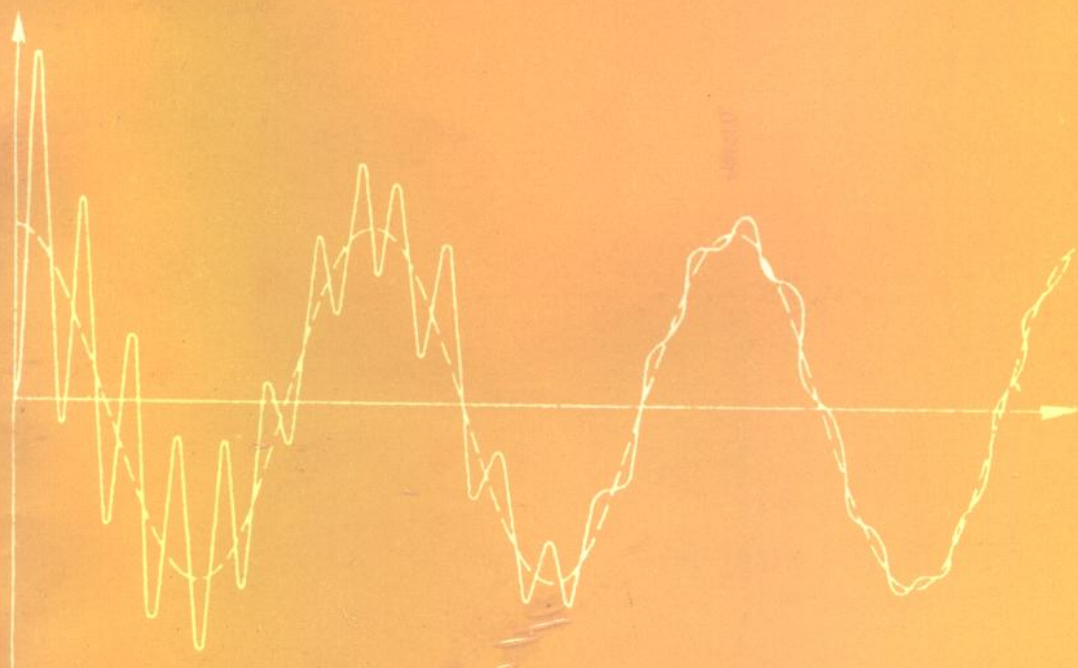


实用振动工程

(1)

振动理论与分析

主编 张阿舟 诸德超 姚起杭 顾松年
主审 赵令诚 朱德懋 张克荣 杨学勤



航空工业出版社

TB123

Z10

1

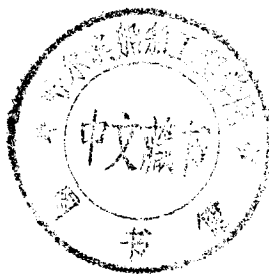
414004

实用振动工程

(1)

振动理论与分析

主编 张阿舟 诸德超 姚起杭 顾松年
主审 赵令诚 朱德懋 张克荣 杨学勤



00414004

航空工业出版社

1996

内 容 提 要

本书着重从振动理论和实际应用技术相结合的角度系统地阐述了当代各种工程实用的振动技术方法,包括振动分析方法和软件介绍、振动控制 and 设计技术、振动测量、数据处理分析和各种试验技术。全书分为三册,第一册为振动理论与分析,第二册为振动控制与设计,第三册为振动测量与试验。本书主要适合各工业部门从事振动分析、测量和试验工作的工程技术人员应用,同时也可供从事振动技术研究的科研人员以及工科大专院校教师和高年级学生、研究生作为掌握振动工程技术方法的重要参考书。

30/4/1

图书在版编目(CIP)数据

实用振动工程(第一册)/张阿舟主编. -北京:航空工业出版社,1996

ISBN 7-80046-994-8

I.实… II.张… III.振动控制 IV.TB53

中国版本图书馆 CIP 数据核字(96)第 01737 号

航空工业出版社出版发行

(北京市安定门外小关东里 14 号 100029)

航空工业出版社印刷厂印刷

全国各地新华书店经售

1996 年 4 月第 1 版

1996 年 4 月第 1 次印刷

开本:787×1092 1/16

印张:12.75

字数:328 千字

印数:1-1000

定价:26.00 元

前 言

一般认为,振动是物体在时间过程中发生的一种往复式位形变化现象,它是物质运动的一种带有普遍意义的重要形式。从自然界到工业技术领域,振动现象屡见不鲜;特别是现代社会中所有各工业部门——各类振动机械、动力装置、电子产品、仪器仪表、各类建筑物和各种运输工具……无一不存在振动问题,也无一不需要应用振动技术。

尽管有关振动理论和应用技术方面的文献和专著已经不少,但本书编者似认为,真正能够理论和应用技术相结合、系统的反映和体现先前快速发展中的工程实用振动技术的书籍仍不多见。随着我国工业建设和国民经济的蓬勃发展,各行业工程技术界人士对于这一种著作的需求已经越来越迫切了。

本书是航空工业系统所属院校院所从事振动应用研究的专家们的集体创作。众所周知,由于现代飞行器在动力装置、使用环境以及安全要求方面的特点;飞行器结构动力学问题以及与之伴随出现的各种类型的振动问题,它们的理论分析方法和软件、控制设计技术和测量、分析、试验技术一直是各国航空工业界非常重视的研究课题。我国航空工业部门从七十年代起就组织各院校院所同行协作开展对这些技术进行发展与应用研究,并且已经积累了大量研究成果和应用技术,从而为编写本书奠定了技术基础。

