

高等学校教材

数学分析讲义

上册

刘玉琏 傅沛仁 编

高等教育出版社

高等学校教材

数学分析讲义

上册

刘玉琮 傅沛仁 编

高等教育出版社

本书第一版是吉林师大数学系数学分析教研室编《数学分析讲义》，是为高等函授院校数学系开设数学分析课编写的。此次修订，编者署名改为刘玉珪、傅沛仁；并参照1980年5月经理科数学、力学教材编委会审订的高等师范院校《数学分析教学大纲》，对第一版内容作了少量增删；在体例、格式、叙述等方面变动较大；重新编写了函数、极限两章；在每节后增配了练习题，较难题目作了提示，书末附有计算题的答案。

本书阐述细致，范例较多，通俗易懂，便于自学。可作高等师范本科与专科的教材（上册本科与专科共用，下册本科用本与专科用本两种），也可作高等理科院校的函授教材及高等教育自学用书。

为了更好地保证教学效果，未经我社和编者同意，请不要为本书习题配备题解公开出版。

第二版修订稿经四川大学秦卫平副教授审查。



本书原由人民教育出版社出版。1983年3月9日，上级同意恢复“高等教育出版社”。本书今后改用高等教育出版社名义继续印行。

数学分析讲义

上册

刘玉珪 傅沛仁 编

*

高等教育出版社出版
新华书店北京发行所发行
济南印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 13.375 字数 310,000

1960年8月第1版 1981年11月第2版 1984年2月第5次印刷

印数 148,001—179,100

书号 13010·0674 定价 1.25元

前 言

本《讲义》是在我系函授本科用《数学分析讲义》的基础上修改完成的。在修改时，吸取了系内教师和广大函授生对该《讲义》在多次教学中所提出的意见。

本《讲义》的内容选取，考虑了当前中等学校多数数学教师的专业基础，注意了数学分析课程本身的系统性，照顾了其它后继课的需要。文字叙述力求通顺，定理证明力求详尽，使其通俗易懂，便于自学。

我们对某些重要的概念和定理作了细致的分析；对一些定理的证明，除了给出分析的严格证明外，注意用几何图形帮助读者理解定理内容，掌握定理的证法。

本《讲义》有些部分用小字排印，它们有的是对某些问题作进一步的说明；有的是教学上的难点；有的是进一步提高不可缺少的内容。初学的读者，可先不阅读小字部分，待逐步掌握数学分析的方法之后，再阅读这部分内容。

由于我们水平有限，错误和不妥之处一定很多，敬希广大读者批评指正。

本《讲义》主要由刘玉珺同志执笔编写，傅沛仁同志参加了部分章节的编写和修改工作。

吉林师范大学数学系
数学分析教研室

1965.11. 于长春

再 版 前 言

自从本《讲义》上册 1960 年出版、下册 1966 年出版以来，收到了许多读者的来信，对本《讲义》的内容、体系、讲法等诸方面提出了很多宝贵意见，并建议增配练习题，有的读者对印刷与编写的一些错漏编制了详细的勘误表。这是对我们工作的鼓励和支持，也是提高修订质量不可缺少的条件。借此再版之机，向关怀和支持我们工作的广大读者表示深切谢意。

此次修订，根据 1980 年 5 月在上海高校理科数学教材编审委员会会议上审订的高师《数学分析教学大纲》，对原《讲义》的内容作了小量的增删。在保持原《讲义》通俗易懂，便于自学的前提下，对体例、格式、叙述等作了较大的修改。力求使原《讲义》的优点得到发展，缺点得到克服。其中函数与极限两章是重新编写的。函数的讲法适应了新大纲的要求。极限的讲法注意了与现行高中《数学》的衔接，既便于自学，又有利于指导中学的极限教学。

此次修订，每节(个别除外)之后都配有一定数量的练习题，对较难的题给了提示，书后附有计算题与判别题的答案。为了满足读者学习《数学分析》的不同要求，在每个练习题(个别除外)中分为甲类题(在符号“****”之前)与乙类题(在符号“****”之后)。我们认为，高师数学专业二年制或三年制专修科或函授专修科，以本《讲义》作为《数学分析》代用教材，只做部分或全部甲类题就够了。一般来说，教师不要引导学生做乙类题。高师数学专业四年制本科或函授本科，以本《讲义》作为《数学分析》的试用教材，除做甲类题外，还要做部分或全部乙类题。如果学生做完全部练习题有困难，教师可选其中某些题作为习题课上的示范题或

