

《信息、控制与系统》系列教材

自动控制原理

(下 册)

吴 麒 主 编

清 华 大 学 出 版 社

《信息、控制与系统》系列教材

自动控制原理

(下 册)

杜继宏 解学书 慕春棣 编著

主编 吴 麒

2007/1


清华大学出版社

内 容 简 介

本书是工科大学“自动控制原理”课程的教科书。在处理传统控制理论与状态空间控制理论的关系上,本书既不把二者截然分割,又不勉强“结合”,而采取“数学描述统一,工程研究分开”的方法。在状态空间控制理论的陈述方法上,本书努力避免单调繁冗的数学论证模式,而尽量联系工程实际。这些特点使本书既保持应有的理论水平,又适合于实际教学使用。

本书上册叙述控制系统的数学描述(传统的和状态空间的)和传统控制理论的大部分内容。下册除采样控制、非线性控制外,主要叙述状态空间控制理论和最优控制。

本书可作为工科大学电类专业和其他专业本科生的教科书,也可作为科技和工程人员的参考书。

(京)新登字 158 号

信息、控制与系统系列教材

自 动 控 制 原 理

(下册)

杜继宏 解学书 慕春棣 编著

主编 吴 麒

☆

清华大学出版社出版

北京 清华园

清华大学印刷厂印刷

新华书店总店科技发行所发行

☆

开本: 787×1092 1/16 印张: 28.75 字数: 680 千字

1992 年 4 月第 1 版 1992 年 4 月第 1 次印刷

印数: 0001—8000

ISBN 7-302-00957-0/TP·352

定价: 7.75 元

《信息、控制与系统》系列教材

出 版 说 明

《信息、控制与系统》系列教材是一套关于信息、控制和系统学科的基本理论和应用技术的高等学校教材。选题范围包括信号和信息处理、模式识别、知识工程、控制理论、自动化技术、传感技术、自动化仪表、系统理论、系统工程、机器人控制、智能控制、计算机应用和控制等方面。主要读者对象为自动控制、计算机、过程自动化、无线电等系科的高年级大学生和研究生，以及在这些领域和部门工作的科学工作者和工程技术人员。

信息、控制与系统科学是在本世纪上半叶形成和发展起来的新兴学科。它们的应用和影响已经遍及众多的部门和领域，贯穿其中的许多思想和方法已用于经济和社会现象的研究，而以这些学科为理论基础的自动化技术的广泛应用更是实现现代化的重要标志之一。这套系列教材，正是在这样的客观要求下，为适应教学和科研工作的需要而组织编写和出版的。它以清华大学自动化系近年来经过教学实践的新编教材为主，力求反映这些学科的基本理论和最新进展，并且反映清华大学在这些学科中科学研究和教学研究的成果。我们希望这套系列教材，既能为在校大学生和研究生的学习提供较为系统的教科书，也能为广大科技人员提供有价值的参考书。

组编和出版这套教材是一次尝试。我们热忱欢迎选用本系列教材的老师、学生和科技工作者提出批评、建议。

《信息、控制与系统》系列教材编委会

一九八七年三月

《信息、控制与系统》系列教材编委会

主 编 常 迥

编 委 常 迥 童诗白 方崇智

韩曾晋 李衍达 郑大钟

夏绍玮 徐培忠

责任编辑 蔡鸿程 王仁康

前 言

十余年来,我国陆续出版了好几种控制原理课程的大学教科书,其中大多数都各有特色,质量很好,满足了“文化革命”后对教材的急需,对培养新一代科技人才起了重要作用,为我国的社会主义教育事业作出了贡献。

