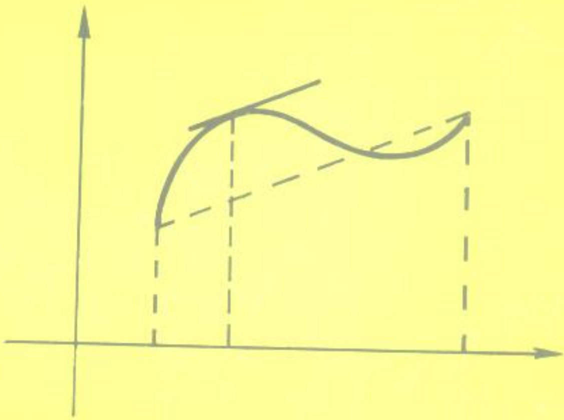
高等学校教材

高等数学（上册）

华南理工大学高等数学教研室 编

华南理工大学出版



高等数学（上册）
华南理

高 等 学 校 教 材

高等数学

上 册

华南理工大学高等数学教研室 编

华南理工大学出版社
·广州·

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(上册)/华南理工大学高等数学教研室编. —广州:华南理工大学出版社,1994,8

ISBN 7-5623-0664-8

Ⅰ. 高…

Ⅱ. 华…

Ⅲ. 高等数学

Ⅳ. O13

华南理工大学出版社出版发行

(广州五山　邮码 510641)

责任编辑:张巧巧　潘宜玲

各地新华书店经销

华南理工大学出版社电脑排版室排版

广州利达印刷厂印装

1994年8月第1版　1995年12月第2次印刷

开本 850×1168　1/32　印张 13.75　字数 346 千

印数:8 001—13 000

定价 14.50元

前　言

高等数学是工科各专业的一门重要基础理论课，它不仅要向学生传授本课程的基本理论和运算方法，而且对学生的科学思维和各种能力的培养有着重要的作用.

本书是根据国家教委颁发的《高等工业学校高等数学课程教学基本要求》而编写的. 在编写时，既注意数学学科的系统性和严谨性，又考虑工科学生的实际需要和接受能力，力求做到概念准确，条理清晰，重点突出，选材适当，例题多样，启迪思维. 在内容的处理方面，对某些章节的传统讲法作了一些改革.

参加本书编写的有：卢光盛、林举翰、洪潮兴、温向阳、许汉平、高英仪、陈必彬、朱惠媛、陆培光、刘平普、陈凤平、汪秀羌、黄新耀等. 全书由卢光盛总纂定稿.

编　者

于华南理工大学应用数学系

目　　录

第一章　函数、极限与连续

高等数学是变量数学，它要研究运动，研究无限过程．高等数学以函数作为研究对象，它的主要内容是微积分．而微积分的基本概念和计算方法，都是以极限的理论和方法为基础的．因此，作为高等数学的开篇，本章首先介绍函数与极限，以及由此引出的函数的连续性．

第一节　函　数

有关函数的一些知识，在中学数学中已分别在有关部分介绍过，本节将对这些内容进行复习概括与补充提高．

一、常量与变量

在研究自然现象或技术过程中，会遇到各种各样的量，依据这些量在变化过程中的取值情况，可以将它们分为两类：一类是在过程中不起变化，只取一个定值的量，我们将它叫做常量；另一类在过程中是变化的，可以取不同数值的量，我们将它叫做变量．

关于常量与变量的区别与联系，应注意如下几点：

(1)将常量置于变化过程中来考察，换句话说，将常量作为变量的一种特殊情况；

(2)如果在变化过程中的取值变化不大，常将它近似看作常量来进行处理；

(3)一个量是常量或变量，要根据不同的变化过程及不同的研究任务作具体分析．

本书中变量所取的值，如无特别声明，假定都是实数. 我们知道，实数可以与数轴上的点建立一一对应关系. 今后，为了叙述方便，常把一个实数 a 及其在数轴上的对应点都称为“点 a”.