习题题。

本《讲义》的内容都是新大纲要求的，故此次修订不排小字。师范专科学校使用本《讲义》，在保证学生学好上册内容的基础上，对下册内容应作必要删减。

此次修订，承蒙四川大学秦卫平副教授在百忙中审阅了全部修订稿，提了许多宝贵的意见和建议。对他为提高本《讲义》的质量所付出的辛勤劳动表示深切感谢。

尽管此次修订我们作了很大努力，但是由于我们水平有限，错误与不妥之处在所难免，敬希广大读者再予批评指正。

编 者

1981年7月于东北师大

目 录

| | |
|--|-------|
| 第一章 函数 | (1) |
| § 1.1. 函数 | (1) |
| 一、变量与区间(1) 二、函数概念(3) 三、函数的四则运算(8) | |
| 四、函数的图象(9) 五、数列(11) 练习题 1.1(12) | |
| § 1.2. 几种特殊的函数 | (14) |
| 一、有界函数(14) 二、单调函数(18) 三、奇函数与偶函数(19) 四、 | |
| 周期函数(20) 练习题 1.2(21) | |
| § 1.3. 复合函数与反函数 | (23) |
| 一、复合函数(23) 二、反函数(25) 三、初等函数(29) 练习题 1.3 | |
| (33) | |
| 第二章 极限 | (35) |
| § 2.1. 数列极限 | (35) |
| 一、极限思想(35) 二、数列 $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$ 的极限(37) 三、数列极限概念 | |
| (40) 四、例(42) 练习题 2.1(47) | |
| § 2.2. 收敛数列 | (49) |
| 一、收敛数列的性质(49) 二、收敛数列的四则运算(51) 三、数列的收 | |
| 敛判别法(56) 练习题 2.2 (64) | |
| § 2.3. 函数极限 | (67) |
| 一、当 $x \rightarrow \infty$ 时,函数 $f(x)$ 的极限(67) 二、例(I)(70) 三、当 $x \rightarrow a$ 时, | |
| 函数 $f(x)$ 的极限(71) 四、例(II)(75) 练习题 2.3(79) | |
| § 2.4. 函数极限定理 | (79) |
| 一、函数极限的性质(79) 二、函数极限与数列极限的关系(82) 三、函 | |
| 数极限存在判别法(85) 四、例(89) 练习题 2.4 (91) | |
| § 2.5. “无穷小与无穷大” | (94) |
| 一、无穷小(94) 二、无穷大(94) 三、无穷小的比较(97) 练习题 2.5 | |
| (99) | |
| 第三章 连续函数 | (101) |
| § 3.1. 连续函数 | (101) |

| | |
|---|-------|
| 一、连续函数概念(101) 二、例(103) 三、不连续点及其分类(105) 四、闭区间上连续函数的性质(108) 练习题 3.1(111) | |
| § 3.2. 初等函数的连续性..... | (113) |
| 一、连续函数的性质和四则运算(113) 二、初等函数的连续性(115) 练习题 3.2(117) | |
| 第四章 实数的连续性 | (119) |
| § 4.1. 实数连续性定理..... | (119) |
| 一、闭区间套定理(119) 二、确界定理(121) 三、有限覆盖定理(125) 四、柯西收敛准则(127) 练习题 4.1(129) | |
| § 4.2. 闭区间上连续函数性质的证明..... | (130) |
| 一、性质的证明(130) 二、一致连续性(133) 练习题 4.2(138) | |
| 第五章 导数与微分 | (140) |
| § 5.1. 导数..... | (140) |
| 一、实例(140) 二、导数概念(143) 三、例(145) 练习题 5.1(150) | |
| § 5.2. 求导法则及导数公式..... | (152) |
| 一、导数的四则运算(152) 二、反函数求导法则(157) 三、复合函数求导法则(159) 四、初等函数的导数(164) 练习题 5.2(169) | |
| § 5.3. 隐函数与参数方程求导法则..... | (172) |
| 一、隐函数求导法则(172) 二、参数方程求导法则(176) 练习题 5.3(179) | |
| § 5.4. 微分..... | (181) |
| 一、微分概念(181) 二、微分的运算法则和公式(185) 三、微分在近似计算上的应用(186) 练习题 5.4(188) | |
| § 5.5. 高阶导数与高阶微分..... | (189) |
| 一、高阶导数(189) 二、莱布尼兹公式(192) 三、高阶微分(196) 练习题 5.5(198) | |
| 第六章 微分学基本定理及其应用 | (201) |
| § 6.1. 中值定理..... | (201) |
| 一、洛尔定理(201) 二、拉格朗日定理(204) 三、柯西定理(206) 四、例(207) 练习题 6.1(212) | |
| § 6.2. 洛比达法则..... | (214) |
| 一、 $\frac{0}{0}$ 型(214) 二、 $\frac{\infty}{\infty}$ 型(219) 三、其它待定型(221) 练习题 6.2(225) | |