十余年来,在控制原理课程的教学实践中,不少教师和学生感觉到了一些需要研究的问题。

首先,是怎样处理传统控制理论(常被称为“古典”控制理论)与状态空间控制理论(常被称为“现代”控制理论)这两部分内容的关系。有的院校把这两部分内容分开讲授,互不联系,甚至开成两门不同的课程。有的院校则力图把这两部分内容合并起来,在教学的每一段落都平行地讲授这两种理论的有关内容。这两种不同的处理方法也反映到教科书的编写上:有的教科书把这两部分内容截然分开,有的则力图把它们“结合”起来。按照这两种写法写的教科书,都有写得很好的。

本书编者通过自己的教学实践感到,将这两部分内容截然分开讲授,固然思路比较清楚,但容易使学生以为这两种理论是没有内在联系的,不可互通的;甚至从名称上望文生义,以为其中一种是过时的,应被淘汰的,另一种才是符合现代化需要的。反之,将这两部分内容处处“结合”起来平行讲授,固然强调了它们的联系,但却增加了教师讲课的困难。因为这两种理论的思路和方法事实上都很不相同,硬要把它们处处“结合”,有些地方就难免生硬勉强,有些地方可能会出现“牛刀杀鸡”的情况。

在本书中,编者尝试采用另一种处理方法。这就是:数学描述统一,工程研究分开。编者以为,描述动力学系统运动的各种数学工具,如微分方程、复变函数、矩阵和向量等,都已存在很久,并且有内在联系。用它们描述运动,在学理上容易融通。在讲授动力学系统的数学描述时,可以很自然地把这些方法统一起来讲,使学生对系统的运动规律有统一的深入的认识。另一方面,对控制系统运动的工程分析乃至综合和设计,则是工程技术问题,在历史发展过程中事实上已形成两套系统的方法。勉强地逐章平行讲授两种方法,对学生的学习未必有好处。不如基本上维持历史形成的思路体系,分别讲清,或许教学效果倒还好些。

十余年教学实践中感觉到的另一个问题是:在状态空间控制理论部分的教学,比较普遍地存在着控制理论与工程实际问题 and 工程实例结合不紧密的情况。在某些教科书中,不少重要的概念和关系停留在数学表达式上。有的甚至摹仿数学教科书的写法,把大部分内容表述为一系列定理。由于这些问题,状态空间控制理论的教学往往抽象枯燥,师生都感到棘手。这种状况多少与状态空间控制理论引进我国教学不过十多年,教学经验总结不够有关。不象传统控制理论在我国工科院校已有三十多年的教学实践,已经积累了较为成熟的经验,理论与工程结合得较好。所以,在控制原理课程的教学,传统部分与状态空间部分的陈述风格往往迥然不同,形成一个“断层”。

为了改善这种状况,本书编者作了一些努力,试图避免“引理—定理—证明—推论”

的单调模式，尽量从工程实例出发引入某些重要的概念和方法。有些次要的证明过程，如果本身不提供新的概念，则予删去。必要的证明也在陈述上力求避免繁冗，有的利用对偶性质加以简化。另外，本书还试图把状态空间控制理论的若干内容（例如关于观测器和鲁棒调节器的部分）用频率域的概念来解释和补充。在讨论解耦控制时，本书采用了逆系统方法这一新的研究成果。

关于最优控制的一章，虽然篇幅有限，编者还是努力在系统地叙述了变分法、极大值原理和动态规划等方法及其应用条件以外，也扼要地介绍了时间最优控制器和线性二次型最优控制器的综合设计方法。

虽然本书编者主观上作了一些努力，希望能编出一本有些特色的教科书，但编后回顾，自觉这个希望并未很好地实现。全书缺点不少，也不敢说完全没有错误。希望读者和有关高校师生多向我们批评指教。

本书上册共六章。除控制系统的数学描述外，讲授传统控制理论的大部分内容。下册共六章。除采样控制和非线性控制系统外，主要讲授状态空间控制理论和最优控制。

本书第一、二章由吴麒执笔，第三、四、五、六章和第九章由慕春棣执笔，第七、八、十、十一章由杜继宏执笔，第十二章由解学书执笔。全书上册经吴麒校改，下册主要由解学书校改。全书并经上海交通大学施颂椒、曹柱中、李静如等老师审校和提出许多宝贵的修改意见。编者谨在此致谢。

