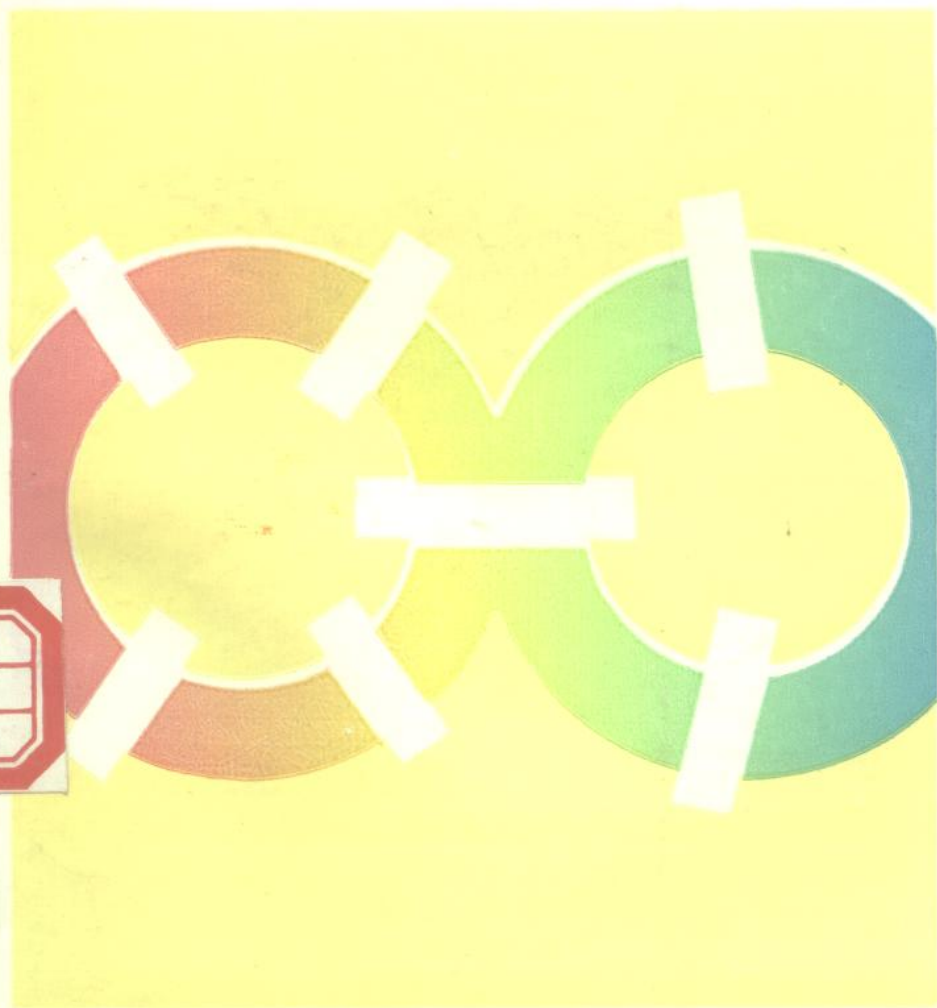


图

论及其在计算机科学中的应用

曹立明 魏兵 周强



81

3

中国矿业大学出版社

图论及其在计算机科学中的应用

曹立明 魏兵 周强

中国矿业大学出版社

内 容 提 要

本书分成两部分。第一部分对图论的基本概念做了简明论述和深入讨论,包括图、通路和回路、树、割集和割点、有向图和二分图等。第二部分是图论在计算机科学中的应用,包括最小支撑树、最短通路、最大匹配、网络流、中国邮递员问题和旅行售货员等问题的算法和计算机实现。

书中穿插着一些有名的图论问题和生动的例子,使读者能理解和掌握如何用图论的基本知识解决实际问题。每章后面编排了适量习题,帮助读者通过练习掌握书本内容。既是一本好教材,又是一本好的科技读物。

本书可作为理工各科高年级本科生和研究生教材和参考书,也可供教师及有关工程技术人员及科研人员参考。

责任编辑 孙树朴

技术设计 关湘雯

3004/03

图论及其在计算机科学中的应用

曾立明 魏兵 周强

中国矿业大学出版社出版

新华书店经销 中国矿业大学印刷厂印刷

开本 850×1168 毫米 1/32 印张 5.625 字数 141 千字

1995 年 12 月第一版 1995 年 12 月第一次印刷

印数 1—1000 册

ISBN 7-81040-460-1

TP·23

定价:8.00 元

前 言

图论诞生于 1736 年欧拉的一篇关于解决哥尼斯堡七桥问题的论文。可是在往后一百年中,图论没有获得进展。

在 1847 年,克希霍夫应用了树的理论计算电网络。十年后凯莱在计树时导出了著名的凯莱公式。在克希霍夫和凯莱所处的时代,四色猜想的提出和哈密尔顿周游世界问题对图论的发展起了重要的作用。这也是一个图论的多产时期,但随后的半个世纪,图论的发展又处于相对的停滞状态。

