

实变数函数论

C. 卡拉皆屋鐸利

科学出版社

实变数函数论

C. Carathéodory 著

武 崇 林 译

科 学 出 版 社

內 容 提 要

本書是 Carathéodory 所著的实变数函数論，原書为德文本，是一本經典著作。

全書共有十一章：引論及第一章是講实数理論与点集合；第二、三兩章为极限与函数概念；第四、五、六章講距离、測度及綫性变换理論；第七章可測函数；第八、九章是講不定积分理論；第十章、第十一章講單变数与多变数函数理論。

這本書理論严格而詳細，可作数学系参考書或教本。

实 变 数 函 数 論

原著者 C. Carathéodory

翻譯者 武 崇 林

出版者 科 学 出 版 社

北京朝陽門大街 117 号
北京市書刊出版業營業許可証出字第 061 号

印刷者 上海中科艺文联合印刷厂

总經售 新 华 書 店

1957年12月第 一 版 書号：0982 字数：656,000
1957年12月第一次印刷 开本：787×1092 1/18
(滬)00911—2,711 印張：34 2/9 頁碼：3

定价：(10)5.80 元

中 譯 本 序

本書系根据 C. Carathéodory 著“实函数論講義”(Vorlesungen über reelle Funktionen) 1927 年第二版由德文版譯出。原書乃是实函数論方面經典著作之一, 不需在此再作进一步的介紹。譯者武崇林先生历任东北大学、交通大学教授多年, 解放后兼任交通大学数学系主任职, 院系調整后任华东师范大学数学系教授, 于1953 春病逝。为了便利讀者, 原稿曾由本系講師賴英华先生在譯名的标准化及譯文的通俗化方面作了一些加工, 并誌于此。

华东师范大学数学系 孙澤瀛 1956 年 6 月

第二版序

在一些時間以前就感到需要這本書的第二版，由于第二版不是重新排版而是机械地重印，因此本書不能作很大的修改。

除了一些小的改善外，首先根据 C. R. Jul. Wolff 先生 (177[1923]p. 863) 之註解对于容量不可测之点集之一节 (§332—334) 作了修改，又关于連續函数定义域之推广 (§541—543) 也作了修改。在最后一个問題上以及 §367 我是采用了 1919 年数学杂志第五卷 Hausdorff 先生之講法。

此外，我曾將二个小的研究(它是不能插入正文中的)，作为附註放在書末。第一个附註包括一个关于 Vitali 定理非常美的註解，这是 H. Bohr 先生所授意的。

最后，我又把書后之参考書目排列得更适用一些，并且还照顧到一些新的文献。

C. Carathéodory

1927 年 5 月 21 日于慕尼黑。

第一版序

在实函数理論中，由于 H. Lebesgue 的研究而产生的变革过程，在今天看来，它的主要的几个方面可以認為已經結束了。因此我觉得，把这个理論从基础上有系統地建立起来，是很有必要的。这促使我把我在 1914 年第二学期在哥廷根(Göttingen)大学的講稿加以整理和作了一些补充而公布于世。

我曾力求把实函数理論叙述上必要的那些事实，不从任何其他假設，直接从本書开头之导論中所列举关于实数公理推出；并把它按照这样順序来安排，使所有的証明尽可能得自它們的自然根源，从而引导到具有很大普遍性的定理。

实函数論的基础建筑在点集合理論上，而它是不朽的 Cantor 的創造。在这些討論点集合論之章节里，我没有力求如象在專門講点集合論的書里所需要的那样完备程度——这种集合論書在德文書籍中已有很好的——而只是將在后面諸章节里真正用到或者对于理論的一般理解是不可缺的結果列出来。