编 者
一九九一年七月

目 录

第七章 线性系统的结构分析	1
7.1 引言	1
7.2 特征值规范型	3
7.2.1 对角线规范型	4
7.2.2 特征向量和状态运动的模态	7
7.2.3 模态规范型	9
7.2.4 约当规范型	11
7.2.5 由可控或可观规范型化特征值规范型	20
7.3 状态可控性	23
7.3.1 状态可控性的实例	24
7.3.2 状态可控性定义	26
7.3.3 状态可控性的模态判据	30
7.3.4 状态可控性的代数判据	34
7.4 状态可观性和对偶原理	37
7.4.1 状态可观性的实例	37
7.4.2 状态可观性定义	39
7.4.3 状态可观性的模态判据	42
7.4.4 对偶原理	45
7.4.5 对偶原理的直接应用	51
7.5 系统的结构分解	51
7.6 状态可控性可观性与传递函数矩阵	56
7.6.1 单输入量单输出量系统的零极相消	56
7.6.2 多输入量多输出量系统的零极相消	60
7.6.3 状态可控性和可观性的频域判据	62
7.6.4 输出可控性	63
7.7 可控规范型和可观规范型	65
7.7.1 单输入量系统的可控规范型	65
7.7.2 用矩阵行列初等变换方法求可控规范型	70
7.7.3 单输出量系统的可观规范型	74
7.7.4 多变量系统的可控规范型	76
7.7.5 多变量系统的可观规范型	80
7.8 反馈控制对可控性和可观性的影响	83
7.8.1 输出反馈和状态反馈	83
7.8.2 反馈控制对可控性和可观性的影响	85
7.8.3 化完全可控的多输入量系统为对单输入量完全可控	87
7.9 传递函数矩阵的实现	91

7.9.1 实现和最小实现	91
7.9.2 标量传递函数的实现	94
7.9.3 传递函数矩阵的实现	96
7.9.4 直接寻找最小实现的方法	100
7.10 小结	106
习题	106

第八章 线性定常系统的综合 114

8.1 闭环系统的极点配置	114
8.1.1 单输入量系统的极点配置	114
8.1.2 多输入量系统极点配置的一种方法	122
8.1.3 闭环极点配置定理及其讨论	125
8.1.4 镇定问题	127
8.1.5 输入变换矩阵和静态特性	130
8.2 解耦问题	131
8.2.1 可解耦性	132
8.2.2 用逆系统方法实现闭环解耦控制	133
8.2.3 解耦阶常数的性质	135
8.2.4 积分型解耦系统的特点	137
8.2.5 闭环 α 阶极点配置	138
8.2.6 解耦系统的零点	140
8.3 状态重构问题	143
8.3.1 全维观测器	143
8.3.2 系统引入观测器后的频域性质	148
8.3.3 降维观测器	149
8.4 带有观测器的反馈控制系统	153
8.4.1 闭环系统结构及其极点分离性	154
8.4.2 闭环传递函数矩阵的零极相消	155
8.4.3 重构状态反馈和一种带补偿器输出反馈间的等价性	156
8.5 有外扰时控制系统的综合	157
8.5.1 调节器问题的提法	158
8.5.2 闭环系统实现静态无差的判据	161
8.5.3 外扰状态可直接测量时的综合方法	163
8.5.4 外扰状态观测器和内模原理	167
8.6 鲁棒调节器	172
8.6.1 常值扰动下的鲁棒调节器	173
8.6.2 鲁棒调节器的频域性质	176
8.6.3 鲁棒调节器的构造	178
8.7 小结	181
习题	182

