实变数函数論

C. 卡拉皆屋鐸利

科学出版社

实变数函数論

C. Carathéodory 著

武 崇 林 譯

科 學 出 版 社

內 容 提 要

本書是 Carathéodory 所著的实变数函数論，原書为德文本，是一本經典著作。

全書共有十一章：引論及第一章是講实数理論与点集合；第二、三两章为极限与函数概念；第四、五、六章講距离、測度及綫性变换理論；第七章可測函数；第八、九章是講不定积分理論，第十章、第十一章講單变数与多变数函数理論。

这本書理論严格而詳細，可作数学系参考書或教本。

实 变 数 函 数 論

原著者　C. Carathéodory
翻譯者　武　崇　林
出版者　科　学　出　版　社
北京朝陽門大街 117 号
北京市書刊出版業營業許可証出字第061号
印刷者　上海中科艺文联合印刷厂
总經售　新　华　書　店

1957年12月第一版　書号：0982 字数：656,000
1957年12月第一次印刷　开本：787×1092 1/18
(滬)0001—2,711　印張：34 2/9 頁插：3

定价：(10)5.80 元

中譯本序

本書系根据 C. Carathéodory 著"实函数論講义"(Vorlesungen über reelle Funktionen) 1927 年第二版由德文版譯出. 原書乃是实函数論方面經典著作之一, 不需在此再作进一步的介紹. 譯者武崇林先生历任东北大学、交通大学教授多年. 解放后兼任交通大学数学系主任职,院系調整后任华东师范大学数学系教授,于1953春病逝. 为了便利讀者, 原稿曾由本系講师賴英华先生在譯名的标准化及譯文的通俗化方面作了一些加工,幷誌于此.

华东师范大学数学系 孙澤瀛 1956 年 6 月

第二版序

在一些时間以前就感到需要这本書的第二版，由于第二版不是重新排版而是机械地重印，因此本書不能作很大的修改.

除了一些小的改善外，首先根据 C. R. Jul. Wolff 先生 (177[1923]p. 863) 之註解对于容量不可测之点集之一节(§332—334)作了修改，又关于連續函数定义域之推广 (§541—543) 也作了修改. 在最后一个問題上以及 §367 我是采用了 1919 年数学杂誌第五卷 Hausdorff 先生之講法.

此外，我曾將二个小的研究(它是不能插入正文中的)，作为附註放在書末. 第一个附註包括一个关于 Vitali 定理非常美的註解，这是 H. Bohr 先生所授意的.

最后，我又把書后之参考書目排列得更适用一些，并且还照顧到一些新的文献.

C. Carathéodory

1927 年 5 月 21 日于慕尼黑.

第一版序

在实函数理論中，由于 H. Lebesque 的研究而产生的变革过程，在今天看来，它的主要的几个方面可以認为巳經結束了. 因此我覺得，把这个理論从基础上有系統地建立起来，是很有必要的. 这促使我把我在 1914 年第二学期在哥廷根(Göttingen)大学的講稿加以整理和作了一些补充而公布于世.

我曾力求把实函数理論叙述上必要的那些事实，不从任何其他假設，直接从本書开头之导論中所列举关于实数公理推出；并把它按照这样順序来安排，使所有的証明尽可能得自它們的自然根源，从而引导到具有很大普遍性的定理.

实函数論的基础建筑在点集合理論上，而它是不朽的 Cantor 的創造. 在这些討論点集合論之章节里，我沒有力求如象在專門講点集合論的書里所需要的那样完备程度——这种集合論書在德文書籍中巳有很好的——而只是將在后面諸章节里眞正用到或者对于理論的一般理解是不可缺的結果列出来.

C. Carathéodory

1917 年 11 月于哥廷根.