到了 20 世纪 30 年代,图论的研究又重新引起了人们的兴趣。特别是考涅克系统地总结了前人和自己在图论研究的成果,写了第一本图论书,为后人学习图论打下了良好的基础。

最近几十年中,由于网络流问题的问世和计算机科学的发展,对图论的研究起着极大的推动作用。目前,图论已广泛地应用于物理、化学、计算机科学、经济和社会科学。图论为这些领域提供了合理的数学模型和求解方法。

本书共分 12 章,每章后面附了适量习题,帮助读者掌握图论的基本理论和方法。书中分析了在历史上起重要作用的有代表性的图论问题,使读者了解解决图论问题的一些思考方法,学会怎样把实际问题化为图论问题;同时也分析一些常用的图论算法,培养用计算机解决实际问题的能力。

本书是在作者为计算机专业本科学生和研究生编写的图论讲义的基础上几经修改,最后由曹立明、魏兵和周强三位副教授合作

定稿,作为教材和科技读物。

本书如有不足和错误之处,敬请读者批评指正。

作者

目 录

前言

第一章 引论	(1)
第一节 几个有名的图论问题.....	(1)
第二节 什么是图?	(3)
第三节 哥尼斯堡七桥问题的解.....	(5)
习题	(11)
第二章 通路和回路	(14)
第一节 同构图	(14)
第二节 子图	(15)
第三节 边链、通路和回路.....	(16)
第四节 连通图、非连通和成分.....	(20)
第五节 欧拉图	(22)
第六节 图的运算	(25)
第七节 欧拉图的进一步讨论	(28)
第八节 哈密尔顿通路和回路	(29)
习题	(33)
第三章 有向图	(36)
第一节 什么是有向图?	(36)
第二节 有向图的种类	(37)
第三节 成对比较和竞赛	(38)
第四节 在逻辑上的应用	(41)

习题	(43)
第四章 树	(44)
第一节 树的概念和认识	(44)
第二节 树的性质	(46)
第三节 根树和二元树	(49)
第四节 支撑树	(51)
第五节 基本回路	(53)
第六节 怎样找出所有的生成树	(54)
习题	(57)
第五章 割集和割点	(58)
第一节 割集	(58)
第二节 割集的性质	(59)
第三节 图中所有的割集	(60)
第四节 基本回路和割集	(62)
习题	(64)
第六章 图的矩阵表示	(65)
第一节 关联矩阵	(65)
第二节 回路矩阵	(68)
第三节 基本回路矩阵和回路矩阵的秩	(70)
第四节 割集矩阵	(71)
第五节 A_t 、 B_t 和 C_t 之间的关系	(74)
第六节 在开关网络中的应用	(76)
第七节 邻接矩阵	(80)
第八节 最小支撑树	(82)
习题	(84)
第七章 平面图	(86)
第一节 公用设备问题	(86)
第二节 平面图概念	(87)

第三节	地图四色问题	(90)
第四节	欧拉公式	(92)
第五节	分块问题	(94)
第六节	两个典型的非平面图	(96)
第七节	五色定理	(99)
	习题	(103)
第八章	最短通路算法	(104)
第一节	最短通路问题	(104)
第二节	Dijkstra 算法	(105)
第三节	任意两点间的最短通路	(109)
	习题	(114)
第九章	覆盖和匹配	(115)
第一节	二分图	(115)
第二节	覆盖	(116)
第三节	匹配	(118)
第四节	匈牙利算法	(122)
第五节	库恩-蒙克莱斯算法	(126)
	习题	(129)
第十章	网络的最大流问题	(131)
第一节	网络流的基本概念	(131)
第二节	最大流基本定理	(134)
第三节	标号法	(139)
第四节	最小费用流问题	(145)
	习题	(149)
第十一章	中国邮递员问题	(152)
	习题	(159)
第十二章	旅行售货员问题	(161)
第一节	TSP 的表示	(161)

第二节 分支和界限方法.....	(163)
第三节 快速 TSP 算法	(167)
习题.....	(169)
参考文献	(170)