本书对各类振动问题的分析和阐述着重致力于反映有关技术方法的通用性,同时也力求本书反映当前该项技术发展的国际先进水平。因而本书各部分内容对其它工业部需要的各类振动应用技术也完全具有实际应用价值和指导意义。

为了给需要应用振动技术的有关工程技术人员提供简要的基础知识和较为详尽的实际应用方法,本书按振动基本理论、动力分析方法和软件介绍、振动控制设计和实际控制技术、结构动力学设计和修改分析、振动测量和动态数据处理方法、结构动力特性试验和参数识别技术、振动诊断及动力环境试验方法等内容分别进行介绍,并分类编为振动理论与分析、振动控制与设计、振动测量与试验共三册出版。

本书编委会全体同仁对大力支持本书编写与出版的中国航空科学技术研究院、飞机结构强度研究所、航空工业出版社和航空工业部飞机动力环境课题组以及所有为本书出版付出过辛勤劳动的人们致以衷心的感谢。

《实用振动工程》编委会

一九九五年四月

《实用振动工程》编委会

主编：张阿舟 诸德超 姚起杭 顾松年
主审：赵令诚 朱德懋 张克荣 杨学勤
编委：张阿舟 赵令诚 诸德超 朱德懋 姚起杭 张克荣
顾松年 屈见忠 周传荣 张世基 李军杰 杨学勤
张曾鋈 施荣明 龚庆祥 姜节胜 顾仲权 齐丕騫
胡丙相 朱善庆 秦桂驥 周枝伦 张 鹏 潘树祥
钟德钧 何联珠 王宝禄 张秀义 傅 博

第一册 振动理论与分析

主编：诸德超 李军杰
主审：赵令诚
编委：诸德超 赵令诚 李军杰 胡丙相 张 鹏

目 次

第一篇 基本理论	(1)
第一章 单自由度振动系统	(1)
1.1 引言	(1)
1.2 运动方程	(2)
1.3 自由振动	(3)
1.4 强迫振动	(6)
1.5 基础振动	(15)
第二章 两自由度振动系统	(17)
2.1 引言	(17)
2.2 无阻尼系统	(17)
2.3 粘性阻尼系统	(24)
2.4 动力吸震器	(26)
第三章 连续弹性系统的固有振动与离散化	(30)
3.1 引言	(30)
3.2 直杆的纵向伸缩振动	(30)
3.3 直梁的横向弯曲振动	(33)
3.4 薄板的横向弯曲振动	(36)
3.5 瑞利法	(42)
3.6 瑞利 - 里兹法	(44)
3.7 瑞利原理	(48)
3.8 有限元法	(54)
第四章 模态理论	(63)
4.1 引言	(63)
4.2 实模态理论	(63)
4.3 旋转结构中的陀螺效应	(72)
4.4 流固耦合问题	(75)
4.5 复模态理论	(76)
4.6 广义模态理论	(81)
参考文献	(83)
第二篇 工程应用方法	(84)
第一章 结构振动固有特性计算	(84)
1.1 引言	(84)

1.2	实特征值计算方法	(84)
1.3	动力子结构分析	(99)
第二章	结构动力响应分析	(105)
2.1	引言	(105)
2.2	线性结构动力响应分析	(105)
2.3	非线性结构动力响应分析	(111)
2.4	冲击响应分析	(120)
第三章	随机振动分析	(128)
3.1	随机数据分析方法	(128)
3.2	单自由度系统的随机激励响应	(142)
3.3	多自由度系统的随机激励响应	(147)
	参考文献	(148)
第三篇	结构动力分析软件	(149)
第一章	结构分析软件的一般特点	(149)
1.1	引言	(149)
1.2	结构工程对结构分析软件的要求	(151)
1.3	软件研制方面的其他需求和考虑	(153)
1.4	大型结构分析系统的基本结构	(154)
1.5	软件工程化	(155)
第二章	结构动力学分析软件设计的力学考虑	(161)
2.1	引言	(161)
2.2	结构分析软件的力学功能描述	(162)
2.3	模型化	(164)
2.4	前后置处理与有限元分析可视化	(187)
第三章	结构分析软件的评价、选择和使用	(188)
3.1	引言	(188)
3.2	基本素材	(188)
3.3	程序选择指南	(189)
3.4	有限元分析软件的效率问题	(189)
3.5	几个观念	(191)
3.6	国内外著名结构分析软件	(192)
	参考文献	(196)

第一篇 基本理论

第一章 单自由度振动系统

1.1 引言

振动问题已成为当前各式机械和结构设计中必须考虑的一个重要问题。为了研究这些系统的振动特性,最好从单自由度振动系统着手,建立基本概念和掌握基本理论与处理方法,然后再转向复杂的实际振动系统。

一个系统在空间所占的位置状态(以后简称位形),一般采用广义坐标加以描述。广义坐标在研究复杂振动系统的振动问题时极为有用。为了描述一个质点在空间的位置,一般需采用空间直角坐标系的三个坐标变量才能确定。这种描述方式比较直观,几何概念明确。但若存在某种约束,例如通过一长为 l 的细刚杆(其质量可忽略不计)将一质点 A 悬挂于某固定点 o 处且在垂直平面 xoy 内运动,如图 1.1-1 所示。这时,质点 A 的直角坐标仍有 x 和 y 两个变量,但在 x 和 y 之间显然应满足如下的约束条件 $x^2 + y^2 = l^2$ 。于是,最好选用刚杆与通过 o 点的铅垂线之间的夹角 θ 作为变量,然后容易导出

$$x = l \sin \theta, y = -l \cos \theta \quad (1.1-1)$$

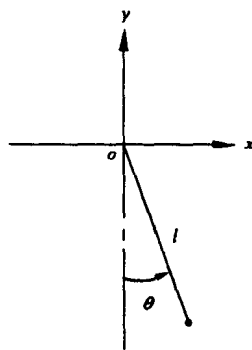
这里 θ 即是描述该质点位形的广义坐标。

在一般情况下,对于含有 n 个质点的完整系统*,若有 k 个有限约束

$$f_i(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n) = 0, i = 1, 2, \dots, k \quad (1.1-2)$$