目　次

例题目录

引　論

1. 实函数論基于实数之理論，如欲溯其源流，則須依次討論正整数、負整数、分数以及无理数，并研求其性質.*)

但是我們之目的，則如能將数之性質中，遴选其一部，对于其余之性質，統可以由此之一部演繹而得之者，卽为已足．此等特殊之性質，我們称之为公理．公理之选擇，自不能卽視作实数之理論[盖此中至少須論及公理之无矛盾性 (Widerspruchslosigkeit) 及独立性 (Unabhängigkeit) 以及其他]，然我們因此卽有公理可以依据，以便其余所有之性質，得以不作其他之假設，尽可推演而得之.

0.1　序次公理及結合公理

2.　序次公理:

I. 1.　*数可序次，卽是：若 a 及 b 表二数，則以下三种之可能*

$$a=b,\quad a>b,\quad a<b$$

必居其一，且僅有一.

I. 2.　*至少有不等之兩数存在.*

I. 3.　*自 $a>b$ 及 $b>c$ 之假設，必可得 $a>c$.*

等式 $a=b$ 之义为 a 及 b 两符号所表为同一之数．故若 $a=b$，則必 $b=a$，且由 $a=b$，$b=c$ 两等式亦必得 $a=c$．其次自 $a=b$ 及 $b>c$ 或者 $a>b$，$b=c$ 必可得 $a>c$．普遍言之，若 $a=b$，則于任何含有 a 之关系中，其符号 a 可以符号 b 代替之.

$a>b$ 之关系，讀作"a 大于 b"，为表达之便利，更引入以下之符号：

$$<,\ \neq,\ \geqslant,\ \leqslant.$$

其义如次:

$a<b$ 者乃 $b>a$ 之另一写法，讀作"a 小于 b"，

$a\neq b$ 讀为"a 不等于 b"，卽謂或者 $a>b$，或者 $a<b$，因而并非 $a=b$，

---

*) 例如參閱 O. Hölder, Die Arithmetik in strenger Begründung. Programm-abhandl. d. philos. Fakult. zu Leipzig (Teubner 委託, Leipzig, 1914) 以及 A. Pringsheim, Vorlesungen über Zahlenlehre 第一册, (Teubner, Leipzig, 1916).

$a \geqslant b$ 义謂"a 大于或等于 b"，或"a 不小于 b"，卽謂或 $a>b$ 或 $a=b$，但幷非 $a<b$，

$a \leqslant b$ 义謂"a 小于或等于 b"，或"a 不大于 b"，卽謂或 $a<b$ 或 $a=b$，但幷非 $a>b$。

3. **加法公理**：

II. 1. 若 a, b 为任意二数，則必有唯一之第三数 c 存在，称为 ab 二数之和，而寫为

$$c=a+b.$$

II. 2. 和之运算具有交換性：

$$a+b=b+a.$$

II. 3. 和之运算具有結合性：

$$a+(b+c)=(a+b)+c.$$

II. 4. 若 $a>a'$，則 $a+b>a'+b$.

自 II. 4 直接推得第一，若 $a<a'$，則必有 $a+b<a'+b$ 之关系，第二，若有 $a+b>$ 或 $=$ 或 $<a'+b$ 之关系，則 a 亦必 $>$ 或 $=$ 或 $<a'$. 后者之証明，三款皆同，比如設 $a+b>a'+b$，而假定 $a \leqslant a'$，則由 II. 4 將得 $a+b \leqslant a'+b$，与假設相違背.

两等式得以逐項相加，此亦自明：卽謂如 $a=a', b=b'$，則 $a+b$ 必等于 $a'+b'$.

然自二不等式 $a>b$ 及 $a'>b'$，亦得逐項相加. 盖因由 II. 4：

$$a+a'>b+a',\quad a'+b>b'+b.$$

再由 II. 2,

$$b+a'=a'+b,\quad b+b'=b'+b.$$

由是由 I. 3 得

$$a+a'>b+b'.$$

4. **减法公理**：

III. 若 a 及 b 表二数，則至少必有一数 c 存在，滿足 $a=b+c$ 之等式. 此数 c 称为 a 及 b 的差.

应用以前之定理，得証明滿足等式 $a=b+c$ 之 c，仅有一个. 因为自 $a=b+c$ 及 $a=b+c'$，必有 $b+c=b+c'$，因而由前节必 $c=c'$.