| | |
|---|--------------|
| § 6.3. 泰勒公式..... | (226) |
| 一、泰勒公式 (226) 二、泰勒公式的余项 (230) 三、常用的几个展开式 (233) 练习题 6.3(236) | |
| § 6.4. 导数在研究函数上的应用..... | (238) |
| 一、函数的单调性(238) 二、不等式定理(242) 三、极值(243) 四、曲线的凹凸性(254) 五、曲线的渐近线(258) 六、描绘函数图象(262) 练习题 6.4(266) | |
| 第七章 不定积分..... | (270) |
| § 7.1. 不定积分..... | (270) |
| 一、原函数与不定积分的概念(270) 二、不定积分的运算法则与公式表(272) 练习题 7.1(276) | |
| § 7.2. 分部积分法与变量替换法..... | (277) |
| 一、分部积分法(278) 二、变量替换法(282) 练习题 7.2(290) | |
| § 7.3. 有理函数的不定积分..... | (292) |
| 一、代数的预备知识(292) 二、有理函数的不定积分(295) 练习题 7.3(301) | |
| § 7.4. 简单无理函数与三角函数的不定积分..... | (301) |
| 一、简单无理函数的不定积分(301) 二、三角函数的不定积分(308) 练习题 7.4(314) | |
| 第八章 定积分..... | (316) |
| § 8.1. 定积分..... | (316) |
| 一、实例(316) 二、定积分概念(320) | |
| § 8.2. 可积准则..... | (322) |
| 一、小和与大和(322) 二、可积准则 (326) 三、三类可积函数(328) 练习题 8.2(332) | |
| § 8.3. 定积分的性质..... | (334) |
| 一、定积分的性质(334) 二、积分中值定理(340) 练习题 8.3(342) | |
| § 8.4. 定积分的计算..... | (344) |
| 一、按照定义计算定积分(344) 二、积分上限函数(346) 三、定积分的基本公式(348) 四、定积分的分部积分法(350) 五、定积分的变量替换法(353) 练习题 8.4(358) | |
| § 8.5. 定积分的应用..... | (362) |
| 一、微元法(362) 二、平面区域的面积(364) 三、平面曲线的弧长(369) | |

| | | | |
|----------------------------|-----------------|--------------|---------------|
| 四、利用截面面积计算体积 (375) | 五、旋转体的侧面积 (379) | 六、变力作功 (381) | 练习题 8.5 (383) |
| § 8.6. 定积分的近似计算..... (386) | | | |
| 一、说明 (386) | 二、梯形法 (387) | 三、抛物线法 (390) | 练习题 8.6 (394) |
| 附录 希腊字母表 | | | (395) |
| 练习题答案 | | | (397) |

第一章 函 数

在自然科学、工程技术,甚至在某些社会科学中,函数是被广泛应用的数学概念之一,其重要意义远远超出了数学范围.在数学中函数处于基础的核心地位.函数不仅是构成中学数学的主体,函数也是数学分析这门课程研究的对象.广义地讲,几乎现代数学的每个分支,函数都是研究的对象之一.

中学数学应用“集合”与“对应”已经给出了函数概念,并在此基础上讨论了一些简单函数的性质.本章除对中学数学已讲过的函数及其性质重点复习外,根据本课与后继课的需要,对函数作必要的补充.