则可利用这些约束条件从 $3n$ 个空间坐标变量中消去 k 个变量,剩下 $N = 3n - k$ 个独立变量。利用线性坐标变换,可进一步将这 N 个变量通过其他任何 N 个独立变量 q_1, q_2, \dots, q_N 表示之。这些相互独立的变量称为广义坐标,而广义坐标的个数即为系统的自由度数。显然,广义坐标的几何意义不那么明显,只是代表多维空间中的某一个坐标方向而已。

如果只用一个广义坐标即可完全确定一个系统的位形,图 1.1-1 悬挂质点的平面运动
则该系统称为单自由度系统。在工程实践中,并不缺乏单自由度振动系统的例子,而对于那些比较复杂的振动系统,也往往可以按照实际需要通过一些简



* 若在一系统的所有约束条件中不包含有不可积分的微分约束条件,则称该系统为完整系统。

化假设将其模型化为单自由度振动系统。

1.2 运动方程

任何一个单自由度系统,其振动特性取决于三个重要因素,即惯性特性、弹性特性和阻尼特性。图 1.1-2 为单自由度振动系统的典型计算模型略图。其中,质量 m 表征系统的惯性特性,刚度或弹簧常数 k 表征系统的弹性特性,阻尼系数 d 表征系统的阻尼特性, x 是从偏离系统静平衡位置开始计量的位移,而 $f(t)$ 则是作用在系统上的外加激励载荷。如果把图 1.1-2 中的各种物理量相应地理解为广义质量、广义刚度、广义阻尼、广义位移和广义力,则图 1.1-2 可以代表任何一种可以简化为单自由度系统的实际振动系统。

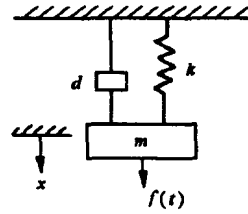


图 1.1-2 单自由度振动系统计算模型略图

一个实际的系统在振动过程中,由于各种阻尼因素的作用,因初始扰动而贮存起来的能量将被不断地耗散掉。如果没有外加能量输入,则振动幅度将不断衰减。然而,从纯理论研究的角度看,阻尼的定性和定量确定至今仍是一个十分复杂和困难的问题。但在工程实践中,当对结构系统作振动分析时,往往采用两种关于阻尼的假设,即粘性阻尼和结构阻尼假设。

1.2.1 粘性阻尼

在粘性阻尼假设中,假定阻尼力的大小与振动速度成正比,但其作用方向则与振动速度相反,于是阻尼力 f_d 可以表示为

$$f_d = -dv \quad (1.1-3)$$

其中 d 为粘性阻尼系数, v 为振动速度。

粘性阻尼力在时间间隔 dt 内所耗散的能量为 $dvdv = dv^2$,因此当系统以角频率 ω 作简谐振动时,有 $v = v_0 \cos \omega t$,于是系统在振动一周内由粘性阻尼所耗散的能量 W_d 为

$$W_d = \int_0^{2\pi} d v_0^2 \cos^2 \omega t dt = \frac{\pi d v_0^2}{\omega} \quad (1.1-4)$$

令这个结果与系统振动一周实际所耗散的能量相等,即可确定粘性阻尼系数 d 的大小。当然,实际振动系统未必符合粘性阻尼假设,但仍可利用上述原则确定系统的当量粘性阻尼系数。

在粘性阻尼假设下,单自由度振动系统的运动方程可写为

$$m \ddot{x} + d \dot{x} + kx = f(t) \quad (1.1-5)$$

其中 x 是时间 t 的函数,其上的“ \cdot ”代表对时间 t 的微分。

1.2.2 结构阻尼

在结构阻尼假设中,假定阻尼力的大小与振动位移成正比,但其方向则仍与振动速度相反。对于简谐振动 $x = x_0 \cos \omega t$, $v = -\omega x_0 \sin \omega t = \omega x_0 \cos(\omega t + 90^\circ)$,即是速度将比位移领先 90° 。采用复数表示法,当系统作简谐振动时,由结构阻尼所引起的阻尼力 f_g 则可表示为

$$f_g = -igkx \quad (1.1-6)$$

于是运动方程

$$m\ddot{x} + (1 + ig)kx = f(t) \quad (1.1-7)$$

结构阻尼假设常用于金属结构振动分析中。有的资料认为,金属机翼结构的 g 值大致上在 0.02 到 0.08 的范围内变化。

方程(1.1-5)和(1.1-7)式均为二阶常微分方程,其初始条件则为

$$x(0) = x_0, \dot{x}(0) = v_0 \quad (1.1-8)$$

其中 x_0 和 v_0 分别为初始位移和初始速度,它们也可以分别为 0。

1.3 自由振动

如果系统在受到某种干扰而偏离平衡状态后不再受到外载荷的作用,即 $f(t) = 0$, 则系统随后所作之运动称为自由振动。

1.3.1 无阻尼系统

无阻尼系统的自由振动方程为

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (1.1-9)$$

其通解为简谐运动

$$x = A\cos\omega t + B\sin\omega t \quad (1.1-10)$$

式中 $\omega = \sqrt{k/m}$, 称为固有角频率, $f = \omega/2\pi$ 称为固有频率, 而 $T = 1/f$ 则称为固有振动周期。利用初始条件(1.1-8)式后, (1.1-10)式可改写为

$$x = x_0\cos\omega t + \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t \quad (1.1-11)$$