变量在其变化过程中所可能取的一切值，构成了实数集 R 的一个子集(它在数轴上对应着一个点集). 最常用的一类数集是区间. 现将区间所表示的数集分述如下：

数集 $\{x|a<x<b\}$ 称为开区间，记为 (a,b).

数集 $\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$ 称为闭区间，记为 $[a,b]$.

数集 $\{x|a<x\leqslant b\}$ 及 $\{x|a\leqslant x<b\}$ 都称为半开区间，分别记为 $(a,b]$ 及 $[a,b)$.

以上四种区间统称为以 a,b 为端点的有限区间，$b-a$ 称为区间的长. 在数轴上表示出来，分别如图 1-1 所示的线段.

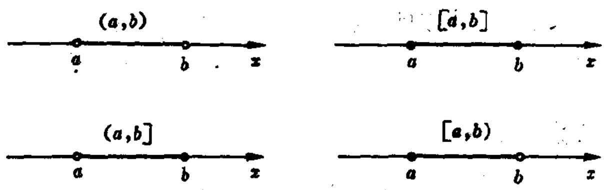


图 1-1

数集 $\{x|x>a\}$、$\{x|x\geqslant a\}$、$\{x|x<b\}$ 及 $\{x|x\leqslant b\}$ 统称为无穷区间，并分别记为 $(a,+\infty)$、$[a,+\infty)$、$(-\infty,b)$ 及 $(-\infty,b]$. 这些区间对应着数轴上的射线，如图 1-2 所示. 实数集 R 亦可用无穷区间表示为 $(-\infty,+\infty)$.

有限区间与无限区间，都可简称为区间，并用字母 I 来表示.

以点 x_0 为中心，且长度等于 2δ 的开区间叫做点 x_0 的 δ 邻域，记为 $U(x_0,\delta)$，即

$$
\begin{aligned}
U(x_0,\delta)&=\{x\,|\,|x-x_0|<\delta\}\\
&=(x_0-\delta,x_0+\delta),
\end{aligned}
$$

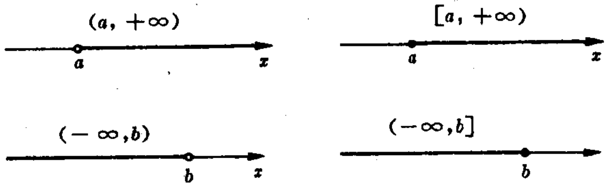


图 1-2

其中 δ 称为邻域的半径，如图 1-3 所示. 在无需指明邻域的半径时，x_0 的 δ 邻域简称为 x_0 的邻域.

x_0 的 δ 邻域除去中心点 x_0 后，叫做点 x_0 的去心的 δ 邻域，记为 $U(\hat{x}_0,\delta)$，即

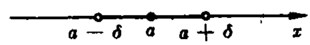


图 1-3

$$U(\hat{x}_0,\delta) = \{x \mid 0 < |x - x_0| < \delta\}.$$

对于开区间 (a,b) 内的任一点 x_0，必存在一个正数 δ，使得 $U(x_0,\delta) \subset (a,b)$，并称 x_0 是开区间 (a,b) 的内点.

二、函数概念

在一个较复杂的变化过程中，往往有多个变量并存. 但是它们之间往往不是孤立的，而是相互依赖、相互制约的. 相互依赖的变量之间确定的对应关系，在数学上就称为函数关系.

定义 设有两个变量 x 和 y，以及一个给定的数集 D. 如果对于变量 x 在数集 D 上所取的每一个值，按照一定的对应法则 f，变量 y 都有一个确定的值与之对应，则称 y 是定义在 D 上的 x 的函数，记为

$$y = f(x) \quad (x \in D),$$

并称变量 x 为自变量，变量 y 为因变量，数集 D 为函数的定义域.

