И. Г. МАЛКИН

ТЕОРИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва Ленинград
1952

內 容 提 要

本書詳細地闡述了俄罗斯傑出学者李雅普諾夫和他的后繼者关于运动稳定性理論的工作．运动稳定性理論不但是微分方程定性理論的重要組成部分，而且在自动控制、振动理論等各方面有着重要的实际应用．在闡明基本理論的同时，書中还附有若干工程技术上的具体例子（砲彈运动、調节系統的稳定性等）．讀者对象是科学工作者、大学学生．同时本書也是学習运动稳定性理論的一本很好的入門書．

运动稳定性理論

И．Г．馬尔金 著
解 伯 民 等 譯

科学出版社出版（北京朝阳門大街117号）
北京市書刊出版业营业許可証出字第061号
中国科学院印刷厂印刷 新华書店总經售

1958年8月第一版 書号：1238 印張：15¼
1958年8月第一次印刷 开本：850×1168 1/32
（京）0001—1,470 字数：370,000

定价：（10）2.80元

目　录

第 一 章

基本概念和定义

§ 1. 問題的提法

运动稳定的理論是从事研究干扰性的因素对于物質系統运动的影响。所謂干扰性的因素应了解为那些在描述运动时由于与基本的力相較甚小而未加以考虑的力。这些干扰力通常是未知的。它們可以是瞬时的作用，因而引起物質系統初始狀态的微小变化，也就是初始坐标和速度的微小变化。不过这些因素也可以連續地作用，这就是說，我們所建立的运动的微分方程与真实的情况有所差别，因为其中沒有考虑某些微小的校正的項。

大家都知道，微小的干扰因素对于物質系統运动的影响对于不同的运动是不一样的。对于一些运动，这种影响并不显著，因而受干扰的运动与不受干扰的运动相差很少。反之，对于某些运动，干扰的影响可能就很显著，以致于無論干扰的力多么小，受干扰的运动与不受干扰的运动差得都很多。第一类运动称为是稳定的，而第二类运动称为是不稳定的。

运动稳定理論就是从事于建立一些准則，用以判断所考察的运动是稳定的还是不稳定的。因为在实际情况中干扰的因素总是不可避免的存在着的，由此就可以了解，运动稳定的問題具有多么重要的理論的和实际的意义。

許多最傑出的数学家和力学家都曾經从事于研究运动稳定的問題。关于平衡的稳定的基本定理还是由拉格朗日（Lagrange）建

立的。[2]劳斯(Routh)的研究就是以这个定理为出發点，他建立了某些特殊运动稳定的准則。湯姆生(Thomson)和泰特(Tait)以及茹可夫斯基(Н. Е. Жуковский)也都研究过运动稳定的問題。所有这些学者都只研究了極个别的运动情况，而在解决問题时所应用的方法也并不严格。問題的第一个严格的解是屬于龐卡賴(Poincaré)的，不過龐卡賴的結果仍然具有很局限的性質。

在1892年出現了著名的A. M. 李雅普諾夫的博士論文"运动稳定的一般問題"[1)]，在这部傑出的著作中，第一次最广泛地建立了运动稳定的問題，并提出了成效卓著的严格的解法。李雅普諾夫的这本著作是所有以后的关于运动稳定研究的起点。

上面我們只給出了运动稳定和不稳定的非常概括性的定义。这些概念自然需要更准确的定义。不同的作者以不同的方式确定了这些概念，因而也就以不同的方式建立了稳定的問題。問題的最广泛的提法是由李雅普諾夫作出的。这种提法最为成功而且最能适合应用的需要。这也就說明了这样一件事实，就是近年来由于現代技术——它总是牽涉到巨大的速度和广泛地应用自动控制——提出了特别現实的运动稳定的問題，因而人們对于李雅普諾夫的理論表現了極大的兴趣。

本書就是討論在李雅普諾夫意义下的运动稳定的理論。其中闡述了李雅普諾夫和他的后繼者的基本結果。

§2. 稳定的定义

关于运动稳定的概念乃是平衡稳定的概念的直接推广。至于后者，大家都知道，可以用下面的話来說明。

考慮任何具有由广义坐标 $q_1, q_2, \cdots, q_k$ 所决定的 k 个自由度

1) Ляпунов А. М., Общая задача об устойчивости движения, Харьков, 1892. 3-е изд., Гостехиздат, 1950. 下面在叙述A. M. 李雅普諾夫的各种結果时，如果不特别声明，总是指的这本書.