或写成

$$x = A_0\cos(\omega t - \alpha) \quad (1.1-12)$$

其中

$$A_0 = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}, \alpha = \tan^{-1} \frac{v_0}{\omega x_0} \quad (1.1-13)$$

分别为振动的幅度和初相角。

1.3.1.1 能量法

由于无阻尼振动系统没有能量耗散,故系统所持有的总能量在振动过程中始终保持不变。于是利用能量守恒定理可以导出

$$\omega^2 = \frac{U}{T} \quad (1.1-14)$$

其中

$$U = \frac{1}{2}kA_0^2$$

是系统可持有的最大应变能,而

$$T = \frac{1}{2}mA_0^2$$

是系统可持有的最大动能系数,即最大动能除以固有角频率 ω 的平方。

1.3.1.2 动力放大因子

对于图 1.1-2 所示的系统,弹簧由于重力作用而产生的静位移 x_s 等于

$$x_s = \frac{mg}{k} = \frac{g}{\omega^2} \quad (1.1-15)$$

其中 g 为重力加速度。如果先把质量放在弹簧未发生变形的位置上突然释放,于是有下列初始条件

$$x_0 = -x_s, v_0 = 0$$

代入(1.1-12)式后,得到

$$x = -x_s \cos \omega t$$

这说明质量将围绕其静平衡位置以振幅 x_s 作简谐振动。因此,弹簧在动力作用下所产生的最大伸长量是静力作用下所产生的伸长量的一倍。这两种伸长量之比值称为动力放大因子,在所讨论的例子中,动力放大因子为 2。

1.3.2 粘性阻尼系统

粘性阻尼系统自由振动的运动微分方程为

$$m \ddot{x} + d \dot{x} + kx = 0 \quad (1.1-16)$$

设其解为 $x = Ae^{\lambda t}$, 代入(1.1-16)式然后可自其特征方程解出

$$\lambda = (-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 1})\omega \quad (1.1-17)$$

其中

$$\gamma = \frac{d}{2m\omega}, \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (1.1-18)$$

下面将根据 γ 小于、等于和大于 1 等三种情况分别讨论之。

1.3.2.1 负阻尼情况($\gamma < 1$)

当 $\gamma < 1$ 即 $d < 2m\omega$ 时

$$x = \frac{e^{-\gamma\omega t}}{\sqrt{1-\gamma^2}} \left\{ x_0 \cos(\omega_d t - \alpha_\gamma) + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega_d t \right\} \quad (1.1-19)$$

其中 $\omega_d = \sqrt{1-\gamma^2}\omega$ 称为阻尼固有角频率, $\alpha_\gamma = \tan^{-1} \frac{\gamma}{\sqrt{1-\gamma^2}}$ 。由(1.1-19)式可知,系统的自由振动过程是一振幅随时间不断衰减的等频运动,且在粘性阻尼很小即 γ 很小时,阻尼固有角频率 ω_d 和无阻尼时的固有角频率 ω 十分接近。

根据(1.1-19)式,在时刻 $t = t_1$ 下的位移 x_1 与经过一个振动周期后时刻 $t = t_1 + 2\pi/\omega_d$ 下的位移 x_2 之比值为

$$\frac{x_1}{x_2} = e^{-\gamma\omega(\frac{2\pi}{\omega_d})} = e^{\frac{-2\pi\gamma}{\sqrt{1-\gamma^2}}} \quad (1.1-20)$$

现在再引入一个称作系统的对数衰减的参数 δ , 定义为

$$\delta = \log_e \frac{x_1}{x_2} = -\frac{2\pi\gamma}{\sqrt{1-\gamma^2}} \quad (1.1-21)$$

并利用(1.1-18)式

$$\gamma = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2 + \delta^2}}, d = \frac{2m\omega\delta}{\sqrt{4\pi^2 + \delta^2}} \quad (1.1-22)$$

当 $\gamma \ll 1$ 时, $\gamma \approx \delta/2\pi$ 而 $d \approx m\omega\delta/\pi$ 。于是,可通过实验测定先得到系统作自由振动时位移随时间而变化的曲线,并据此由(1.1-21)式算出对数衰减 δ 的值,再由(1.1-22)式算出粘性阻尼系数 d 的大小。通常, t_1 取在振动速度为 0 亦即位移达到最大值时的某一时刻。

当 d 因 γ 取正值即大于 0 时,(1.1-19)式表示振幅将随时间的推移而逐渐衰减为 0。因此,把这种振动称为瞬态振动。

在物理上, d 因 γ 取负值也是可能的。这时振幅将随时间的推移而不断增长。因此,负阻尼意味着系统有能量输入而不是能量耗散。出现负阻尼的系统称为自激振动系统。

1.3.2.2 临界阻尼情况($\gamma=1$)