在函数概念中，自变量 x 的取值范围（即数集 D）就是函数的

定义域. 反映实际问题的函数，其定义域应由自变量 x 所表示的实际意义来确定，对于无需考虑 x,y 所表示的实际意义，而抽象地用数学运算式表示的函数，我们约定：此种函数的定义域是该算式有意义的全体自变量 x 值的集合. 确定函数的定义域时，要注意到："零不能做除数"、"负数不能开偶次方"、"零和负数不能取对数"、"正弦、余弦的绝对值不超过1"和"0^0 无意义"等. 若函数的算式是由几个数学式子组合而成的，则这个函数的定义域应是取这几个数学式子中自变量允许取值范围的公共部分.

例1 求下列函数的定义域

(1) $y=\sqrt{9-x^2}+\arcsin\dfrac{x-2}{3}$;

(2) $y=\dfrac{1}{\log_2\dfrac{x^2-3x}{4}}$.

解 (1) 由 $\sqrt{9-x^2}$ 有 $9-x^2\geqslant 0$，得解集 $D_1=\{x\mid -3\leqslant x\leqslant 3\}$；由 $\arcsin\dfrac{x-2}{3}$ 有 $\left|\dfrac{x-2}{3}\right|\leqslant 1$，得解集 $D_2=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 5\}$. 故函数的定义域

$$D=D_1\cap D_2=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 3\},$$

即区间 $[-1,3]$.

(2)按对数的要求知 $\dfrac{x^2-3x}{4}>0$，得解集 $D_1=(-\infty,0)\cup(3,+\infty)$；又由分母不为0知 $\dfrac{x^2-3x}{4}\neq 1$，得解集 $D_2=\{x\mid x\neq -1,x\neq 4\}$. 故函数的定义域

$$D=D_1\cap D_2=(-\infty,-1)\cup(-1,0)\cup(3,4)\cup(4,+\infty).$$

函数概念的核心是变量 y 与变量 x 之间的对应法则，其表示方法多种多样. 对于具体的函数，中学已学过三种表示方法，即公式法、图像法和列表法. 但为了要对函数进行一般性研究，习惯上，我们用 $y=f(x)$ 表示 y 是 x 的函数，其中"f"表示对应法则. 若取

$x = x_0 \in D$,则与 x_0 相应的函数值记为

$$f(x_0) \quad 或 \quad y|_{x=x_0}.$$

有时也用 $f(x)$ 本身来表示定义域 D 内任意点 x 处的函数值.

定义域 D 内一切 x 值所对应的全体函数值的集合:

$$E = \{y | y = f(x), x \in D\},$$

称为函数 $y = f(x)$ 的值域.

例 2 设 $f(x) = \dfrac{x}{1-x}$,求 $f(x)$ 的值域,并计算函数值:$f(2)$,$f\left(\dfrac{1}{2}\right)$,$f(a)$ 和 $f\left(\dfrac{1}{a}\right)$.

解 $f(x)$ 的定义域 $D = \{x | x \neq 1\}$. 由

$$f(x) = \frac{x}{1-x} = -1 + \frac{1}{1-x},$$

或 $$[f(x) + 1](1 - x) = 1,$$

知 $f(x)$ 的值域是 $E = \{y | y \neq -1\}$.

$$f(2) = \frac{2}{1-2} = -2,$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1,$$

$$f(a) = \frac{a}{1-a} \quad (a \neq 1),$$

$$f\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{\frac{1}{a}}{1 - \frac{1}{a}} = \frac{1}{a-1} \quad (a \neq 0, a \neq 1).$$

例3 设 $f(x - 3) = 2x^2 - 5x - 5$,求 $f(x)$ 及 $f(x + h) - f(x)$.

解 设 $x - 3 = t$,则 $x = 3 + t$,代入原式得

$$f(t) = 2(t + 3)^2 - 5(t + 3) - 5$$

$$=2t^2+7t-2,$$

故 $$f(x)=2x^2+7x-2.$$

又 $$f(x+h)-f(x)$$
$$=2(x+h)^2+7(x+h)-2-(2x^2+7x-2)$$
$$=(4x+7)h+2h^2.$$

在同一问题中，如有两个或两个以上的函数，需要采用不同的记号. 常用的方法是用不同的字母表示不同的对应法则，如 $y=g(x)$，$y=\varphi(x)$ 等. 也可用加下标的方法来加以区别，如 $y=f_1(x)$，$y=f_2(x)$ 等.