第九章 采样控制系统	190
9.1 引言	190
9.2 采样过程和采样定理	191
9.3 保持器	196
9.4 Z 变换	198
9.4.1 线性常系数差分方程	198
9.4.2 Z 变换	200
9.5 脉冲传递函数	208
9.5.1 脉冲传递函数	208
9.5.2 串联环节的脉冲传递函数	210
9.5.3 闭环系统的脉冲传递函数	212
9.6 采样系统的稳定性	215
9.6.1 s 平面与 z 平面的映射关系	215
9.6.2 采样系统稳定的充分必要条件	216
9.6.3 参数对稳定性的影响	217
9.7 采样系统的动态特性分析	218
9.7.1 闭环极点和零点与脉冲响应的关系	219
9.7.2 采样系统的静态误差	221
9.8 采样系统的数字校正	222
9.9 离散系统的状态空间描述	226
9.9.1 化标量差分方程为离散状态方程	227
9.9.2 化脉冲传递函数为离散状态方程	228
9.9.3 线性连续系统状态方程的离散化	229
9.10 离散系统的可控性和可观测性问题	231
9.10.1 离散系统的可控性和可观测性判据	231
9.10.2 连续时间系统离散化后保持可控性和可观测性条件	233
9.11 小结	235
习题	235
第十章 李亚普诺夫方法分析控制系统稳定性	238
10.1 李亚普诺夫稳定性	238
10.1.1 运动稳定性和平衡状态	238
10.1.2 李亚普诺夫稳定性定义	239
10.1.3 二次型函数的定号性和 Sylvester (赛尔维斯特) 定理	242
10.2 李亚普诺夫稳定性基本定理	243
10.2.1 李亚普诺夫第一方法	243
10.2.2 李亚普诺夫稳定性基本定理	246
10.2.3 判断稳定和不稳定的定理	248
10.2.4 渐近稳定的附加条件	250
10.3 李亚普诺夫方法在线性定常系统中的应用	251
10.3.1 用李亚普诺夫第二方法判定线性定常系统的渐近稳定性	252

10.3.2	系统响应的快速性指标	256
10.3.3	参数的最优化设计	258
10.3.4	状态反馈的设计	260
10.4	构造李亚普诺夫函数的一些方法	261
10.4.1	克拉索夫斯基方法	262
10.4.2	变量梯度法	264
10.5	小结	267
	习题	267

第十一章 非线性控制系统 270

11.1	引言	270
11.2	相平面法的概念	272
11.2.1	相平面、相轨迹和相平面图	272
11.2.2	相轨迹的性质	273
11.3	相平面图的绘制方法	275
11.3.1	解析法	275
11.3.2	等倾线法	277
11.3.3	圆弧近似法	279
11.4	相平面图的分析	282
11.4.1	由相平面图求系统运动的时间函数	282
11.4.2	奇点和极限环	284
11.4.3	线性系统的相平面分析	287
11.4.4	非线性控制系统的相平面分析	289
11.5	非线性特性的描述函数	298
11.5.1	描述函数法的基本概念	298
11.5.2	描述函数的计算	300
11.6	非线性系统的描述函数分析	306
11.6.1	乃奎斯特图上的稳定性分析	306
11.6.2	在对数频率特性曲线上的稳定性分析	310
11.7	Popov (波波夫) 法	314
11.7.1	波波夫定理	314
11.7.2	线性部件在原点具有一个极点的情况	317
11.7.3	极点移动法	318
11.8	改善非线性系统性能的措施	320
11.8.1	对线性部分进行校正	320
11.8.2	改变非线性特性	320
11.9	利用非线性特性改善控制系统性能	321
11.9.1	非线性阻尼校正	321
11.9.2	非线性滞后校正	323
11.9.3	非线性积分器	325
11.9.4	非线性相角超前校正	326