当 $\gamma=1$ 时

$$x = [x_0 + (v_0 + \omega x_0)t]e^{-\omega t} \quad (1.1-23)$$

(1.1-23)式表示,当 $t = v_0/(\omega v_0 + \omega^2 x_0)$ 时,位移达到极值,随后逐渐衰减为 0。图 1.1-3 表示了几种典型的临界阻尼系统衰减运动的情况。显然,这些运动全都不是振动过程。因此, $\gamma=1$ 就成为从阻尼等频振动退化为非振动过程的临界条件。于是从(1.1-18)式可得临界粘性阻尼系数 $d_c = 2m\omega$,并可由此进一步明确 γ 的物理意义是实际粘性阻尼系数与临界粘性阻尼系数之比。

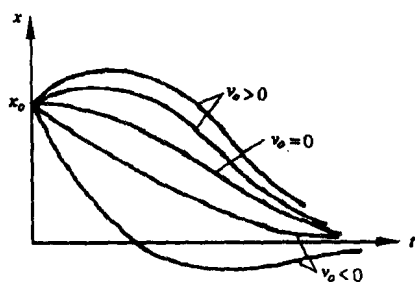


图 1.1-3 临界阻尼系统的运动

1.3.2.3 过阻尼情况($\gamma>1$)

当 $\gamma>1$ 时

$$x = \frac{e^{-\gamma\omega t}}{\sqrt{\gamma^2 - 1}} \left\{ \sqrt{\gamma^2 - 1} x_0 \cosh \sqrt{\gamma^2 - 1} \omega t + \left(\frac{v_0}{\omega} + \gamma x_0 \right) \sinh \sqrt{\gamma^2 - 1} \omega t \right\} \quad (1.1-24)$$

这时位移随时间推移而变化的过程已不是振动过程。

1.3.3 结构阻尼系统

结构阻尼系统的自由振动微分方程为

$$m \ddot{x} + (1 + ig)kx = 0 \quad (1.1-25)$$

令 $x = e^{\lambda t}$, 其中 $\lambda = \zeta \pm i\eta$ 。代入(1.1-25)式,得到如下的特征方程

$$m(\zeta \pm i\eta)^2 + k(1 + ig) = 0$$

展开成实部和虚部并令其分别等于 0,就可解出 ζ 和 η 。注意到当 $g=0$ 时,固有角频率应为 $\omega = \sqrt{k/m}$,而当 $g>0$ 时,由于在物理上衰减振动总与正阻尼系数 g 相伴,故必须取为负数。因此,有意义的根是

$$\zeta = -\sqrt{\frac{\sqrt{1+g^2}-1}{2}} \omega, \eta = \sqrt{\frac{\sqrt{1+g^2}+1}{2}} \omega \quad (1.1-26)$$

当结构阻尼不大即 $g \ll 1$ 时,上式可简化为

$$\zeta = -\frac{g}{2}\omega, \quad \eta = \sqrt{1 + \left(\frac{g}{2}\right)^2}\omega$$

于是,方程(1.1-25)式满足初始条件(1.1-8)式的解经整理后可写成

$$x = \frac{e^{-\frac{1}{2}g\omega t}}{\sqrt{1 + \left(\frac{g}{2}\right)^2}} \left\{ x_0 \cos(\omega_d t - \alpha_g) + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega_d t \right\} \quad (1.1-27)$$

其中阻尼固有角频率 $\omega_d = \sqrt{1 + \left(\frac{g}{2}\right)^2} \omega$, 初相角 $\alpha_g = \tan^{-1} g / \sqrt{4 + g^2}$ 。

仿照 1.3.2.1 节中相同的方法,利用(1.1-26)式,可得结构阻尼情况下的对数衰减 δ 为

$$\delta = \frac{2\pi g}{1 + \sqrt{1 + g^2}} \quad (1.1-28)$$

比较(1.1-21)式和(1.1-28)式,可知当 γ 与 g 均很小时有

$$g \approx 2\gamma \quad (1.1-29)$$

此外,比较(1.1-19)式和(1.1-27)式中的 ω_d ,可知在粘性阻尼情况下阻尼固有角频率将随粘性阻尼的增大而减小,但在结构阻尼情况下阻尼固有角频率将随结构阻尼的增大而增大,故在后一种情况下将不存在临界条件使衰减振动过程退化为非振动过程。

1.4 强迫振动

1.4.1 周期性载荷

在机械系统中常常会有转动部分,称为转子。若转子的质量中心与旋转中心不相吻合,则会因转动而产生离心力 $f(t)$

$$f(t) = F \sin \Omega t \quad (1.1-30)$$

其中 $F = Mr\Omega^2$, M 是转子质量, r 是偏心距,而 Ω 则是旋转角频率。

(1.1-30)式代表一种典型的简谐激励力, Ω 是其角频率,一般称作驱动角频率。在许多情况下,系统会受到一种非简谐的周期性激励力的作用。由于周期性函数可以展开为傅氏级数,故一般周期性激励函数可以分解为一系列频率成份成倍数关系的简谐激励函数之总和来处理之。

对于线性振动系统,可以应用叠加原理,故可按照分析简谐激励响应的方法逐个算出系统对各谐波分量的响应,然后再将所得结果叠加起来,来得到系统对一般周期性激励力的总响应。

1.4.1.1 粘性阻尼系统的响应

粘性阻尼系统在简谐激励力作用下的强迫振动微分方程可以写为

$$\ddot{x} + 2\gamma\omega\dot{x} + \omega^2 x = \frac{F}{m} \sin(\Omega t + \theta) \quad (1.1-31)$$

其中 θ 是该简谐激励力的相位角。方程(1.1-31)式的特解为

$$x = \frac{x_s}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2\gamma\beta)^2}} \sin(\Omega t + \theta - \alpha) \quad (1.1-32)$$

