定理 1.2.3. 設 $f(z)$ 在原点的邻域 P_n:

$$|z_1|<r_1,\cdots,|z_n|<r_n$$

中解析,命 $z_\alpha=x_\alpha+iy_\alpha\ (\alpha=1,\cdots,n)$. 若 $f(z)$ 在点集

$$-r_\alpha<x_\alpha<r_\alpha,\quad y_\alpha=0,\quad \alpha=1,\cdots,n$$

(或者在 $x_\alpha=0,\ -r_\alpha<y_\alpha<r_\alpha,\ \alpha=1,\cdots,n$) 上等于零, 則 $f(z)$ 在 P_n 中恆等于零.

証. $f(z)$ 可在 P_n 中展为收斂的冪級数

$$f(z) = \sum_{m_1, \cdots, m_n=0}^{\infty} a_{m_1\cdots m_n} z_1^{m_1} \cdots z_n^{m_n}.$$

当 $z_1, \cdots, z_n$ 取实値时，級数

$$f(x) = \sum_{m_1, \cdots, m_n=0}^{\infty} a_{m_1\cdots m_n} x_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n} = 0.$$

因此

$$\frac{\partial^{m_1+\cdots+m_n} f(x)}{\partial x_1^{m_1} \cdots \partial x_n^{m_n}} = 0,$$

特別是

$$a_{m_1\cdots m_n} = \frac{1}{m_1! \cdots m_n!} \left[\frac{\partial^{m_1+\cdots+m_n} f(x)}{\partial x_1^{m_1} \cdots \partial x_n^{m_n}}\right]_{x=0} = 0.$$

由此知 $f(z) \equiv 0$. 証毕.

定理 1.2.4. 若 $2n$ 个复变数的函数

$$f(z_1, \zeta_1, z_2, \zeta_2, \cdots, z_n, \zeta_n)$$

在 C^{2n} 空間的原点的邻域解析，而在此邻域中适合下面条件的子集（$\bar{z}_\alpha$ 表 z_α 的复数共軛）

$$\zeta_1 = \bar{z}_1, \cdots, \zeta_n = \bar{z}_n \tag{1.2.5}$$

上为零，即

$$f(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2, \cdots, z_n, \bar{z}_n) = 0,$$

則在整个邻域中

$$f(z_1, \zeta_1, z_2, \zeta_2, \cdots, z_n, \zeta_n) \equiv 0.$$

証. 我們作綫性变换

$$u_\alpha = \frac{z_\alpha + \zeta_\alpha}{2}, \quad v_\alpha = \frac{z_\alpha - \zeta_\alpha}{2i}, \quad \alpha = 1, \cdots, n,$$

其逆变换为

$$z_\alpha = u_\alpha + iv_\alpha, \ \zeta_\alpha = u_\alpha - iv_\alpha, \ \alpha = 1, \cdots, n.$$

函数

$$\varphi(u_1, v_1, \cdots, u_n, v_n) \equiv f(u_1 + iv_1, u_1 - iv_1, \cdots, u_n + iv_n, u_n - iv_n)$$

在复变数 $u_1, v_1, \cdots, u_n, v_n$ 空間的原点的邻域解析.

适合条件(1.2.5)的点集，經变换映为 $u_1, v_1, \cdots, u_n, v_n$ 空間的适合下面条件的点集：

$$(u_\alpha - \bar{u}_\alpha) - i(v_\alpha - \bar{v}_\alpha) = 0, \quad \alpha = 1, \cdots, n.$$

此乃表示 $\varphi(u_1, v_1, \cdots, u_n, v_n)$ 在 u_α, v_α 取实值时等于零. 据定理 1.2.3，它必須恆等于零，因之 $f(z_1, \zeta_1, \cdots, z_n, \zeta_n)$ 亦然.

定理 1.2.5. 若 $f(z)$ 在域 D 解析且非常数，則 $|f(z)|$ 不能在 D 的內点达到其最大值. 如 $f(z)$ 在 D 的边界仍然連續，則 $|f(z)|$ 在边界上达到其最大值.