§ 1.1. 函 数

一、变量与区间

唯物辩证法指出,宇宙中的一切事物,从自然界中很小的单位,如电子,到很大的物体,比如太阳,都是处于不间断的运动变化之中,事物的运动是绝对的,事物的静止是相对的.这是物质世界的一个普遍规律.在事物的运动过程中,必然表现为某些量的变化.在某个运动过程中,有的量时时或处处变化着,称为**变量**;有的量时时或处处保持相对静止状态,称为**常量**.例如,客机在两站之间的飞行过程中,飞机距地面的高度、距两站之间的距离以及汽油的储存量等都是变量.乘客的人数、行李包裹的重量等都是常量.再例如,在圆的半径增加的过程中,圆的周长、圆的面积都是变量,而圆的周长与其直径之比却是常数(即圆周率 π).常量也可以看作是一种特殊的变量,即在某个运动过程中,量皆取相同的数值.

我们知道，纯数学研究的对象是抽象的数与形。数与量是有区别的。数是抽象的，量是具体的。于是，变数是变量的抽象，常数是常量的抽象。在基础课程中，常常要将数与数之间的某些规律应用到实际问题中去，从而给数赋予量的具体意义，因此在数学分析这个基础课程中，数与量不加区别，常常将“变数”说成“变量”，将“常数”说成“常量”。

数学分析是建立在实数的基础上，本书所说的数都是实数，除特殊声明外，超出了实数范围认为是没有意义的。我们经常用字母

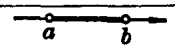
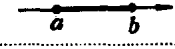
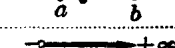
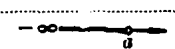
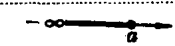

$$x, y, z, t, \dots \text{ 与 } a, b, c, d, \dots$$

分别表示变量(变数)与常量(常数)。

关于集合的初步知识读者在中学数学(十年制学校高中数学第一册)已经学习了，本书不再重述。

实数全体组成的集合称为实数集，表为 \mathbf{R} 。为了叙述简便，本书所说的“数集”都是指实数集 \mathbf{R} 的子集。

区间是特殊的实数集 \mathbf{R} 的子集。现将各种区间的定义、名称、符号及图象列表如下(a 与 b 是二数，且 $a < b$)：

| 定 义 | 名 称 | 符 号 | 图 象 ^① |
|-------------------------|------|----------------|---|
| $\{x a < x < b\}$ | 开区间 | (a, b) |  |
| $\{x a \leq x \leq b\}$ | 闭区间 | $[a, b]$ |  |
| $\{x a < x \leq b\}$ | 半开区间 | $(a, b]$ |  |
| $\{x a \leq x < b\}$ | 半开区间 | $[a, b)$ |  |
| $\{x a < x\}$ | 无限区间 | $(a, +\infty)$ |  |
| $\{x a \leq x\}$ | 无限区间 | $[a, +\infty)$ |  |
| $\{x x < a\}$ | 无限区间 | $(-\infty, a)$ |  |
| $\{x x \leq a\}$ | 无限区间 | $(-\infty, a]$ |  |

① 各种区间的图象都是在数轴上，这里的图象没有画原点。

我们常常说,“区间……”,它是什么样的区间,由跟随区间后面的符号确定.例如,区间 $[a, b]$,这是闭区间;区间 $(-\infty, a)$,这是无限区间,等等.还有几个特殊情况:

区间 $(-\infty, +\infty) = \{x | -\infty < x < +\infty\} = \mathbf{R}$,即实数集.

开区间 $(a-\delta, a+\delta) = \{x | |x-a| < \delta\}$,其中 δ 是某个正数,称为 a 的邻域(或 a 的 δ 邻域).

在 a 的邻域 $(a-\delta, a+\delta)$ 内去掉 a ,即 $\{x | 0 < |x-a| < \delta\}$,称为 a 的去心邻域.

我们已知,数的图象是数轴上的点.反之,数轴上点的坐标又是数.因为实数集 \mathbf{R} 与数轴上的所有点是一一对应的,所以数与点不加区别.我们常常将“数 a ”说成“点 a ”,反之亦然.

二、函数概念

在一个自然现象或技术过程中,常常有几个量同时变化,它们的变化并非彼此无关,而是互相联系着.这是物质世界的一个普遍规律.下面列举几个两个变量互相联系着的例子:

例 1. 真空中自由落体,物体下落的时间 t 与下落的距离 s 互相联系着.如果物体距地面的高度为 h ,对任意时间

$$t \in \left[0, \sqrt{\frac{2h}{g}}\right]^{\textcircled{1}}$$

都对应一个距离 s .已知 t 与 s 之间的对应关系是

$$s = \frac{1}{2}gt^2,$$

其中 g 是重力加速度,是常数.