第一章 引 论

第一节 几个有名的图论问题

哥尼斯堡(Königsberg)七桥问题

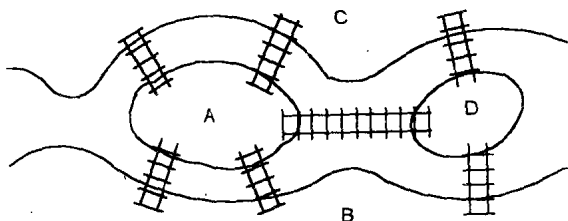


图 1-1

哥尼斯堡曾经是原东普鲁士的首都。伯瑞古(Pregel)河流过这个城市,如图 1-1 所示。其中 B 和 C 是河的两岸, A 和 D 是河中两个岛屿,在 A、B、C、D 之间有七座桥相连。当时有不少居民经常在河边或岛上休息、散步。有人提出了这样一个问题:能不能从某一地方出发,走遍这七座桥,而且每座桥只准走一次,最后又回到出发点?很多人对这个问题作了多次尝试,都失败了。直到 1736 年,欧拉用图论的方法解决了这个问题。欧拉为此写了一篇论文,这是有关图论的第一篇论文。所以一般认为,图论诞生于 1736 年欧拉关于解决哥尼斯堡七桥问题的论文。

四色猜想

在地图上,相邻国家必须用不同的颜色染色,研究至少用几种颜色给地图染色的问题称为地图染色问题。

在任何平面上的地图,用四种颜色染色就足够了,这个猜想就是有名的四色猜想。

默比乌斯于 1840 年在他的讲稿中第一个提出了四色猜想。(也有人认为英国人格色里第一个提出了四色猜想)。许多数学家曾企图解决它,但都失败了。直到 1976 年,发生了一件轰动数学界的大事,美国数学家阿佩尔和赫肯宣布,他们用电子计算机证明了四色猜想是成立的。他们发现要证明四色猜想必须考虑许多情况,要是由人来做,几辈子也完成不了,于是他们编了一个程序,把这个问题交给计算机去“考虑”。结果,电子计算机运行了 1200 小时后,终于证明了四色猜想是成立的。后来,另一些数学家检验了他们的证明,都认为证明是正确的。所以,从 1976 年以后,就把“四色猜想”这个名词改成了“四色定理”。

哈密尔顿周游世界问题

哈密尔顿是十九世纪英国著名的数学家,对数学游戏颇感兴趣,他曾经发明一种叫做周游世界的游戏。它的玩法是:给你一个正十二面体,它有 20 个顶点,现在把这 20 个顶点看成是地球上 20 个城市;另外,正十二面体的棱(共 30 条)看成是连接这些城市的路。请你找一条从某一个城市出发的路

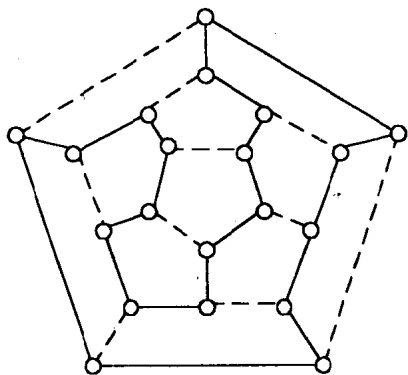


图 1-2

线,它经过每个城市恰好一次,并且最后回到出发点。

如果把正十二面体想象成一个橡皮球并把它压到平面上就成了图 1-2。

图中实线部分标出了一种走法。当然,走法不是唯一的。

旅行售货员问题

这个问题和哈密尔顿问题有着密切的联系,提法是这样的:给出城市之间的距离,要求一位推销员从某一个城市出发,周游每个城市一次,然后回到出发的城市,并且选的路径最短。

这是一个图论优化问题,最早由美国数学家威特涅于 1934 年在普林斯顿一次讨论班上提出。1954 年几位美国数学家写了第一篇论文,用线性方程的方法解决了 49 个城市的旅行售货员问题。以后又有不少论文讨论了这个问题,因为它在理论和应用上都很有价值。

第二节 什么是图?