函数是由定义域和对应法则所确定的. 两个函数如果定义域相同且对应法则一样，则称它们是相同的. 否则，便是不相同的. 例如，$f(x)=\sqrt{x^2(x-1)}$ 与 $g(x)=x\sqrt{x-1}$ 是相同的，因为它们的定义域均为 $[1,+\infty)$，且对于任一 $x\in[1,+\infty)$，都有 $\sqrt{x^2(1-x)}=x\sqrt{1-x}$， 故 $f(x)=g(x)$. 而 $\varphi(x)=\sqrt{x^2(1-x)}$ 与 $\psi(x)=x\sqrt{1-x}$ 是不相同的，因为它们的定义域虽然同为 $(-\infty,1]$，但只有当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，才有 $\sqrt{x^2(1-x)}=x\sqrt{1-x}$，而当 $x<0$ 时，$\sqrt{x^2(1-x)}\neq x\sqrt{1-x}$. 例如 $\varphi(-1)=\sqrt{2}$，但 $\psi(-1)=-\sqrt{2}$，所以对应法则不同，因此 $\varphi(x)\neq\psi(x)$.

对于函数 $y=f(x)$，自变量在其定义域 D 内任取一个 x 值时，因变量相应地就有一个 y 值. 在直角坐标平面上，以这对 x，y 值为坐标可确定一点 $M(x,y)$. 所有这样的点组成的集合 $C=\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D\}$，称为函数 $y=f(x)$ 的图形（图 1-4）.

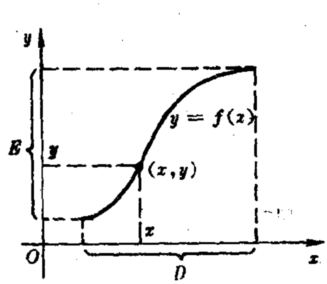


图 1-4

三、函数的几种性态

1. 函数的有界性

设函数 $f(x)$ 在 D 上有定义. 如果存在一个正数 M，使得对于任何 $x \in D$，都有

$$|f(x)| \leqslant M,$$

则称函数 $f(x)$ 在 D 上有界. 如果这样的 M 不存在，则称函数 $f(x)$ 在 D 上无界. 这就是说，如果对于任意的正数 k，总存在 $x_1 \in D$，使得 $|f(x_1)| > k$，那末函数 $f(x)$ 在 D 上无界.

注意，一个函数有界与否，不仅与函数本身有关，而且还与所论数集 D 有关. 例如，函数 $f(x) = \lg x$ 在$[0,01,100]$上有界，因为对任何 $x \in [0,01,100]$，都有 $|\lg x| \leqslant 2$，这里 $M = 2$(当然也可取大于2的任何数为 M，都有 $|\lg x| \leqslant M$). 而函数 $f(x) = \lg x$ 在$(0,1)$内却是无界的. 事实上，对于任意的正数 k，取 $x_1 = \frac{1}{10^{k+1}}$，显然 $x_1 \in (0,1)$，且 $|f(x_1)| = k+1 > k$.

函数 $f(x)$ 在 D 上有界，也可采用下述等价的说法：如果存在常数 A 与 $B(A < B)$，使得对于任何 $x \in D$，都有

$$A \leqslant f(x) \leqslant B,$$

则称 $f(x)$ 在 D 上有界，并分别称 A 和 B 为 $f(x)$ 在 D 上的下界和上界(当然，比 A 小的数也是 $f(x)$ 的下界；比 B 大的数也是 $f(x)$ 的上界).

2. 函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称(即若 $x \in D$，则 $-x \in D$). 如果对于任一 $x \in D$，都有

$$f(-x) = f(x),$$

则称 $f(x)$ 是偶函数. 如果对于任一 $x \in D$，都有

$$f(-x) = -f(x),$$