其中

$x_s = F/m\omega^2$ 是系统在力 F 作用下所产生的静位移；

$\beta = \Omega/\omega$ 是驱动角频率与无阻尼系统固有角频率之比；

$\alpha = \tan^{-1}(2\gamma\beta/(1-\beta^2))$ 是位移响应滞后于激励力的相位角。

将方程(1.1-31)式右端项为0时的通解(1.1-19)式和其特解(1.1-32)式相加即可得到其完全解,然后再利用初始条件 $x_0 = v_0 = 0$ 进行整理,最终可得完全解为

$$x = \frac{x_s}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\gamma\beta)^2}} \left\{ \frac{e^{-\gamma\omega t}}{\sqrt{1-\gamma^2}} [-\sin(\theta - \alpha)\cos(\omega_d t - \alpha_\gamma) - \beta\cos(\theta - \alpha)\sin\omega_d t] + \sin(\Omega t + \theta - \alpha) \right\} \quad (1.1-33)$$

在(1.1-33)式中,与方括号内的项有关的部分是由(1.1-31)式的右端项为0时的通解引出的,它将随时间的推移而不断衰减至0,故代表瞬态振动。而与方括号外的项有关的部分则是由(1.1-31)式的特解引出的,它是一种简谐振动,不随时间的推移而衰减,因而称为稳态振动。因此,经历一段时间后,系统对外加激励的响应将完全取决于稳态振动。

根据(1.1-33)式,图 1.1-4 给出当 γ 不太大时位移响应的典型结果,其中 $\theta = 90^\circ$ 。

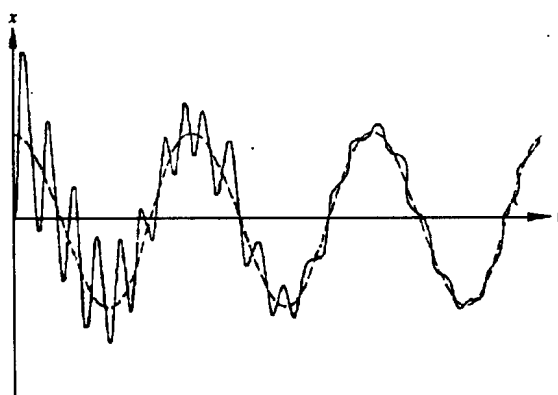


图 1.1-4 典型的位移响应曲线, $\theta = 90^\circ$

(1) 振幅—频率与相位—频率特性

(1.1-32)式表明在稳态振动中位移

响应的幅值即振幅与静位移之比取决于因子 $1/\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\gamma\beta)^2}$,不妨称之为动力放大因子。它与频率比 β 及粘性阻尼系数 γ 之间的关系曲线在图 1.1-5(a)中给出,称为系统的振幅—频率特性,简称幅频特性。此外,在图 1.1-5(b)中给出了位移响应的相位角 α 与 β 及 γ

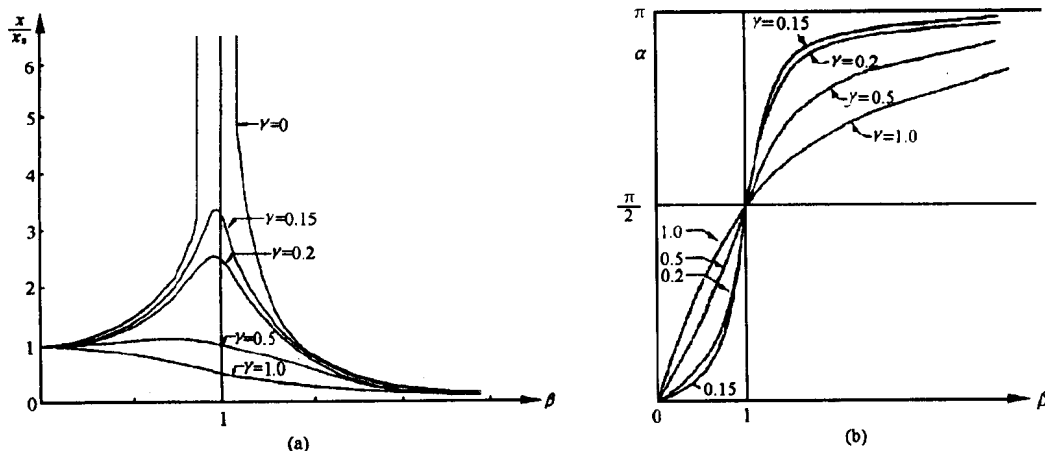


图 1.1-5 位移响应的(a)幅频特性和(b)相频特性

之间的关系曲线,称为相位—频率特性,简称相频特性。

(2) 共振

从图 1.1-5(a)可以看到,对于无阻尼系统($\gamma=0$),当激励角频率 Ω 等于固有角频率 ω 时,振幅将趋向无限大,这种现象称为共振。对于粘性阻尼不太大($\gamma < 1/\sqrt{2}$)的振动系统,当 Ω 接近于 ω 时,振幅曲线趋向一个峰值。使振幅达到最大值即共振峰值的激励角频率 Ω_d 称为位移共振角频率,它可以利用微积分的方法从动力放大因子求出为

$$\Omega_d = \sqrt{1-2\gamma^2} \omega \quad (1.1-34)$$

另外,将(1.1-32)式对时间微分,即可得到振动速度响应的表达式,由此可求出使振动速度之幅值达到最大值的激励角频率 Ω_v 为

$$\Omega_v = \omega \quad (1.1-35)$$

称为速度共振频率。类似地,还可求出加速度共振频率 Ω_a 为

$$\Omega_a = \frac{\omega}{\sqrt{1-2\gamma^2}} \quad (1.1-36)$$

应该注意,上述三种共振频率与阻尼固有角频率 $\omega_d = \sqrt{1-\gamma^2}$ 在 $\gamma \neq 0$ 时是各不相同的。在共振时,即使激励力的幅值很小,系统也会产生很大的响应。共振现象构成了用实验方法测定实际振动系统固有频率的物理基础。早期的实验方法在原则上是对系统施加简谐激励力,并将其驱动频率由 0 开始逐渐增大,得到位移响应的幅频特性曲线,对应于共振峰值的驱动频率即是共振频率。这种实验称为共振实验。