11.10 小结	328
习题	328
第十二章 最优控制	333
12.1 最优控制的数学描述	333
12.2 向量、矩阵导数	339
12.3 函数极值、参数最优化问题	348
12.4 变分法及其在最优控制中的应用	357
12.4.1 变分法的基本概念	358
12.4.2 Euler (欧拉) 方程与横截条件	360
12.4.3 变分法在最优控制中的应用	368
12.5 极大值原理	376
12.5.1 自由末端的极大值原理	377
12.5.2 极大值原理的几种具体形式	379
12.6 时间最优控制	388
12.6.1 Bang-Bang 控制原理	389
12.6.2 二阶积分系统的时间最优控制	393
12.6.3 简谐振荡型受控系统的最速控制	398
12.7 动态规划	403
12.7.1 多级决策过程与最优性原理	403
12.7.2 线性离散系统二次型性能指标的最优控制	409
12.7.3 连续动态规划——哈密顿-雅可比方程	411
12.8 线性系统二次型性能指标的最优控制	419
12.8.1 二次型性能指标	419
12.8.2 有限时间状态调节器问题	421
12.8.3 定常状态调节器	428
12.8.4 最优反馈系统的稳定性	432
12.9 最优调节器问题的推广	435
12.9.1 输出调节器问题	435
12.9.2 非零给定点调节器问题	436
12.9.3 PI 调节器	441
12.9.4 最优跟踪问题	442
习题	445

第七章 线性系统的结构分析

7.1 引言

在第二章中已经说明, 描述系统内部运动的状态变量的选取不是唯一的, 但不同的状态向量之间必能用非奇异线性变换 (或称坐标变换) 互相联系. 比如, x 和 $\tilde{x}$ 同是描述系统内部运动的状态向量, 那么它们之间应由非奇异常数矩阵 P 相联系, 即

$$x = P\tilde{x}. \quad (7.1.1)$$

状态向量 x 的状态空间描述简记为 $\Sigma(A, B, C, D)$; 而状态向量 $\tilde{x}$ 的状态空间描述简记为 $\tilde{\Sigma}(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D})$, 两种描述的系数矩阵和状态转移矩阵之间的变换关系是:

$$\begin{cases} \tilde{A} = P^{-1}AP; \\ \tilde{B} = P^{-1}B; \\ \tilde{C} = CP; \\ \tilde{D} = D; \\ e^{\tilde{A}t} = P^{-1}e^{At}P. \end{cases} \quad (7.1.2)$$

满足非奇异线性变换关系的两个描述 Σ 和 $\tilde{\Sigma}$ 的特征多项式相等, 即

$$\det(sI - A) = \det(sI - \tilde{A}).$$

也就是说 A 和 $\tilde{A}$ 的特征值相同, Σ 和 $\tilde{\Sigma}$ 的运动模态相同. 此外, Σ 和 $\tilde{\Sigma}$ 的传递函数矩阵也是相同的, 即

$$G(s) = D + C(sI - A)^{-1}B = \tilde{D} + \tilde{C}(sI - \tilde{A})^{-1}\tilde{B} = \tilde{G}(s).$$

在本章 7.3 节和 7.4 节的讨论中, 我们还将看到 Σ 和 $\tilde{\Sigma}$ 的可控性以及可观性也是相同的.

这些结果表明, Σ 通过非奇异线性变换化为 $\tilde{\Sigma}$ 后, 系统的许多固有特性没有改变.

使用状态空间法进行系统分析或综合时, 常常采用非奇异线性变换的手段. 由一般结构的 $\Sigma(A, B, C, D)$ 进行分析或综合, 常常是不方便的. 针对特定的分析或综合目标, 可以采用非奇异线性变换, 得到特定结构 $\tilde{\Sigma}(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D})$. 这种方法或者突出了分析问题的主要矛盾; 或者使分析和综合方法一目了然. 这种特定结构的 $\tilde{\Sigma}(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D})$ 称为规范型. 根据不同的用途有特征值规范型、可控规范型、可观规范型等等. 其中特征值规范型仅系数矩阵 $\tilde{A}$ 具有规范的结构; 可控规范型是系数矩阵对 $(\tilde{A}, \tilde{B})$ 具有规范结构; 而可观规范型是另一系数矩阵对 $(\tilde{A}, \tilde{C})$ 具有规范结构. 在本章中要仔细研究这三种规范型的结构特点, 并讨论如何运用非奇异线性变换方法得到所需要的规范型.