实际上只要証明，如果 $|f(z)|$ 在 D 的一內点 a 达到其极大值，則 $f(z)$ 在 D 为常数. 据定理 1.2.2，这只要証明 $|f(z)|$ 在一包含于 D 的多圓柱 $P(a, r)$ 为常数便可. 設 $b = (b_1, \cdots, b_n)$ 为 $P(a, r)$ 的任一点，据假設，$|f(a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n)| \geqslant |f(a_1, \cdots, a_{n-1}, z_n)|$，当 $|z_n - a_n| < r_n$. 应用单复变数函数論的极大模原理知，$f(a_1, \cdots, a_{n-1}, z_n)$ 为常数，故有 $f(a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n) = f(a_1, \cdots, a_{n-1}, b_n)$. 再应用极大模原理于单变数函数 $f(a_1, \cdots, a_{n-2}, z_{n-1}, b_n)$ 可知，$f(a_1, \cdots, a_{n-2}, b_{n-1}, b_n) = f(a_1, \cdots, a_{n-2}, a_{n-1}, b_n)$. 如此継續，最后得出 $f(a_1, \cdots, a_n) = f(b_1, \cdots, b_n)$，故 $f(z)$ 在 $P(a, r)$ 为常数. 定理第二部分的証明是显然的.

值得注意的是，如 $f(z)$ 在边界仍然連續，則 $|f(z)|$ 往往在边界的某一子集(不必包括全部边界)达到其最大值. 此子集由域 D 的几何結构所确定，这里仅以单位閉多圓柱 $\bar{P}_n$:

$$|z_1| \leqslant 1, \cdots, |z_n| \leqslant 1$$

为例.

如 $f(z)$ 在 $\bar{P}_n$ 連續且在其內点解析，則 $[f(z)]^k$ 亦有此性質 (k 为任意的正整数). 应用多圓柱的 Cauchy 公式得[1)]

$$f^k(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\mathfrak{C}_n} \frac{f^k(\zeta_1, \cdots, \zeta_n)}{(\zeta_1 - z_1) \cdots (\zeta_n - z_n)} d\zeta_1 \cdots d\zeta_n,$$

1) 为簡便起見，在不致引起混乱的情况下，我們往往用一重积分符号代表多重积分符号.

其中 $\mathfrak{L}_n$ 代表点集

$$|z_1| = 1, \cdots, |z_n| = 1.$$

我們有估値

$$|f(z)|^k \leqslant \frac{M^k}{(2\pi i)^n} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} \frac{d\theta_1 \cdots d\theta_n}{|e^{i\theta_1} - z_1| \cdots |e^{i\theta_n} - z_n|}$$

或

$$|f(z)| \leqslant \frac{M}{(2\pi)^{\frac{n}{k}}} \left\{ \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} \frac{d\theta_1 \cdots d\theta_n}{|e^{i\theta_1} - z_1| \cdots |e^{i\theta_n} - z_n|} \right\}^{\frac{1}{k}},$$

其中 $M = \sup_{\zeta \in \mathfrak{L}_n} |f(\zeta)|, \quad \zeta = (\zeta_1, \cdots, \zeta_n).$

命 $k \to \infty$，我們有

$$|f(z)| \leqslant M,$$

此乃表示 $|f(z)|$ 在 $\mathfrak{L}_n$ 达到其最大値. 注意 $\mathfrak{L}_n$ 仅是 $\bar{P}_n$ 的边界的 n 維子集，而 $\bar{P}_n$ 的边界是 $(2n-1)$ 維点集. $\mathfrak{L}_n$ 稱为 P_n 的特征流形.

除多圓柱外，其他域的 Cauchy 公式的研究可参閱 A. Weil[1], Bergmann[1], Martinelle[1], 华罗庚[5], 华罗庚与陆启鏗[1]等人的工作.

§ **1.3. 形式微分.** 視

$$z_\alpha = x_\alpha + iy_\alpha, \quad \bar{z}_\alpha = x_\alpha - iy_\alpha$$

或

$$x_\alpha = \frac{z_\alpha + \bar{z}_\alpha}{2}, \quad y_\alpha = \frac{z_\alpha - \bar{z}_\alpha}{2i}$$

为变数的变換而引进形式微分

$$\frac{\partial}{\partial z_\alpha} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha} - i\frac{\partial}{\partial y_\alpha}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}_\alpha} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha} + i\frac{\partial}{\partial y_\alpha}\right), \quad (1.3.1)$$

即若 $f(x, y)$ 是实变数 x, y 的有連續偏微分的函数，則定义

$$\frac{\partial f}{\partial z_\alpha} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_\alpha} - i\frac{\partial f}{\partial y_\alpha}\right), \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_\alpha} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_\alpha} + i\frac{\partial f}{\partial y_\alpha}\right).$$

如是 Cauchy-Riemann 方程(1.1.3)可书为下面簡洁的形式

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_\alpha}=0,\ \alpha=1,\cdots,n, \tag{1.3.2}$$

其中 $f=u+iv$.