数学是研究空间位置和数量关系的科学。图论是数学的一个分支,它研究的图形和普通的几何学不同。“图”这个字专门用来表示一种特殊的图形,就是仅仅由点和连接点的线组成的图形。可以说,图论是研究事物(点)之间相互关系(线)的一门数学分支。莱布尼兹最早提起过它,叫它“位置几何学”。在几何里,常常把线看成是点的轨迹,即线是由许多点组成的,而在图论中,线就是线,线的唯一作用是把两个点连接起来,反映两点之间的关系。如在图论中,图 1-3 和图 1-4 是等价的。

现在介绍图的有关概念。

定义 1-1 一个无向图 $G=(V,E)$ 是由点集 $V=\{v_1, v_2, \dots\}$ 和

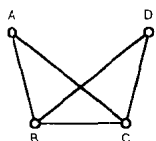


图 1-3

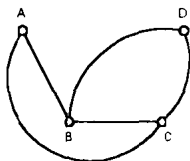


图 1-4

边集 $E = \{e_1, e_2, \dots\}$ 组成的图形。 $v_i \in V$ 称为 G 的顶点, $e_j \in E$ 称为 G 的边。

如图 1-5 和图 1-6 都是无向图。

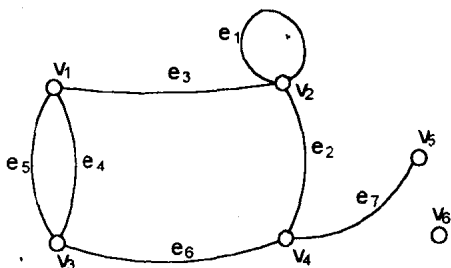


图 1-5

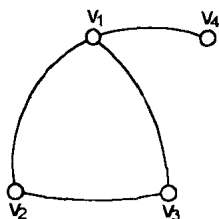


图 1-6

定义 1-2 一条具有相同端点的边称为**自回路**。

如在图 1-5 中, e_1 是自回路。

定义 1-3 两条具有一对相同端点的边称为**平行边**。

如在图 1-5 中, e_4 和 e_5 是平行边。

定义 1-4 一个既没有自回路也没有平行边的图称为**简图**或**简单图**。

定义 1-5 一个点 v_i 是某一边 e_j 的端点, 则称 v_i 和 e_j 互为**关联**。

在图 1-5 中, e_2, e_6 与 e_7 和 v_4 互为关联。

定义 1-6 两条和同一顶点关联的非平行边称为边邻接；作为同一条边端点的两个顶点称为点邻接。

在图 1-5 中, e_6 和 e_7 邻接, v_3 和 v_4 邻接。 e_4 和 e_5 不邻接, 因为它们是平行边。

定义 1-7 和顶点 v 关联的边数称为 v 的度数, 记作 $d(v)$ 。

注意, 自回路必须计算两次。例如在图 1-5 中, $d(v_2)=4$ 。

因为在计算度数时, 每边都用了两次, 所以在 $G=(V, E)$ 中, 所有顶点度数的总和是所有边数的两倍。即

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E| \quad (1-1)$$

定理 1-1 图中度数为奇数的顶点个数必然是偶数。

作为一个练习, 请读者证明这个定理。

定义 1-8 一个没有边和它关联的点称为孤立点。或者说一个度数是零的点称为孤立点。

在图 1-5 中, v_6 是孤立点, $d(v_6)=0$ 。

定义 1-9 一个度数是 1 的点称为悬点。

在图 1-5 中, v_5 是悬点, $d(v_5)=1$ 。

定义 1-10 一个只有顶点而没有边的图称为零图。即如果图 $G=(V, E)$, 其中 $V \neq \emptyset, E=\emptyset$, 则 G 是零图。

如图 1-7, $G=(\{A, B, C\}, \emptyset)$, G 是零图。如果 $G=(V, E)$, 且 $V=\emptyset, E=\emptyset$, 那就不存在图, 所以图必须至少有一个顶点。

图 1-7

第三节 哥尼斯堡七桥问题的解

有了上述简单的图论知识, 就能着手解决哥尼斯堡七桥问题。

可以把这个问题归纳为图 1-8。在图 1-8 中, A 和 D 表示两个岛, B 和 C 是两岸。a, b, c, d, e, f 和 g 表示七座桥。对于这样一个特殊问题可以这样来解决:把所有可能的走法,即把 abcdefg 所有的排列都罗列出来,看一看能否符合要求。已知道 7 个字母的排列共有 $7! = 5040$ 个。对这 5040 种走法一一尝试,就能得出结论。但这种穷举法被认为是“非智能”的,而且对桥数很多的问题根本不能用这种方法。因为无论用手算或用计算机,实际上都无法解决。数学上要求提供一种一般的解法,不仅能解决这一特殊问题(七桥问题),而且能解决这一类问题(n 桥问题)。