控制系统的可控性和可观测性是状态空间描述方法中的两个很重要很基本的概念. 这两个概念是 R. E. Kalman (卡尔曼) 首先提出的.

在传统的控制理论中，只限定讨论控制作用（输入量）对输出量的控制，这两个量之间的关系唯一地由系统传递函数所确定，只要传递函数不为零，系统的输出量就是可控的。所以在传统控制理论中没有涉及可控性问题。另一方面，系统的输出量就是被控制量，对于一个实际的物理系统，它总是可以直接量测的，没有必要提出可观测性问题。

在状态空间描述中，除了输入量和输出量外，还引入了描述系统内部运动的状态向量。把状态向量看做系统的被控制量，就产生了状态能否被输入控制和能否由输出观测出来的问题。

(1) 能不能控制一个处于某个给定状态下的系统，即加上控制输入能不能使它在有限时间间隔内达到它的零状态？如果能做到，则称该给定状态为**可控态**。

(2) 给定一个在零状态的系统，能不能加上控制输入，强迫它在有限时间间隔内达到一个希望的状态？如果能做到，则称这个希望状态为**可达态**。

(3) 给定一个处于未知状态的系统，能不能根据一个有限时间间隔内量测到的输出量去观测它的特征，从而决定它的状态？如果能做到，则称该状态为**可观测态**。

下面给出一个一维的非线性例子，说明不是全部状态都是可控态，同时还说明不是全部状态都是可达态。

例 7.1 图 7.1 系统的状态空间是一维的，状态变量是电容器两端的电压 x 。图中的二极管是一个理想二极管，当它两端电压是正向时，电流就按参照方向流通；当端电压是负向时，二极管就不导通，电流为零。

当初始电压 $x(0)$ 为正值时，是不可控的。因为二极管只在 u 的正值大于 $x(0)$ 的情况下才通电，所以不论 u 取何值， $x(t)$ 或者停在 $x(0)$ 值，或者继续升高。不可能在有限时刻 $t = t_a$ ，使 $x(t_a) = 0$ 。

当初始电压为负值时，是可控的。比如， $x(0) = -4V$ ，如果要求 $t_a = 5s$ ，则可在 $(0, t_a)$ 内选择一个正的输入电压 $u(t) = x(0)e^{-5t/RC} / (e^{-5t/RC} - 1)$ ，使 $t = t_a = 5s$ 时，恰好 $x(t_a) = 0$ ，同时输入电压 $u(t_a) = 0$ 。

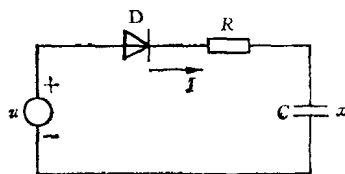


图 7.1

对于可达性，结果正好相反。所有 $x(t_a)$ 为正值时，是从零状态可达的；而所有 $x(t_a)$ 为负值时，是从零状态不可达的。

对本例的一维状态空间来说， $x > 0$ 的状态是不可控的，但是可达的； $x < 0$ 的状态是可控的，但是不可达的；而 $x = 0$ 既是可控的，又是可达的。

为了说明可控和不可控状态，可达和不可达状态，这里采用了一个非线性的例子。应当指出，对于线性连续时间系统，可控性和可达性是等价的。这点在 7.3 节中还要叙述。

本章讨论可控性（可达性）和可观性是在线性连续时间系统的范畴内。为此回顾一下线性时变系统的描述及状态运动分析是必要的。

线性时变系统的状态方程和输出方程是

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}; \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}(t)\mathbf{x} + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}. \end{cases} \quad (7.1.3)$$