5. 玆引入零；由 III 知必有一数 ζ，使对于某已知之 a，有等式

$$a=\zeta+a.$$

此数 ζ 实与 a 无何关系，因自 $b=\zeta'+b$，先可得

$$b+a=(\zeta'+b)+a,$$

再由加法公理，得

$$a+b=(\zeta'+a)+b,$$

因而 $a=\zeta'+a$，故再由减法之唯一性而知 $\zeta=\zeta'$. 此所定义之数称为零，而写作 $\zeta=0$.

6. 今更区别正数及負数. 若一数 $p>0$ 則称正数，若 $n<0$ 則 n 称为負数. 由 I. 1，不等零之数，不正則負.

定理 0-1-1. 若 p 为正数，則 $a+p>a$.

由假設 $p>0$，故由 II. 4，$a+p>a+0=a$. 同理，对負数 n 亦得証明等式 $a+n<a$.

定理 0-1-2. 若 $a>b$，且命 $a=b+c$，則 $c>0$.

实际上，若 $c\leqslant 0$，則必可得 $b+c\leqslant b$，因而与假設 $b+c=a>b$ 相抵触.

7. 两数 a 及 a'，若其和为零 $a+a'=0$，則称反号. 若 $a=0$，則亦有 $a'=0$，因为 $a+a'=0=a$，由加法定义可以知之. 反之，若 $a>0$，則必 $a'<0$，因若 $a'>0$，則由前节知亦須有 $a+a'>a>0$；而若 $a'=0$，則 $a+a'=a>0$，二者均与假設抵触.

由公理 I. 2 加以方才得到的結果，表示正数以及負数均必存在.

若 a 为已知，則与 a 反号之数 a'，由等式 $a+a'=0$ 得唯一之决定，今更引入負号而写 $a'=-a$，表示 a 及 a' 为反号. 又以互为反号之定义，关于二数为对称，故亦有 $a=-a'$，且因而 $a=-(-a)$.

若 $a=c+b$，則 $c=a+(-b)$，或簡書之为 $c=a-b$；因为自 $a=c+b$ 可得 $a+(-b)=c+b+(-b)$，所以有 $a-b=c+0=c$.

8. **乘法公理**：

IV. 1. 自二数 a 及 b，必可得唯一之第三数 c，称为二者之乘积. 我們写成 $c=a\cdot b$，或者 $c=ab$.

关于乘法有以下定律：

IV. 2. 交换定律 $a\cdot b=b\cdot a$.

IV. 3. 結合定律 $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$.

IV. 4. 分配定律 $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$.

IV. 5. 若 $p_1>0$ 又 $p_2>0$，則 $p_1p_2>0$.

設 a, b 为任意二数，由前述，我們有 $b=b+0$，所以

$$a\cdot b=a\cdot(b+0),$$

由 IV. 4 知 $a\cdot b=a\cdot b+a\cdot 0$. 由零之定义，知 $a\cdot 0=0$. 于是得

定理 0-1-3. 任意数与零之乘积等于零.

若 a 及 a' 为反号，且 b 为任一数，則由方才的定理，因 $a+a'=0$，应用分配定律得

$$(a+a')\cdot b=a\cdot b+a'\cdot b=0,$$

或即

$$(-a)\cdot b=-(a\cdot b).$$

自后之公式又可得

$$(-a)\cdot(-b)=-[a\cdot(-b)]=-[-(a\cdot b)]=a\cdot b.$$

此等"符号定則"与 IV. 5 結合卽得如下：

定理 0-1-4. 正数与負数之乘积为負，兩負数之乘积为正.