C. Carathéodory

1917 年 11 月于哥廷根。

目 次

引 論	1
0.1 序次公理及結合公理	1
0.2 数集, 自然数公理	5
0.3 連續公理	9
0.4 絕對值	14
0.5 对应公理	15
第一章 論点集	16
1.1 定义	16
1.2 点集之基本运算	17
1.3 有穷及无穷点集, 可数性	20
1.4 节之定理	27
1.5 点集与全空間之比較	29
1.6 点集之类别	31
1.7 复盖定理	33
1.8 极限点及凝聚点定理	37
1.9 交集及結合集之极限点	41
1.10 相对概念	45
1.11 到处稠密及无处稠密点集	47
1.12 交集集合的定理	52
第二章 极限之概念	56
2.1 函数之普遍概念	56
2.2 上限及下限	57
2.3 收斂数列	69
2.4 正数之和	77
2.5 收斂級数	80
2.6 收斂点集	88

2.7	点集叙列之上限及下限	90
第三章	函数	97
3.1	定义	97
3.2	点函数之极限函数	98
3.3	半連續点及連續点	102
3.4	半連續函数及連續函数	109
3.5	振幅、点断及全断函数	113
3.6	單变数函数	116
3.7	單調函数	119
3.8	連續函数之構造	135
3.9	收斂函数叙列	137
3.10	均匀收斂	139
3.11	有界变分函数	146
第四章	距离及联結	156
4.1	点之距离	156
4.2	点集之距离	160
4.3	直徑	163
4.4	均匀連續	165
4.5	連續映象	167
4.6	連續統	169
4.7	点集之边緣	175
4.8	域	180
4.9	于連續函数之应用	184
第五章	容量及可測性	187
5.1	外容量	187
5.2	測度函数	193
5.3	可測性	200
5.4	正則測度函数	210
5.5	測度理論之应用于点集容量	224

5.6	可积点集. 空間胞網	236
5.7	Vitali 复盖定理	244
第六章	綫性体系	251
6.1	q -維空間之矢量	251
6.2	綫性矢量体系	252
6.3	直交性質	256
6.4	行列式	260
6.5	行列式之用于綫性矢量体系	267
6.6	一次方程	269
6.7	綫性点体系	273
6.8	綫性点变換	274
6.9	点集容量之变換	279
6.10	直交变換	284
6.11	容量不可測之点集	286
6.12	連續可測映象	290
6.13	測度函数理論之評論	295
第七章	可測函数	303
7.1	經由点集叙列之函数表示	303
7.2	可測函数	307
7.3	限值函数	316
7.4	等价函数	320
7.5	Baire 分类	323
7.6	类的概念在可測函数之应用	329
第八章	定积分	340
8.1	柱性集合	340
8.2	縱綫集合	343
8.3	非負函数之定积分	345
8.4	可測性及可和性	347
8.5	任意符号之可和函数	351

8.6	积分之估计及近似	367
8.7	Darboux 和	375
8.8	Riemann 积分	379
第九章	不定积分及加性全连续集合函数	388
9.1	不定积分	388
9.2	加性全连续集合函数	393
9.3	中导数	397
9.4	广义导数	407
9.5	导数之极限函数	414
9.6	加性全连续节函数	416
第十章	单变数函数	423
10.1	λ -变分	423
10.2	函数之导数	426
10.3	微分学之定理	429
10.4	连续函数之导数, 视为自变数之函数	436
10.5	简单(一次)积分及全连续函数	448
10.6	简单积分之置换理论	460
10.7	单调函数	466
10.8	可测映射	480
10.9	有界变分函数	484
10.10	Weierstrass 无处可微分函数	488
10.11	微分学之逆问题	492
10.12	简单(一次)积分之计算	497
10.13	广义积分	502
10.14	积分学之第二中值定理	507
10.15	连续函数定义域之扩展	511
第十一章	多变数函数	515
11.1	Fubini 定理	515
11.2	累次积分及重积分	521

11.3 偏引数, 可微分性.....	532
11.4 微分次序之更易性.....	539
11.5 两变数全連續函数.....	541
11.6 积分符下之微分.....	549
11.7 微分方程.....	553
附录I 关于 Vitali 复盖定理.....	574
附录II 关于内外容量之算术中数.....	578
参考文献.....	584
索 引.....	591