应用形式微分,我們有

定理 1.3.1. 若 $f_\alpha(z)=u_\alpha(x,y)+iv_\alpha(x,y)$ 是 z 的在某一域解析的函数,則在此域中有如下的恆等式:

$$\det\frac{\partial(u_1,v_1,\cdots,u_n,v_n)}{\partial(x_1,y_1,\cdots,x_n,y_n)}=\left|\det\frac{\partial(f_1,\cdots,f_n)}{\partial(z_1,\cdots,z_n)}\right|^2,$$

此处我們以 $\dfrac{\partial(f_1,\cdots,f_n)}{\partial(z_1,\cdots,z_n)}$ 表函数方陣

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial z_1} & \frac{\partial f_2}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial z_1}\\ \frac{\partial f_1}{\partial z_2} & \frac{\partial f_2}{\partial z_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial z_2}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\partial f_1}{\partial z_n} & \frac{\partial f_2}{\partial z_n} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial z_n}\end{pmatrix},$$

而 det A 表一方陣 A 的行列式.

証. 应用 Cauchy-Riemann 方程,經計算可得矩陣关系式

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}I & -iI\\ I & iI\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial(u_1,\cdots,u_n)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)} & \frac{\partial(v_1,\cdots,v_n)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)}\\ \frac{\partial(u_1,\cdots,u_n)}{\partial(y_1,\cdots,y_n)} & \frac{\partial(v_1,\cdots,v_n)}{\partial(y_1,\cdots,y_n)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I & I\\ iI & -iI\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{\partial(f_1,\cdots,f_n)}{\partial(z_1,\cdots,z_n)} & O\\ O & \overline{\frac{\partial(f_1,\cdots,f_n)}{\partial(z_1,\cdots,z_n)}}\end{pmatrix}, \tag{1.3.3}$$

其中 I 表 $n\times n$ 么方陣,即

$$I=\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}.$$

由(1.3.3)立得定理.

定理 1.3.2. 設

$$f_\alpha(z_1, \cdots, z_n, w_1, \cdots, w_m), \quad \alpha = 1, \cdots, n$$

是 $m+n$ 个复变数 $z=(z_1, \cdots, z_n)$, $w=(w_1, \cdots, w_m)$ 的函数, 在 C^{m+n} 空間的 $z=a=(a_1, \cdots, a_n)$, $w=b=(b_1, \cdots, b_m)$ 点的邻域[1]解析. 若 $f_\alpha(a, b)=0$, $\alpha=1, \cdots, n$ 而

$$\left[\det \frac{\partial(f_1, \cdots, f_n)}{\partial(z_1, \cdots, z_n)}\right]_{z=a,\, w=b} \neq 0,$$

則函数方程

$$f_\alpha(z_1, \cdots, z_n, w_1, \cdots, w_m)=0, \quad \alpha=1, \cdots, n \quad (1.3.4)$$

有唯一的解

$$z_\alpha = g_\alpha(w_1, \cdots, w_m), \quad \alpha = 1, \cdots, n,$$

并且此解在 C^m 空間的 $w=b$ 点的邻域解析. 此外 $g_\alpha(b)=a_\alpha$ $(\alpha=1, \cdots, n)$.

証. 命 $z_\alpha = x_\alpha + iy_\alpha$, $f_\alpha = u_\alpha + iv_\alpha$ $(\alpha=1, \cdots, n)$ 及 $w_k = s_k + it_k$ $(k=1, \cdots, m)$. 根据假設及定理 1.3.1 知

$$\left[\det \frac{\partial(u_1, v_1, \cdots, u_n, v_n)}{\partial(x_1, y_1, \cdots, x_n, y_n)}\right]_{z=a,\, w=b} \neq 0.$$

根据实变数的隐函数理論知, 方程(1.3.4)有唯一的解

$$x_\alpha = \varphi_\alpha(s, t), \quad y_\alpha = \psi_\alpha(s, t), \quad \alpha = 1, \cdots, n$$

其中 φ_α 与 ψ_α 是实变数 $s=(s_1, \cdots, s_m)$, $t=(t_1, \cdots, t_m)$ 的在 $w=b$ 点邻域中的实解析函数[2].