由图 1.1-5(b)可知,当 $\beta = 0$ 时相位角 $\alpha = 0$,当 $\beta = 1$ 时相位角 $\alpha = \pi/2$,而当 $\beta \gg 1$ 时相位角 α 则向 π 逼近。这意味着在静载荷作用下,位移响应与力的作用方向是一致的。随着驱动频率逐渐增大,位移响应将以一个逐渐增大的相位角滞后于激励力。当驱动频率接近于无阻尼固有频率时,相位角将接近 90° 。最后当驱动频率非常大时,位移响应则差不多与力的作用方向相反。值得注意,不论粘性阻尼的大小,当驱动频率等于结构无阻尼固有频率时,位移响应总是滞后于激励力 90° 。但由于在简谐振动中,振动速度要超前位移 90° ,故振动速度总与激励力同相。这种现象称为相位共振,相应的频率称为相位共振频率,并恰与速度共振频率相等。在共振实验中,如果把激励力信号输入示波器的水平轴而把振动速度信号输入示波器的垂直轴,则相应的李莎尔(Lissajous)图形将闭合成一条直线。

往往有人错误地认为在位移共振频率下的相位角也是 90° ,其实这时 $\beta = \sqrt{1-2\gamma^2}$,而 $\alpha = \tan^{-1}\sqrt{1-2\gamma^2}/\gamma$ 。

(3) 共振峰宽度与品质因子 Q

将位移共振频率 $\Omega_d = \sqrt{1-2\gamma^2}\omega$ 代入(1.1-32)式,即可得到位移共振峰值 x_d 为

$$x_d = \frac{x_s}{2\gamma\sqrt{1-\gamma^2}} \quad (1.1-37)$$

另外,如图 1.1-5(a)所示,共振峰的宽度将随粘性阻尼的增大而变宽。因此,也可利用共振峰的测量曲线来计算粘性阻尼系数 γ 。当 γ 不大时,可假设共振峰的形状十分接近于对称形状。于是,对在 Ω_d 的左侧但很靠近它的一个频率 Ω_1 ,可设 $\Omega_1 = \Omega_d - \Delta\Omega/2$,其中, $\Delta\Omega$ 近似地表示共振峰的宽度,如图 1.1-6 所示。

利用(1.1-32)式, 可得在 Ω_1 下位移响应幅值 x_1 为

$$x_1 = \frac{x_s}{\sqrt{(1 - (\frac{\Omega_d}{\omega} - \frac{\Delta\Omega}{2\omega})^2)^2 + (2\gamma(\frac{\Omega_d}{\omega} - \frac{\Delta\Omega}{2\omega}))^2}}$$

由于当 γ 不大时 $\Omega_d \approx \omega$, 略去高阶小量后可得

$$x_1 \approx \frac{x_s}{\sqrt{(\frac{\Delta\Omega}{\Omega_d})^2 + 4\gamma^2}} \quad (1.1-38)$$

由此

$$\frac{x_d}{x_1} \approx \frac{\sqrt{(\frac{\Delta\Omega}{\Omega_d})^2 + 4\gamma^2}}{2\gamma\sqrt{1-\gamma^2}} \approx \frac{\sqrt{(\frac{\Delta\Omega}{\Omega_d})^2 + 4\gamma^2}}{2\gamma} \quad (1.1-39)$$

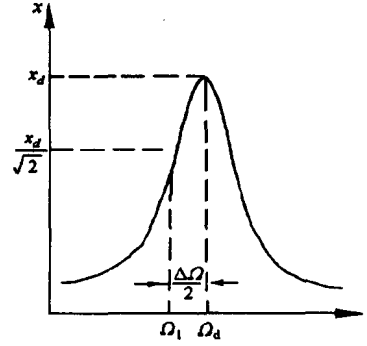


图 1.1-6 表示“半功率点”处共振峰宽度的响应曲线

如果取 $x_1 = x_d/\sqrt{2}$ 则由上式可得

$$\gamma = \frac{\Delta\Omega}{2\Omega_d} \quad (1.1-40)$$

即是说, 如果把振幅响应曲线在 x_1 处的宽度定义为共振峰的宽度 $\Delta\Omega$, 则很容易从(1.1-40)式算出粘性阻尼系数 γ 。

利用(1.1-32)式, 可以计算简谐激励力 $F\sin\Omega t$ 在系统振动一周内输入系统的平均功率 W 为

$$W = \frac{2\pi}{\Omega} \int_0^{2\pi} \dot{x} F\sin\Omega t dt = \frac{Fx_s \sin\alpha}{2\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\gamma\beta)^2}} \quad (1.1-41)$$