的动力系統。假設这个系統有平衡位置，它由广义坐标的值 α_i 决定，也就是說运动的方程具有特解 $q_i=\alpha_i$。如使系統离开平衡位置，設其坐标的差值为 ε_i，幷給予系統以初速度 ε_i'，換句話說，就是来考察由初始条件

$$q_i(t_0)=\alpha_i+\varepsilon_i, \qquad \dot{q}_i(t_0)=\varepsilon_i' \qquad (i=1,2,\cdots,k)$$

所决定的系統的运动。

如果对于所有这种运动，当坐标的初始差值 ε_i 和初速度 ε_i' 数值上小于某个足够小的正数 η 时，坐标的差值 $q_i-\alpha_i$ 和速度在任何时候数值上都小于無論多小的正数 ε，那末平衡就称为是稳定的，否則平衡是不稳定的。

稳定和不稳定平衡最簡單的熟知的例子就是單擺在最低的和最高的垂直位置的平衡。

根据稳定的定义，我們应注意到兩个基本的要点：

1)关于平衡的稳定或不稳定，是根据在平衡位置附近所發生的运动的性質来判断的。

2)对于稳定平衡，必須是只要适当地选擇系統离开平衡位置的初始差值和初速度，就可以使这些差値和速度总是小于任何預先給定的数。譬如圖 1 所示的單擺的最高垂直位置，無論 α 角多小，它都是不稳定的，因为無論怎样选擇运动的初始条件，都不可能使得單擺的与平衡位置的差値小于 α。

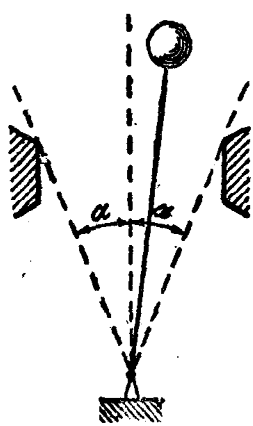

圖 1

根据李雅普諾夫的定义，可以与平衡的稳定完全类似的来定义运动的稳定。

考虑任意的动力系統，假設它的运动可以用微分方程組来描述，而这些微分方程可以化为規范形式：

$$\frac{dy_s}{dt}=Y_s(t,y_1,y_2\cdots,y_n) \qquad (s=1,2,\cdots,n). \tag{2.1}$$

其中 y_s 是某些与运动有关的參数，例如坐标、速度，或者一般地是这些量的某些函数。

考慮这个系統的任何特殊运动，它相应于方程(2.1)的某个特解 $y_s=f_s(t)$。我們称这个运动是未受干扰的，以別于这个系統的其他那些我們称为受干扰的运动。量 y_s 在任何受干扰的和未受干扰的运动中的差値我們称为扰动或干扰。

定义. 如果对于任意正数 ε，無論它多么小，可以找到另一正数 $\eta(\varepsilon)$，使得对于所有受干扰的运动 $y_s=y_s(t)$，当其在初始时刻 $t=t_0$ 时滿足不等式

$$|y_s(t_0)-f_s(t_0)|\leqslant\eta, \tag{2.2}$$

而在所有 $t>t_0$ 时，滿足不等式

$$|y_s(t)-f_s(t)|<\varepsilon, \tag{2.3}$$

则未受干扰的运动称为对于量 y_s 是稳定的。

未受干扰的运动如果不是穩定的，則称为不穩定。由此可知，如果存在有任何固定的数 ε，而在任何無論多小的数 η 时，即使只有一种受干扰的运动，它滿足不等式(2.2)，但在某一时刻，不等式(2.3)中即使只有一个变为等式，那末运动就是不穩定的。

作为一个例子，我們再来研究普通的摆，但不是研究它的平衡的穩定，而是研究它的由初始条件 $\varphi(t_0)=\alpha,\dot{\varphi}(t_0)=0$ 決定的运动的穩定，这里 φ 是离开鉛垂方向的角度。我們来說明，这个运动关于 φ 和 $\dot{\varphi}$ 是不穩定的。为此，考慮任何受干扰的运动，它由初始条件 $\varphi(t_0)=\alpha+\delta,\dot{\varphi}(t_0)=0$ 決定，其中 δ 是無論多小的正数。我們都知道，單摆振动的周期与初始条件有关，而在初速度为零时，如初始振幅愈大，則周期愈長。因此，受干扰的振动的周期 T' 將大于未受干扰的振动的周期 T。而在兩种振动中的 φ 角之差値——在初始时刻，它等于 δ——經过时間 T' 后，將略有增加。如

果 δ 愈小,这个增值也就愈小. 不过無論 δ 多小,經过了足够長的时間以后, φ 角的差值逐渐积累而会变得,譬如說,大于 α. 因此,未受干扰的运动是不稳定的.