特殊則有

定理 0-1-5. 兩数 a 及 b 之乘积 $a\cdot b$ 之为零，必在且仅在兩数中有一为零之时.

盖因为其他之可能情形其乘积非正則負，此为前面已見过的事实.

定理 0-1-6. 若 p 为正数且 $a>b$，則亦有 $ap>bp$；而若 n 为負数，且 $a>b$，則 $an<bn$.

因由假設我們可写 $a=b+p_1$，其 p_1 为正. 所以

$$ap=bp+pp_1>bp,$$

$$an=bn+p_1n<bn.$$

9. 除法公理:

V. 若 $b\neq 0$，且 a 为任一数，則常至少有一 c 使 $a=c\cdot b$. 我們写 $c=a/b$ 或 $c=a:b$. 此数 c 称为以 b 除 a 的商.

$b\neq 0$ 之条件，自然必要，因为若 $b=0$，則方程 $a=c\cdot b$ 之能有解答，仅在 $a=0$ 之时，而于此时，則 c 可以完全任意.

但若 $b\neq 0$，則可証明 c 可以由已知条件完全唯一决定. 因为若更有他数 c'，則同时有 $cb=c'b$，而且 $c\neq c'$，故我們可写 $c'=c+k, k\neq 0$. 故得

$$c'b=(c+k)b=cb+kb\neq cb,$$

与假設相反.

10. 兹引入"一",由 V, 若 $a\neq 0$, 則必有一数 ϵ 存在, 使 $a=\epsilon a$, 此数与 a 实无关系. 因为若 $b\neq 0$, 且 $b=\epsilon' b$, 則亦有 $ab=a\epsilon' b$, 但由前节, 除法的結果唯一, 故亦必 $a=a\epsilon'$, 因而 $\epsilon' a=\epsilon a$. 然后再应用同一結果得所欲示之等式 $\epsilon=\epsilon'$. 如此所定之数 ϵ, 我們以符号 1 表之.

若 p 为某一正数, 則自 $p\cdot 1=p>0$, 应用关于乘积符号的定理, 推得 1 既非零, 又非負数, 所以得

$$1>0.$$

0.2　数集, 自然数公理

11. 現代数学之一特征, 为就数的全部統筹而并顧之, 此即称为数集 (Zahlenmengen). 某單一数 a 属于所考之全部 $\{a\}$ 者, 称作此数集的一元素 (Element). 此外尙論有所謂"空" (leere) 集者, 即是不含任何元素的集. 一集中两相异之元素, 常表相异的二数.

若两集合 $\{a\}$ 及 $\{b\}$ 中, $\{b\}$ 之任何元素 b, 常为 $\{a\}$ 之一元素, 則 $\{b\}$ 称作 $\{a\}$ 之子集 (Teilmenge). 于此, 任何集亦系其本身之子集, 且亦視空集为任何集之子集. 若 $\{b\}$ 为 $\{a\}$ 之子集, 但 $\{a\}$ 之元素有不属于 $\{b\}$ 者, 則我們称 $\{b\}$ 为 $\{a\}$ 的眞子集 (echte Teilmenge).

12. **自然数公理:**

VI. 1.　1 为自然数, 且若 n 为自然数, 則 $(n+1)$ 亦然.

VI. 2.　任何自然数之子集, 含有 1, 且如含有 k, 即含有 $(k+1)$ 者, 与自然数之全集合相同.

自然数之集合, 称作自然数系 (natürliche Zahlenreihe)(或自然数序), 表之如下:

$$1, 2, 3, \cdots\cdots$$

其中 $2=(1+1)$, $3=(2+1)$, 等等.

若 n 为一自然数, 則所有滿足条件

$$k\leqslant n$$

之自然数 k 的全部, 乃自然数系之一眞子集. 因其不含有自然数 $(n+1)$ 的緣故. 此子集称为自然数系迄 n 之片段(或称截断) (Abschnitt der natürlichen Zahlenreihe