系数 $\sin\alpha$ 称为功率因子。当 $\alpha=0$ 时, 每周平均功率为 0, 而当 $\alpha=90^\circ$ 时达最大值, 这差不多发生在共振频率下但不十分确切。对于无阻尼系统, 由于在非共振时 $\alpha=0$, 故不可能吸收能量。但在共振时, 每周都会吸收能量而又无能量损耗, 故振幅将不断增大而趋向于无限大。对于一个粘性阻尼系统, 当 γ 不大时, 把 $\Omega = \Omega_d$ 代入(1.1-41)式并代入相应情况下的 α 值, 略去高阶小量后得到在位移共振频率下的每周平均功率 W_d 为

$$W_d \approx \frac{1}{2} \frac{Fx_s}{2\gamma} \quad (1.1-42)$$

令 $Q = 1/2\gamma$ 并称之为品质因子。显然, 品质因子的物理意义是在位移共振频率下由激励力输入系统的每周平均功率与静载荷所作功之比值。

如果把 $\Omega_1 = (1-\gamma)\Omega_d$ 代入(1.1-41)式, 注意到这时 $x_1 = x_d/\sqrt{2}$, 则略去高阶小量后

$$W_1 \approx \frac{1}{2} \frac{Fx_s}{4\gamma} \quad (1.1-43)$$

比较(1.1-42)式和(1.1-43)式, 可知 $W_d = 2W_1$ 。因此, $x_1 = x_d/\sqrt{2}$ 是相应于半功率点的位移响应幅值。

(4) 无阻尼情况 ($\gamma=0$)

当 $\gamma=0$ 时, 各种共振角频率均与系统的固有角频率 ω 相等。在共振频率下, 振幅将趋向无限大, 并当激励频率越过共振频率时, 相位角突然从 0° 改变为 180° , 即位移响应从与激励力

同相突然变为反相。这种现象在工程实践中具有重要意义。例如,为了防止飞机的机翼一副翼系统发生颤振,要求将副翼配平,即在副翼的转轴之前安装一些配重使副翼的重心尽可能地前移到转轴附近。但若这些配重在其安装位置上的固有频率小于副翼的转动振动频率时,则这些配重的振动方向将与副翼相应位置上的振动方向相反,因此配重的作用不但不能达到预期效果反而会适得其反。处理这类问题的关键,是要精心设计安装方式,保证安装位置处有足够大的局部刚度以便保证配重在其安装位置上有足够高的固有频率。

(5) 拍

当 $\gamma=0$ 时,(1.1-33)式退化为

$$x = \frac{x_s}{(1-\beta^2)} \{ \sin(\Omega t + \theta) - \sin\theta \cos\omega t - \beta \cos\theta \sin\omega t \} \quad (1.1-44)$$

现在考虑驱动角频率 Ω 与固有角频率 ω 十分接近时的情况。此时可设 $\Omega - \omega = 2\delta$, 其中 δ 是一小量。因此 $\beta \approx 1, (1-\beta^2) \approx -4\delta/\omega$ 。于是,(1.1-44)式可简化为

$$\begin{aligned} x &= -\frac{\omega x_s}{4\delta} \{ \sin(\Omega t + \theta) - \sin(\omega t + \theta) \} \\ &= -\frac{\omega x_s}{2\delta} \cos(\omega t + \theta) \sin\delta t \end{aligned} \quad (1.1-45)$$

由于 δ 为小量,故 $\sin\delta t / 2\delta$ 是以周期 $2\pi/\delta$ 作缓慢简谐变化而幅值很大的一个函数。在这种情况下,(1.1-45)式可看作是一个周期为 $2\pi/\omega$ 而幅值可变且等于 $\omega x_s \sin\delta t / 2\delta$ 的振动运动。这种振动称为拍并如图 1.1-7 所示。拍的周期等于 π/δ , 随着 Ω 逼近 ω 即临近共振状态而增长。

对于极限情况,即 $\Omega = \omega$ 时,(1.1-45)式成为

$$x = -\frac{1}{2} \omega x_s t \cos(\omega t + \theta) \quad (1.1-46)$$

上式表示振幅在共振时将随时间不断地无限增大,如图 1.1-8 所示。

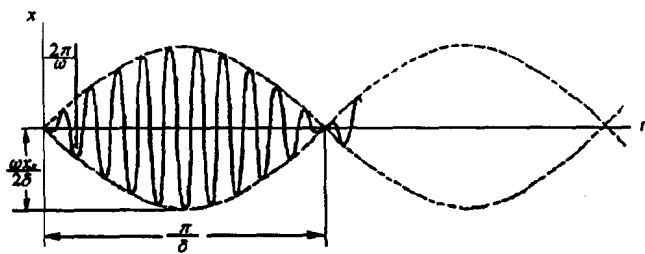


图 1.1-7 拍, $\theta=0$

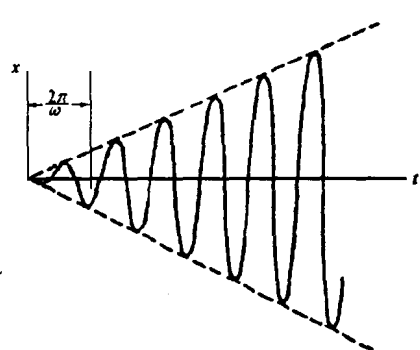


图 1.1-8 振幅在共振时的增大过程

上图表明,虽然在理论上无阻尼系统强迫振动的振幅在共振时为无限大,但建立起大振幅需要时间。工程

上有一些机器,如高速透平机,其工作转速远在其共振转速之上,但若把机器设计成能很快地越过共振转速,则在越过共振状态时将不致于碰到大的困难。然而,任一振动系统如果在临近共振时已经达到稳定的振动状态,那么再想加速机器使之越过共振转速是很困难的。为此而输入的附加功率多半会被用来增加振动的幅度而不是被用来加快机器的转速。