旋輪摆的振动则可作为运动稳定的例子. 在这个情形,运动的稳定是由大家都知道的旋輪摆振动的周期与初始条件無关的性質所决定的.

可能有这样的情形,未受干扰的运动不但是稳定的,而且当初始扰动足够小时,随着时間 t 的無限增加,所有受干扰的运动都逐渐趋近于未受干扰的运动.在这种場合,我們說未受干扰的运动是**渐近稳定的**.

§ 3. 干扰运动的微分方程

为了研究运动的稳定,最好將运动的方程变换到新坐标:

$$x_s = y_s - f_s(t) \qquad (s=1,2,\cdots,n). \tag{3.1}$$

这里 $f_s(t)$ 是方程 (2.1) 的对应于未干扰运动的特解,因而 x_s 就是扰动.

由这种轉换得到的方程

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(t, x_1, x_2, \cdots, x_n) \equiv$$

$$\equiv Y_s(t, x_1+f_1, \cdots, x_n+f_n) - Y_s(t, f_1, \cdots, f_n) \tag{3.2}$$

称为**干扰运动的微分方程**. 系統的每一种运动就相应于方程 (3.2) 的一个特解. 特别是未干扰的运动显然就相应于零解 $x_1 = = \cdots = x_n = 0$, 所以方程組 (3.2) 必須有这样的解,而这就需要当 $x_1 = \cdots = x_n = 0$ 时,函数 $X_s(t, x_1, \cdots, x_n)$ 成为零. 由方程(3.2)直接可以看出的确是这样的.

不等式(2.2)和(2.3)如以变量 x_s 表示,各具有下列形式:

$$|x_s(t_0)| \leqslant \eta, \tag{3.3}$$

$$|x_s(t)| < \varepsilon, \tag{3.4}$$

因而稳定的定义可以下列方式来表述。

如果对于任何正数ε,無論它多么小,可以选擇另一正数$\eta(\varepsilon)$,使得对于所有受干扰的运动，当其在初始时刻 t_0 时满足不等式(3.3),而在所有 $t>t_0$ 时,满足不等式(3.4),則未受干扰的运动是稳定的。

如果未受干扰的运动是稳定的，并且数 η 可以选擇得如此之小,使得对于所有满足不等式(3.3)的受干扰的运动满足条件

$$\lim_{t\to\infty} x_s(t) = 0,$$

則未受干扰的运动称为漸近稳定的。

現在来看几个建立干扰运动的方程的例子。

例1. 作为第一个例子，考虑長度为 l 的数学摆的振动。大家都知道,它由下列微分方程表示:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}=-\frac{g}{l}\sin\varphi, \tag{3.5}$$

其中 φ 是与鉛垂方向相差的角度。假設需要研究由初始条件 $\varphi(0)=\alpha$, $\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_0=0$ 所决定的运动的稳定 $\left(\text{对于}\ \varphi\ \text{及}\ \frac{d\varphi}{dt}\right)$。方程(3.5)的相应的特解具有下列形式:

$$\varphi=f(t),$$

其中 $f(t)$ 是某一周期函数,我們沒有必要把它明显地写出来。

令 $x=\varphi-f(t)$,我們得到受干扰运动的微分方程如下:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{g}{l}\sin[x+f(t)]+\frac{g}{l}\sin f(t),$$

或者展开为 x 的冪級数而得到

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{g}{l}x\cos f(t)+\frac{g}{2l}x^2\sin f(t)+\cdots. \tag{3.6}$$

这个方程自然可以表示为兩个一阶的方程組。

例2. 考虑剛体由于慣性繞固定点的轉动。运动微分方程是

$$
\left.\begin{aligned}
A\frac{dp}{dt}+(C-B)qr=0,\\
B\frac{dq}{dt}+(A-C)rp=0,\\
C\frac{dr}{dt}+(B-A)pq=0,
\end{aligned}\right\}\tag{3.7}
$$

其中 p, q, r 是瞬时角速度向量在活动坐标軸上的投影，这些坐标軸与剛体在固定点的惯性主軸相重合，而 A, B, C 是剛体圍繞这些軸的惯性矩。

方程(3.7)有特解

$$
p=\omega=\text{const}, \qquad q=r=0, \tag{3.8}
$$

以及对应于其他兩个坐标軸的类似的特解。我們取运动(3.8)作为未受干扰的，令

$$
x=p-\omega, \qquad y=q, \qquad z=r,
$$

并代入(3.7)，于是得到受干扰的运动的微分方程：

$$
\left.\begin{aligned}
A\frac{dx}{dt}+(C-B)yz=0,\\
B\frac{dy}{dt}+(A-C)(x+\omega)z=0,\\
C\frac{dz}{dt}+(B-A)(x+\omega)y=0.
\end{aligned}\right\}\tag{3.9}
$$