例 題 目 录

- 1) 开点集叙列, 皆为于 S 到处稠密而其交集則不具有这性質 §78
- 2) 发散級数 §106
- 3) 絕對收敛級数 §107
- 4) 非絕對收敛級数 §108
- 5) 二重叙列之和的不可更易性 §111
- 6) 点集叙列之极限 §120
- 7) 无处半連續函数 §128
- 8) 連續而非有限函数 §130
- 9) 小处有界而非有界函数 §130
- 10) 單調函数具有到处稠密之断点 §156
- 11) 二个变数函数, 虽每一个变数为連續而它并不为連續 §166
- 12) 非均匀有界函数叙列之极限为有界函数 §168
- 13) 連續函数叙列之极限函数为不連續 §169
- 14) 半連續函数所成叙列, 甚至單調叙列其极限函数为全断 §176
- 15) 連續函数在子节內不为有界变分 §184
- 16) 在一节內定义一不連續函数, 其值在 0 与 1 之間 §227
- 17) 测度函数之举例 §236
- 18) 非 Borel 点集(脚注) §251
- 19) 无处完全集 §276
- 20) 完全零集 §276
- 21) 全空間为其凝聚点之零集 §276 §277
- 22) 不可积之可数点集 §279
- 23) 开集为不可积者 §280
- 24) 不可积域 §280
- 25) 点集以全空間为其等量包, 而同时内容量等于零者 §334

- 26) 不可测——連續映象 §336
- 27) 非正则测度函数 §339
- 28) 对于 α 之每一值 $M(f=\alpha)$ 为可测, 此函数不可测 §346
- 29) 可测函数 $\varphi(u)$ 及单调函数之存在而 $\varphi(f(x))$ 为不可测者 §351
- 30) 函数数列定义域非为等量核者则均匀收敛 §354
- 31) 連續函数并非零类 §362
- 32) 一点集 A 上为一类函数, 而于 A 之闭包上 $(\bar{A})$ 所补成者为二类函数 §363
- 33) 函数至少为二类 §364
- 34) 一可测函数, 不与任何一类函数等价 §370
- 35) 可测而不可和函数 §395
- 36) 半連續函数, 不依 Riemann 为可积 §418
- 37) 极限函数, 依 Riemann 为可积而本身则否 §418
- 38) 依 Riemann 可积函数, 而不是有限类者 §423
- 39) 具有无限 λ -变分的函数 §459
- 40) 全連續函数于预定之零集上可微分且具有导数 $+\infty$, §492
- 41) 全連續函数于预定之到处稠密点集上可微且有导数 $+\infty$, §493
- 42) $f(u), u=\varphi(x)$ 为二全連續函数, 而 $f[\varphi(x)]$ 不为全連續 §494
- 43) 常数 λ -变分的連續函数单调而非常数之函数 §509
- 44) 单调函数与其反函数是常数 λ -变分 §512
- 45) 連續函数之导数可和性而为无限变分 §518
- 46) 无处可微函数 §519
- 47) 有界可测函数, 不为連續函数之导数 §523
- 48) 連續函数具有无限之导数而不是无限变分 §526
- 49) 一个非可和函数之重积分 §552
- 50) 具有有界偏引数而不可全微分之可偏微分函数 §561
- 51) 非全連續而是具有有界偏差商之函数 §568
- 52) Lipschitzschen 条件之举例 §583 §584 §585

引 論

1. 实函数論基于实数之理論,如欲溯其源流,則須依次討論正整数、負整数、分数以及无理数,并研求其性質。*)