其中 x 是 n 维状态向量, u 是 l 维输入向量, y 是 m 维输出向量。时变的系数矩阵的维数相应为 $A(t)$: $n \times n$, $B(t)$: $n \times l$, $C(t)$: $m \times n$, $D(t)$: $m \times l$ 。

状态方程的解为

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau, \quad (7.1.4)$$

其中 $\Phi(t, t_0)$ 是状态转移矩阵, 它是系数矩阵 $A(t)$ 的矩阵函数。对线性定常系统, 即 $A(t) = A$ 为常数矩阵时, $\Phi(t, t_0) = e^{A(t-t_0)}$ 是 A 的矩阵指数。

式 (7.1.4) 中, 等号右端的第一项 $\Phi(t, t_0)x(t_0)$ 叫做状态的自由运动, 而第二项叫做输入 $u(t)$ 对状态的强制运动, 又称零初值条件下的状态解。

如果对式 (7.1.3) 做非奇异线性变换, 变换阵是 $n \times n$ 的非奇异时变矩阵 $P(t)$, 即

$$x = P(t)\tilde{x}, \quad (7.1.5)$$

变换后的状态方程和输出方程是

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = \tilde{A}(t)\tilde{x} + \tilde{B}(t)u; \\ y = \tilde{C}(t)\tilde{x} + \tilde{D}(t)u. \end{cases} \quad (7.1.6)$$

变换前后系数矩阵满足如下等式, 即

$$\begin{cases} \tilde{A}(t) = P^{-1}(t)A(t)P(t) + P^{-1}(t)\dot{P}(t); \\ \tilde{B}(t) = P^{-1}(t)B(t); \\ \tilde{C}(t) = C(t)P(t); \\ \tilde{D}(t) = D(t); \\ \tilde{\Phi}(t, t_0) = P^{-1}(t)\Phi(t, t_0)P(t_0). \end{cases} \quad (7.1.7)$$

式 (7.1.7) 比式 (7.1.2) 更具有一般性。读者可以自行推证当系数矩阵及变换矩阵都为常数矩阵时, 式 (7.1.7) 就是式 (7.1.2)。

本章还将讨论系统的结构问题。对线性定常系统, 当给出它的输入-输出描述, 即 $m \times l$ 的传递函数矩阵 $G(s)$ 时, 如何根据等式

$$G(s) = D + C(SI - A)^{-1}B \quad (7.1.8)$$

推测出系统具有什么样的结构, 即 $\Sigma(A, B, C, D)$ 的系数矩阵是什么。这样的问题, 在控制理论中称为实现问题。

比较方便的是, 推测 $\Sigma(A, B, C, D)$ 具有规范型的结构。

显然, 根据式 (7.1.8) 得到的 $\Sigma(A, B, C, D)$ 是不唯一的, 那么就需研究这些 Σ , 除了传递函数矩阵相同外, 还有哪些共同的性质。

7.2 特征值规范型

在线性代数中已讨论过: 对于一个方矩阵 A , 总可以经过相似变换 $W^{-1}AW$, 把 A 化为对角线型矩阵或 Jordan (约当) 型矩阵。把相似变换方法应用到状态空间描述中就是非奇异线性变换。具有一般结构的系统 $\Sigma(A, B, C, D)$ 经过特定的非奇异线

性变换 W ，可以化为特征值规范型 $\tilde{\Sigma}(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D})$ ，其中只有系数矩阵 $\bar{A}$ 具有对角线型矩阵或约当型矩阵的规范结构，而系数矩阵 $\bar{B}, \bar{C}, \bar{D}$ 没有规范的结构形式。