在一般情形，受干扰运动的微分方程明显地含有时間 t。不过也可能这些方程不包含时間 t。例如当研究任何具有稳定約束的、受到不显明地依賴于时間 t 的力作用的完整系統的平衡的稳定(对于坐标及速度)时，就总是这样的。在这种情形，运动方程(2.1)并不显明地含有 t，而函数 $f_s(t)$ 在这种場合也变为常数，因而受干扰运动的方程(3.2)也不含有 t。

不过当研究的不是平衡的稳定，而是运动的稳定时，受干扰运

动的方程也可以不含有 t。实际上，旣然在方程(2.1)中，变量 y_s 一般地不是坐标或速度，而是这些量的某些函数，那就完全可能，对于我們所考察的未干扰的运动，它們是常数，虽然坐标和速度是在改变。如果此时方程(2.1)不依賴于 t，那末受干扰运动的方程也就不依賴于 t。

以后如果受干扰运动的方程不明显地含有 t，我們就把未受干扰的运动称为**定常的**。前面所述的剛体繞定点的运动 (3.8) 就是这样的例子，它的干扰运动的微分方程(3.9)并不显明地包含 t。

在研究运动的稳定时，定常运动是最簡單的情况。同时非常多的实际問題也都屬于这种情况。就簡單性而言，次一类情形就是干扰运动的方程的右端是 t 的周期函数。关于振动的稳定問題常常归結于这一类方程。前面所述的数学摆振动的稳定問題就是一个例子。方程 (3.6) 的右端关于 t 是周期性的，因为 $f(t)$ 是周期函数。

§ 4. 按李雅普諾夫意义的稳定以及其他一些稳定的定义

在前面所述的李雅普諾夫的定义下，我們是考察未干扰的运动对于干扰的初始条件的稳定。物理上这就表示，我們是考察对于瞬时作用的扰动的稳定。不过，真正的力学系統常常是受到不大的干扰力的經常作用，在建立运动方程时，要考虑它們实际上是不可能的。因此，研究运动对于这种經常作用的扰动的稳定性就具有特别的意义。从数学的观点看来，这就表示，不但要考虑初始条件的扰动，而且还必須考虑运动方程本身的扰动。在經常作用的扰动下，我們采用下面的稳定的定义[1]。

代替运动方程(2.1)，我們考虑微分方程

$$\frac{dy_s}{dt}=Y_s(t, y_1,\cdots,y_n)+R_s(t,y_1,\cdots,y_n) \qquad (4.1)$$

$$(s=1,2,\cdots,n).$$

其中$R_s(t,y_1,\cdots,y_n)$是某些决定干扰因素的已知函数，对于这些函数，我們只能說，它們是足够的小，并且滿足某些一般的条件，使得方程(4.1)在所考察的未干扰运动的附近有解存在。

如果对于任何正数ε，無論它多么小，存在有兩个其他的正数$\eta_1(\varepsilon)$和$\eta_2(\varepsilon)$，使得方程(4.1)的任何解$y_s(t)$，当在$t=t_0$时滿足不等式

$$|y_s(t_0)-f_s(t_0)|<\eta_1(\varepsilon),$$

而在$t>t_0$时滿足不等式

$$|y_s(t)-f_s(t)|<\varepsilon,$$

并不論$R_s(t, y_1, \cdots, y_n)$是怎样的函数，只要它在区域$t>t_0$，$|y_s-f_s(t)|<\varepsilon$內滿足不等式

$$|R_s(t,y_1,\cdots,y_n)|<\eta_2(\varepsilon),$$

則我們說未受干扰的运动$y_s=f_s(t)$[方程(2.1)的特解]在經常作用的扰动下是稳定的。

如此定义的在經常作用的干扰之下的稳定，乃是按李雅普諾夫意义的稳定的直接推广，并且，正如上面所指出的，它具有最大的实际意义。驟然看来，这个定义似乎使得李雅普諾夫的稳定的理論在某种程度內有所減色，不过这是不正确的。因为，第一，李雅普諾夫的方法对于研究在經常的干扰作用下的稳定同样是适用的；第二，至少在最重要的实际問題中，关于在經常作用的干扰之

1) 参看 Дубошин Г. Н., К вопросу об устойчивости движения относительно постоянно действующих возмущений. Труды ГАИШ, т.XIV, вып.1, 1940. 微小干扰力对于动力系統运动的稳定的影响首先由 Четаев Н. Г. 在其著作"Об устойчивых траекториях динамики"(Учен. зап. Казанского Гос. ун-та, кн. 4, вып.1) 中予以研究(也請参看 Сборник научных трудов Казанского авиац. ин-та, №5, 1936). 关于这个問題，还有下列著作：Артемьев Н.А., Осуществимые движения. Изв. АН СССР, сер. матем., №3, 1939; Малкин И.Г., "Об устойчивости при постоянно действующих возмущениях". Прикл. матем. и мех., т.VIII, №3, 1944.