但是我們之目的,則如能將数之性質中,選其一,对于其余之性質,統可以由此之一部演繹而得之者,即為已足。此等特殊之性質,我們称之为公理。公理之選擇,自不能即視作实数之理論[盖此中至少須論及公理之无矛盾性 (Widerspruchlosigkeit) 及独立性 (Unabhängigkeit) 以及其他],然我們因此即有公理可以依据,以便其余所有之性質,得以不作其他之假設,尽可推演而得之。

0.1 序次公理及結合公理

2. 序次公理:

I. 1. 数可序次,即是:若 a 及 b 表二数,則以下三种之可能

$$a=b, \quad a>b, \quad a<b$$

必居其一,且僅有一。

I. 2. 至少有不等之兩数存在。

I. 3. 自 $a>b$ 及 $b>c$ 之假設,必可得 $a>c$ 。

等式 $a=b$ 之义为 a 及 b 两符号所表为同一之数。故若 $a=b$, 則必 $b=a$, 且由 $a=b$, $b=c$ 两等式亦必得 $a=c$ 。其次自 $a=b$ 及 $b>c$ 或者 $a>b$, $b=c$ 必可得 $a>c$ 。普遍言之,若 $a=b$, 則于任何含有 a 之关系中,其符号 a 可以符号 b 代替之。

$a>b$ 之关系,讀作“ a 大于 b ”,为表达之便利,更引入以下之符号:

$$<, \neq, \geq, \leq.$$

其义如次:

$a<b$ 者乃 $b>a$ 之另一写法,讀作“ a 小于 b ”,

$a\neq b$ 讀为“ a 不等于 b ”,即謂或者 $a>b$, 或者 $a<b$, 因而并非 $a=b$,

*) 例如參閱 O. Hölder, Die Arithmetik in strenger Begründung. Programm-abhandl. d. philos. Fakult. zu Leipzig (Teubner 委託, Leipzig, 1914) 以及 A. Pringsheim, Vorlesungen über Zahlenlehre 第一册, (Teubner, Leipzig, 1916).

$a \geq b$ 义谓 “ a 大于或等于 b ”，或 “ a 不小于 b ”，即谓或 $a > b$ 或 $a = b$ ，但并非 $a < b$ ，

$a \leq b$ 义谓 “ a 小于或等于 b ”，或 “ a 不大于 b ”，即谓或 $a < b$ 或 $a = b$ ，但并非 $a > b$ 。

3. 加法公理:

II. 1. 若 a, b 为任意二数，则必有唯一之第三数 c 存在，称为 a, b 二数之和，而寓为

$$c = a + b.$$

II. 2. 和之运算具有交换性:

$$a + b = b + a.$$

II. 3. 和之运算具有结合性:

$$a + (b + c) = (a + b) + c.$$

II. 4. 若 $a > a'$ ，则 $a + b > a' + b$ 。

自 II. 4 直接推得第一，若 $a < a'$ ，则必有 $a + b < a' + b$ 之关系，第二，若有 $a + b > \text{或} = \text{或} < a' + b$ 之关系，则 a 亦必 $> \text{或} = \text{或} < a'$ 。后者之证明，三款皆同，比如设 $a + b > a' + b$ ，而假定 $a \leq a'$ ，则由 II. 4 将得 $a + b \leq a' + b$ ，与假设相违背。

两等式得以逐项相加，此亦自明：即谓如 $a = a', b = b'$ ，则 $a + b$ 必等于 $a' + b'$ 。

然自二不等式 $a > b$ 及 $a' > b'$ ，亦得逐项相加。盖因由 II. 4:

$$a + a' > b + a', \quad a' + b > b' + b.$$

再由 II. 2,

$$b + a' = a' + b, \quad b + b' = b' + b.$$

由是由 I. 3 得

$$a + a' > b + b'.$$

4. 减法公理:

III. 若 a 及 b 表二数，则至少必有一数 c 存在，满足 $a = b + c$ 之等式。此数 c 称为 a 及 b 的差。

应用以前之定理，得证明满足等式 $a = b + c$ 之 c ，仅有一个。因为自 $a = b + c$ 及 $a = b + c'$ ，必有 $b + c = b + c'$ ，因而由前节必 $c = c'$ 。