本节讨论 Σ 在什么条件下，可以化成对角线型矩阵或者约当型矩阵 $\bar{A}$ 。同时，给出变换阵 W 的组成方法，变换阵列向量的性质。

本节还将讨论可控规范型、可观规范型与特征值规范型间的变换关系。

7.2.1 对角线规范型

当特征值规范型 $\tilde{\Sigma}$ 的系数矩阵 $\bar{A}$ 的对角线上元素为其特征值，而其余元素为零时，即

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \triangleq A, \quad (7.2.1)$$

则称 $\tilde{\Sigma}(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D})$ 为**对角线规范型**。

若变换阵的列向量用 w_i 表示，即

$$W = [w_1 \ w_2 \ \cdots \ w_n], \quad (7.2.2)$$

由变换公式 (7.1.2) 可以导出等式 $W\bar{A} = AW$ ，利用式 (7.2.2) 有

$$[w_1 \ w_2 \ \cdots \ w_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} = A[w_1 \ w_2 \ \cdots \ w_n],$$

利用分块矩阵的乘法规则，等式两边的 n 个列向量，组成 n 个等式，即

$$\lambda_i w_i = A w_i, \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \quad (7.2.3)$$

或写成

$$(\lambda_i I - A) w_i = 0, \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \quad (7.2.4)$$

其中 λ_i 是矩阵 A 的特征值， w_i 是关于 λ_i 的特征向量， $(\lambda_i I - A)$ 称为特征矩阵。

综上所述，可以得出如下结论：

系统 $\Sigma(A, B, C, D)$ 可以化为对角线规范型的充分必要条件是，系数矩阵 A 具有 n 个线性无关的特征向量，并且变换矩阵就由这 n 个线性无关的特征向量组成。

系数矩阵 A 具有 n 个线性无关的特征向量的情况有以下两种。

第一，系数矩阵 A 有 n 个互不相同的特征值。这种情况线性代数中已有详细介绍，这里不再赘述。

第二，系数矩阵 A 有重特征值 λ_i ，其重数为 σ_i ，但所有的重特征值 λ_i 都满足

$$\text{rank}(\lambda_i I - A) = n - \sigma_i. \quad (7.2.5)$$

这样，对 σ_i 重的特征值 λ_i ，都可从方程 (7.2.4) 中求出 σ_i 个线性无关的特征向量。 A 的全部 n 个特征向量都是线性无关的，可以组成非奇异的线性变换矩阵 W ，将 Σ 化为对角线规范型。

例 7.2

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

有 $\det(\lambda I - A) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)$ 。其特征值为 $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$ 。关于重特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ 的特征矢量可以由方程 (7.2.4) 解出。由于特征矩阵的秩

$$\text{rank}(\lambda_1 I - A) = \text{rank} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = 1,$$

由方程 $(\lambda_1 I - A)\boldsymbol{w}_i = 0$ 可以解出两个线性无关的特征向量

$$\boldsymbol{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{w}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

关于单特征值 $\lambda_3 = 2$ 的特征向量

$$\boldsymbol{w}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

故可以构成变换阵 W , 并求出逆矩阵 W^{-1} , 即

$$W = [\boldsymbol{w}_1 \ \boldsymbol{w}_2 \ \boldsymbol{w}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad W^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

变换后的系数矩阵

$$\bar{A} = W^{-1}AW = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

是对角线型矩阵。

应当指出, 在求特征向量 $\boldsymbol{w}_i$ 时, 由方程 (7.2.4) 得到的解向量不是唯一的, 而是一组线性相关的解向量。这样, 由特征向量组成的变换阵 W 也就不唯一。不过变换后的 $\bar{A} = A$ 除对角元素排列次序可能不一样外, 结果是一样的。但是, 变换后的系数矩阵 $\bar{B}$ 和 $\bar{C}$ 不是唯一的。

例如, 在例 7.2 中若已知

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \ 0 \ 0],$$

变换后的结果是

$$\bar{B} = W^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \bar{C} = CW = [1 \ 0 \ -1].$$

如果在求特征向量时, 取另外一组解向量构成变换阵, 并求其逆矩阵, 即