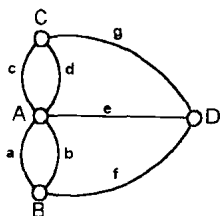


图 1-8

欧拉把七桥问题改成更一般的问题:给定任意一个河道图与任意多座桥,要判断是否可能每座桥恰好走过一次。然后他提出了一个判别法,彻底解决了这一类问题。

欧拉判别法

(1) 作图 $G=(V, E)$, $V=\{A, B, C, \dots\}$, A, B, C 等表示被水隔开的区域; E 是桥的集合。

(2) 令 $e=|E|+1$

(3) 列出表格,使其第一列,第二列,第三列分别是 V , $d(V)$ 和 $\lceil \frac{d(V)}{2} \rceil$ 。其中 V 表示顶点集, $d(V)$ 表示顶点的度数。

(4) 如果第三列各元素的和等于 e 或 $e-1$, 则能找出一条路线, 否则问题无解。

即

$$\sum_{x \in V} \lceil \frac{d(x)}{2} \rceil = \begin{cases} e & \text{则从奇点出发找到路线} \\ e-1 & \text{则从偶点出发找到路线} \end{cases}$$

例如对七桥问题,见图 1-8, $e=7+1=8$

V	$d(V)$	$\lceil \frac{d(V)}{2} \rceil$
A	5	3
B	3	2
C	3	2
D	3	2

$$\sum_{x \in V} \lceil \frac{d(x)}{2} \rceil = 9 > e$$

所以问题无解。

判别法根据

如果用顶点字符串表示所走的路线,如 ABCD 表示从 A 出发经过 B 和 D 到达 C 的路线,那么步行者经过任意多座桥,代表他走的路线的字母个数应比桥数多一。

问题要求经过每座桥一次,即通过图中每边一次,则在路线中所有顶点出现的总数应该是总边数加一。

在图 $G=(V,E)$ 中,假设任何 $x \in V$, $N(x)$ 表示 x 在路线中出现的次数,如果路线经过每边一次,当且仅当

$$\sum_{x \in V} N(x) = |E| + 1 = e \quad (1-2)$$

其中

$$N(x) = \begin{cases} \lceil \frac{d(x)}{2} \rceil, & d(x) \text{ 是奇数或者 } d(x) \text{ 是偶数且 } x \\ & \text{不是出发点;} \\ \frac{d(x)}{2} + 1, & d(x) \text{ 是偶数且 } x \text{ 是出发点又是终点} \end{cases}$$

如果 $d(x)$ 是奇数,不管 x 是否是出发点,它在路线中出现的次数

总是 $\frac{d(x)+1}{2}$, 即 $\lceil \frac{d(x)}{2} \rceil$ 。如果 $d(x)$ 是偶数, 那么 x 在路线中出现的次数与起点有关, 当起点在 x 时等于 $\frac{d(x)}{2}+1$; 当起点不在 x 时等于 $\frac{d(x)}{2}$, 即 $\lceil \frac{d(x)}{2} \rceil$ 。

例如在图 1-9(a) 中, A 和 B 的度数都是奇数, $d(A)=d(B)=3$, 路线 $ABAB$ 经过每边一次, A 和 B 在路线中出现的次数都是 2 次, 即

$$N(A) = N(B) = \lceil \frac{d(A)}{2} \rceil = \lceil \frac{d(B)}{2} \rceil = 2。$$

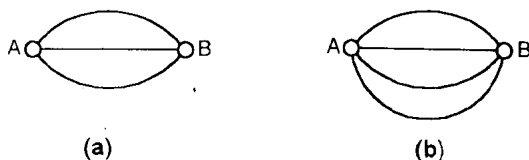


图 1-9

$$e = |E| + 1 = 4, \sum_{x \in V} N(x) = N(A) + N(B) = 4 = e。$$

在图 1-9(b) 中路线 $ABABA$ 经过每边一次 $N(A) = \frac{d(A)}{2} + 1 = 3, N(B) = \lceil \frac{d(B)}{2} \rceil = 2, e = |E| + 1 = 5, \sum_{x \in V} N(x) = N(A) + N(B) = 5 = e。$

判别法的证明

如果 $\sum_{x \in V} \lceil \frac{d(x)}{2} \rceil = e$, 从奇点出发, 则所有点在路线出现的次数都是 $\lceil \frac{d(x)}{2} \rceil$, 所以

$$\sum_{x \in V} N(x) = \sum_{x \in V} \lceil \frac{d(x)}{2} \rceil = e$$