5. 兹引入零；由 III 知必有一数 ξ ，使对于某已知之 a ，有等式

$$a = \xi + a.$$

此数 ξ 实与 a 无何关系, 因自 $b = \xi' + b$, 先可得

$$b + a = (\xi' + b) + a,$$

再由加法公理, 得

$$a + b = (\xi' + a) + b,$$

因而 $a = \xi' + a$, 故再由减法之唯一性而知 $\xi = \xi'$. 此所定义之数称为零, 而写作 $\xi = 0$.

6. 今更区别正数及负数. 若一数 $p > 0$ 则称正数, 若 $n < 0$ 则 n 称为负数. 由 I. 1, 不等零之数, 不正则负.

定理 0-1-1. 若 p 为正数, 则 $a + p > a$.

由假设 $p > 0$, 故由 II. 4, $a + p > a + 0 = a$. 同理, 对负数 n 亦得证明等式 $a + n < a$.

定理 0-1-2. 若 $a > b$, 且命 $a = b + c$, 则 $c > 0$.

实际上, 若 $c \leq 0$, 则必可得 $b + c \leq b$, 因而与假设 $b + c = a > b$ 相抵触.

7. 两数 a 及 a' , 若其和为零 $a + a' = 0$, 则称反号. 若 $a = 0$, 则亦有 $a' = 0$, 因为 $a + a' = 0 = a$, 由加法定义可以知之. 反之, 若 $a > 0$, 则必 $a' < 0$, 因若 $a' > 0$, 则由前节知亦须有 $a + a' > a > 0$; 而若 $a' = 0$, 则 $a + a' = a > 0$, 二者均与假设抵触.

由公理 I. 2 加以方才得到的结果, 表示正数以及负数均必存在.

若 a 为已知, 则与 a 反号之数 a' , 由等式 $a + a' = 0$ 得唯一之决定, 今更引入负号而写 $a' = -a$, 表示 a 及 a' 为反号. 又以互为反号之定义, 关于二数为对称, 故亦有 $a = -a'$, 且因而 $a = -(-a)$.

若 $a = c + b$, 则 $c = a + (-b)$, 或简书之为 $c = a - b$; 因为自 $a = c + b$ 可得 $a + (-b) = c + b + (-b)$, 所以有 $a - b = c + 0 = c$.

8. 乘法公理:

IV. 1. 自二数 a 及 b , 必可得唯一之第三数 c , 称为二者之乘积. 我们写成 $c = a \cdot b$, 或者 $c = ab$.

关于乘法有以下定律:

IV. 2. 交换定律 $a \cdot b = b \cdot a$.

IV. 3. 结合定律 $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.

IV. 4. 分配定律 $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

IV. 5. 若 $p_1 > 0$ 又 $p_2 > 0$, 则 $p_1 p_2 > 0$.

设 a, b 为任意二数, 由前述, 我们有 $b = b + 0$, 所以

$$a \cdot b = a \cdot (b + 0),$$

由 IV. 4 知 $a \cdot b = a \cdot b + a \cdot 0$. 由零之定义, 知 $a \cdot 0 = 0$. 于是得

定理 0-1-3. 任意数与零之乘积等于零.

若 a 及 a' 为反号, 且 b 为任一数, 则由方才的定理, 因 $a + a' = 0$, 应用分配定律得

$$(a + a') \cdot b = a \cdot b + a' \cdot b = 0,$$

或即

$$(-a) \cdot b = -(a \cdot b).$$

自后之公式又可得

$$(-a) \cdot (-b) = -[a \cdot (-b)] = -[-(a \cdot b)] = a \cdot b.$$

此等“符号定则”与 IV. 5 结合即得如下:

定理 0-1-4. 正数与负数之乘积为负, 两负数之乘积为正.