例 2. 球的半径 r 与该球的体积 V 互相联系着.对任意半径

^① 当 $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ 时,由 $s = \frac{1}{2}gt^2$,有 $s = h$,即物体下落到地面.

$r \in [0, +\infty)$ 都对应一个球的体积. 已知 r 与 V 之间的对应关系是

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3,$$

其中 π 是圆周率, 是常数.

例 3. 某地某日时间 t 与温度 T 互相联系着 (如图 1.1). 对 13 时至 23 时内的任意时间 t 都对应着一个温度 T . 已知 t 与 T 的对应关系用图 1.1 中的温度曲线表示. 横坐标表示时间 t , 纵坐标表示温度 T . 曲线上任意点 $P(t, T)$ 表示在时间 t 对应着的温度是 T .

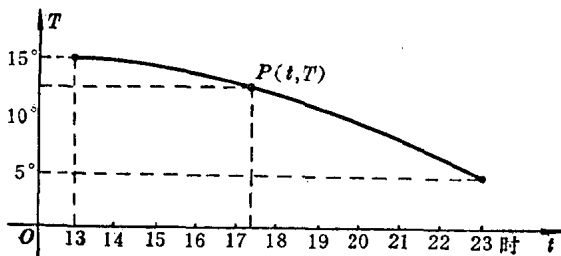


图 1.1

例 4. 在标准大气压下, 温度 T 与水的体积 V 互相联系着, 实测如下表:

| | | | | | | | | |
|--------------------------|-----|--------|--------|--------|--------|---------|---------|---------|
| 温 度 (百度表) | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 |
| 体 积 (cm^3) | 100 | 99.990 | 99.987 | 99.990 | 99.998 | 100.012 | 100.032 | 100.057 |

对 $\{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$ 中每个温度 T 都对应一个体积 V . 已知 T 与 V 的对应关系用上面表格表示.

例 5. 对任意 $x \in \mathbb{R}$ 都对应一个数 $y = x^2$, 即 x 与 y 之间的对应关系是

$$y = x^2.$$

例 6. 对任意 $x \in [-1, 1]$ 都对应一个数 $y = \sqrt{1-x^2}$, 即 x 与 y 之间的对应关系是

$$y = \sqrt{1-x^2}.$$

例 7. 对任意 $x \in \mathbf{R}$ 都对应一个数 $y = \sin x$, 即 x 与 y 之间的对应关系是

$$y = \sin x.$$

例 8. 对任意 $x \in (-5, \pi]$ 都对应一个数 $y = 3x^2 + x - 1$, 即 x 与 y 之间的对应关系是

$$y = 3x^2 + x - 1.$$

上述前四个实例, 分属于不同的学科, 实际意义完全不同. 但是, 从数学角度看, 它们与后四个例子却有共同的特征: 都有两个数集和一个对应关系, 对其中一个数集的任意数, 按照对应关系都对应实数集 \mathbf{R} 中的唯一一个数. 于是, 有如下的函数概念:

定义 有非空数集 A 与实数集 \mathbf{R} , 如果对数集 A 中的任意数 x , 按照对应关系 f 都对应实数集 \mathbf{R} 中唯一一个数 y , 称对应关系 f 是定义在数集 A 上的函数, 表为

$$f: A \rightarrow \mathbf{R}.$$

数 x 对应的数 y 称为 x 的函数值, 表为 $y = f(x)$. x 称为自变量, y 称为因变量. 数集 A 称为函数 f 的定义域, 函数值的集合称为函数 f 的值域, 表为 $f(A)$, 即

$$f(A) = \{y \mid y = f(x), x \in A\} \subset \mathbf{R}.$$

根据函数定义, 不难看到, 上述八例皆为函数的实例.