命 $g_\alpha = \varphi_\alpha + i\psi_\alpha$. 在(1.3.4)中对 $\bar{w}_k$ 微分, 有

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial \bar{w}_k} + \sum_{\beta=1}^{n} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \bar{z}_\beta}\frac{\partial \bar{g}_\beta}{\partial \bar{w}_k} + \sum_{\beta=1}^{n} \frac{\partial f_\alpha}{\partial z_\beta}\frac{\partial g_\beta}{\partial \bar{w}_k} = 0.$$

加(1.3.2)
由于 $\dfrac{\partial f_\alpha}{\partial \bar{z}_\beta}=0$, $\dfrac{\partial f_\alpha}{\partial \bar{w}_k}=0$, 我們得

1) 所謂一点的邻域就是包含此点的开集.

2) 在 n 維实欧氏空間 R^n 的一域定义的实解析函数 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ 即在此域的每一点 $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ 有一邻域, 在其中 φ 能展为 $x_1-\alpha_1, \cdots, x_n-\alpha_n$ 的收斂的冪級数.

$$\sum_{\beta=1}^{n}\frac{\partial f_\alpha}{\partial z_\beta}\frac{\partial g_\beta}{\partial \bar{w}_k}=0.$$

由于 $\det\frac{\partial(f_1,\cdots,f_n)}{\partial(z_1,\cdots,z_n)}$ 可在 $z=a$, $w=b$ 点的充分小邻域中不为零，根据齐次綫性方程的理論知，必須

$$\frac{\partial g_\beta}{\partial \bar{w}_k}=0.$$

此式在 C^m 空間的 $w=b$ 点的充分小邻域 $P(a,r)$ 中成立. 此乃表示 $g_\beta(w)$ 当 $w_1,\cdots,w_{k-1},w_{k+1},\cdots,w_m$ 固定时是 w_k 的解析函数. 我們取 $P(b,r)$ 如此之小，使得 $g_\beta(w)$ 在 $P(b,r)$ 的閉包連續. 重复应用单复变数的 Cauchy 公式得

$$g_\beta(w)=\frac{1}{(2\pi i)^m}\int_{|\zeta_1-b_1|=r_1}\cdots$$

$$\cdots\int_{|\zeta_m-b_m|=r_m}\frac{g_\beta(\zeta_1,\cdots,\zeta_m)\,d\zeta_1\cdots d\zeta_m}{(\zeta_1-w_1)\cdots(\zeta_m-w_m)}=$$

$$=\sum_{k_1,\cdots,k_m=0}^{\infty}a_{k_1\cdots k_m}(w_1-b_1)^{k_1}\cdots(w_m-b_m)^{k_m},$$

其中

$$a_{k_1\cdots k_m}=\frac{1}{r_1^{k_1}\cdots r_m^{k_m}}\times$$

$$\times\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}g_\beta(b_1+r_1e^{i\theta_1},\cdots,b_m+r_me^{i\theta_m})e^{-ik_1\theta_1}\cdots e^{-ik_m\theta_m}d\theta_1\cdots d\theta_m.$$

上面的級数在 $P(b,r)$ 中收斂，故 $g_\beta(w)$ 是 w 的在 $w=b$ 点邻域中解析的函数. 定理得証.

設 u 是在一域 D 解析的函数 $f(z)$ 的实部，卽 $u=\frac{1}{2}(f+\bar{f})$. 由此可見 u 适合偏微分方程組

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z_\alpha\partial\bar{z}_\beta}=0,\quad \alpha,\beta=1,\cdots,n \tag{1.3.5}$$

或

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}+\frac{\partial^2 u}{\partial y_\alpha\partial y_\beta}=0,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha\partial y_\beta}-\frac{\partial^2 u}{\partial x_\beta\partial y_\alpha}=0,$$

$$\alpha,\beta=1,\cdots,n. \tag{1.3.6}$$