特殊则有

定理 0-1-5. 两数 a 及 b 之乘积 $a \cdot b$ 之为零, 必在且仅在两数中有一为零之时.

盖因为其他之可能情形其乘积非正则负, 此为前面已见过的事实.

定理 0-1-6. 若 p 为正数且 $a > b$, 则亦有 $ap > bp$; 而若 n 为负数, 且 $a > b$, 则 $an < bn$.

因由假设我们可写 $a = b + p_1$, 其 p_1 为正. 所以

$$ap = bp + pp_1 > bp,$$

$$an = bn + p_1 n < bn.$$

9. 除法公理:

V. 若 $b \neq 0$, 且 a 为任一数, 则常至少有一 c 使 $a = c \cdot b$. 我们写 $c = a/b$ 或 $c = a:b$. 此数 c 称为以 b 除 a 的商.

$b \neq 0$ 之条件, 自然必要, 因为若 $b = 0$, 则方程 $a = c \cdot b$ 之能有解答, 仅在 $a = 0$ 之时, 而于此时, 则 c 可以完全任意.

但若 $b \neq 0$, 则可证明 c 可以由已知条件完全唯一决定. 因为若更有他数 c' , 则同时有 $cb = c'b$, 而且 $c \neq c'$, 故我们可写 $c' = c + k$, $k \neq 0$. 故得

$$c'b = (c + k)b = cb + kb \neq cb,$$

与假设相反。

10. 兹引入“ ϵ ”，由 V，若 $a \neq 0$ ，则必有一数 ϵ 存在，使 $a = \epsilon a$ ，此数与 a 实无关系。因为若 $b \neq 0$ ，且 $b = \epsilon' b$ ，则亦有 $ab = a\epsilon' b$ ，但由前节，除法的结果唯一，故亦必 $a = a\epsilon'$ ，因而 $\epsilon' a = \epsilon a$ 。然后再应用同一结果得所欲示之等式 $\epsilon = \epsilon'$ 。如此所定之数 ϵ ，我们以符号 1 表之。

若 p 为某一正数，则自 $p \cdot 1 = p > 0$ ，应用关于乘积符号的定理，推得 1 既非零，又非负数，所以得

$$1 > 0.$$

0.2 数集，自然数公理

11. 现代数学之一特征，为就数的全部统筹而并顾之，此即称为数集 (Zahlenmengen)。某单一数 a 属于所考之全部 $\{a\}$ 者，称作此数集的一元素 (Element)。此外尚论有所谓“空” (leere) 集者，即是不含任何元素的集。一集中两相异之元素，常表相异的二数。

若两集合 $\{a\}$ 及 $\{b\}$ 中， $\{b\}$ 之任何元素 b ，常为 $\{a\}$ 之一元素，则 $\{b\}$ 称作 $\{a\}$ 之子集 (Teilmenge)。于此，任何集亦系其本身之子集，且亦视空集为任何集之子集。若 $\{b\}$ 为 $\{a\}$ 之子集，但 $\{a\}$ 之元素有不属于 $\{b\}$ 者，则我们称 $\{b\}$ 为 $\{a\}$ 的真子集 (echte Teilmenge)。

12. 自然数公理:

VI. 1. 1 为自然数，且若 n 为自然数，则 $(n+1)$ 亦然。

VI. 2. 任何自然数之子集，含有 1，且如含有 k ，即含有 $(k+1)$ 者，与自然数之全集合相同。

自然数之集合，称作自然数系 (natürliche Zahlenreihe) (或自然数序)，表之如下：

$$1, 2, 3, \dots$$

其中 $2 = (1+1)$ ， $3 = (2+1)$ ，等等：

若 n 为一自然数，则所有满足条件

$$k \leq n$$

之自然数 k 的全部，乃自然数系之一真子集。因其不含有自然数 $(n+1)$ 的缘故。此子集称为自然数系迄 n 之片段 (或称截断) (Abschnitt der natürlichen Zahlenreihe)