关于函数概念的几点说明:

1. 用符号“ $f: A \rightarrow \mathbf{R}$ ”表示 f 是定义在数集 A 上的函数, 十分清楚、明确. 特别是在抽象的数学学科中使用这个函数符号更显得方便. 但是, 在数学分析中, 一方面要讨论抽象的函数 f ; 另一

方面又要讨论大量具体的函数。在具体函数中需要将对应关系 f 具体化,使用这个函数符号就有些不便。为此在本书中我们约定,将“ f 是定义在数集 A 上的函数”用符号“ $y=f(x), x \in A$ ”表示。当不需要指明函数 f 的定义域时,又可简写为“ $y=f(x)$ ”,有时甚至笼统地说“ $f(x)$ 是 x 的函数(值)”。严格地讲,这样的符号和叙述混淆了函数与函数值。但是,这仅是为了方便而作的约定。

2. 在函数概念中,对应关系 f 是抽象的,只有在具体函数中,对应关系 f 才是具体的。例如,在上述几个例子中:

例 1, f 是一组运算: t 的平方乘以 $\frac{1}{2}g$ ($s = \frac{1}{2}gt^2$)。

例 2, f 是一组运算: r 的立方乘以 $\frac{4}{3}\pi$ ($V = \frac{4}{3}\pi r^3$)。

例 3, f 是图 1.1 所示的曲线。

例 4, f 是第 4 页上的表格。

例 6, f 也是一组运算: x 的平方,乘以 -1 ,再加 1,最后开平方(取算术根)。

为了对函数 f 有个直观形象的认识,可将它比喻为一部“数值变换器”。我们将任意 $x \in A$ 输入到数值变换器之中,通过 f 的“作用”,输出出来的就是 y 。不同的函数就是不同的数值变换器(如图 1.2)。

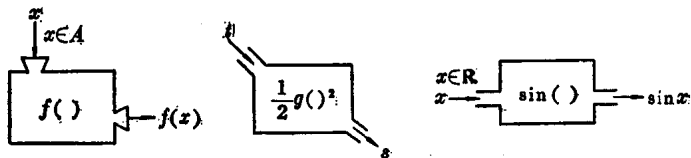


图 1.2

3. 根据函数定义,给定一个函数一定要指出函数的定义域。但是,有时为了方便并不指出函数 $y=f(x)$ 的定义域,这时认为函

数的定义域是自明的,即定义域是使函数 $y=f(x)$ 有意义的实数 x 的集合 $A=\{x|f(x)\in\mathbf{R}\}$. 例如,给定的函数 $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ 没有指出它的定义域,那么它的定义域就是使函数 $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ 有意义的实数 x 的集合,即闭区间 $[-1,1]=\{x|\sqrt{1-x^2}\in\mathbf{R}\}$. 但是,在某些特殊的情况,必须明确指出函数的定义域. 如上述的例8,函数 $f(x)=3x^2+x-1, x\in(-5, \pi]$. 尽管对任意 $x\in\mathbf{R}$, 函数 $f(x)=3x^2+x-1$ 都有意义. 但是,我们讨论的这个函数仅限制在区间 $(-5, \pi]$ 上.

在实际问题中,函数的定义域还要受实际意义的约束. 例如,上述的例2,半径为 r 的球的体积 $V=\frac{4}{3}\pi r^3$. 从抽象的函数来说, r 可取任意实数. 但是,从它的实际意义来说,半径 r 不能取负数. 因此,它的定义域是区间 $[0, +\infty)$.

4. 函数定义指出,任意 $x\in A$ 对应唯一一个 $y\in\mathbf{R}$, 这种对应称为由 A 到 \mathbf{R} 中的单值对应. 但是,反之,一个 $y\in f(A)$ 就不一定只对唯一的一个 $x\in A$ (如图 1.3). 这是因为,在函数定义中只是说,一个 $x\in A$ 对应唯一一个 $y\in\mathbf{R}$, 并没有说不同的 x 对应不同的 y , 即不同的 x 可能对应相同的 y . 如图 1.3, 不同的 x_1 与 x_2 对应同一个 $y=y_0$. 反之,一个 $y=y_0$ 就对应两个不同的 x_1 与 x_2 , 即

$$f(x_1)=f(x_2)=y_0, \quad x_1\neq x_2.$$

例如,函数 $f(x)=x^2$. 对任意 $y=a^2>0$, 都对应两个不同的 x 值 $-a$ 与 a , 即

$$f(-a)=f(a)=a^2.$$

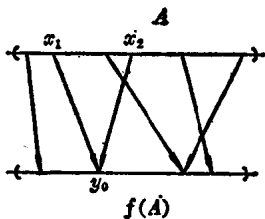


图 1.3

再例如,函数 $f(x)=\sin x$. 对 $y=1$ 对应无限多个不同的 x 值