下的稳定問題是可以直接归結于李雅普諾夫的稳定問題的．下面（§74）將証明，至少对于定常的和周期性的运动，在李雅普諾夫意义下的漸近稳定，乃是在經常作用的干扰之下的稳定的充分条件。

在估价李雅普諾夫理論的实际应用性时，有时会得到相反的結果。为了說明这个問題，我們来研究一个極簡單的系統，它由下列微分方程所表示：

$$\frac{dx}{dt}=x(\alpha^2-x^2), \tag{4.2}$$

其中 α 是一个常量．对于这个系統，显然有平衡位置 $x=0$ 存在．这个平衡是不稳定的．事实上，方程(4.2)的普遍解是

$$\alpha^2(t-t_0)=\ln\left|\frac{x\sqrt{\alpha^2-x_0^2}}{x_0\sqrt{\alpha^2-x^2}}\right|, \tag{4.3}$$

其中 x_0 是 x 的初始值(在 $t=t_0$ 时)．

在 $|x_0|<\alpha$ 及 $|x_0|>\alpha$ 时，解(4.3)都給出函数 x 的实数值．而在这两种場合，都有

$$\lim_{t\to\infty}x(t)=\pm\alpha. \tag{4.4}$$

由此就直接得知，平衡位置 $x=0$ 是不稳定的．因为無論在初始时刻的差値多么小，这个差値最后总会大于某个指定的数(例如 $\frac{\alpha}{2}$)．但是，在另一方面，如果在这个問題中的量 α 实际上是很小的，因而离开平衡位置的偏差 α 并不具有任何实际的意义，那末我們就必須認为平衡位置实际上是稳定的．不仅如此，我們还必須認为平衡位置是極为稳定的，因为無論在多末大的 x_0 时，条件(4.4)都成立．不难看出，在这个場合，"实际的"稳定性乃是由下列情况所决定的，即在不稳定的平衡位置 $x=0$ 的附近，存在有两个在李雅普諾夫意义下的漸近稳定的平衡位置 $x=\pm\alpha$．容易証明，当 $n=1$ 时，对于定常运动，只有在所考虑的平衡位置的附近

（或者定常运动的附近，这依賴于量 x 的意义）存在有兩个在李雅普諾夫意义下的稳定的平衡位置时，在上述意义下的实际的稳定才是可能的．由此可知，在我們所考虑的这个情形，关于“实际的”稳定的問題是可以归結到李雅普諾夫的稳定問題的．当 $n>1$ 时，在上述意义下的“实际”稳定的問題要复杂一些．不过，正如以后（§44）所指出的，至少在最重要的实际問題中，这类問題同样是归結于研究在李雅普諾夫意义下的稳定。

綜上所述，我們可以看出李雅普諾夫所給出的稳定的定义具有多么重大的实际意义。同时，上面的例子也說明了，对于实际，重要的不仅是說明运动是否稳定，而且还要能决定許可的初始扰动的区域。后面这个問題李雅普諾夫沒有研究，但由他所發展的方法提供了解决这个問題的可能性。

§5．关于解决稳定問題的方法

在所有那种場合，当受干扰的运动的微分方程能够积分为封閉的形式时，稳定性的研究当然沒有什么困难。不过这种情况是極个别的，而在实际中几乎不会遇到。因此，研究者的精力主要都放在探寻解决稳定問題的方法，使我們無須积分运动的方程。在李雅普諾夫以前的先驅者通常都应用綫性化的方法。这个方法如下所述。

將受干扰运动的方程(3.2)的右端按 x_s 的冪展开为級数。对于大多数的力学問題，这种展开是可能的。因为 $X_s(t, 0, \cdots, 0)=0$，所以展开式中不包含自由項，我們可以写作

$$\frac{dx_s}{dt}=p_{s1}x_1+\cdots+p_{sn}x_n+X_s^*(t, x_1, \cdots, x_n) \qquad (5.1)$$

$$(s=1, 2, \cdots, n),$$

其中 X_s^* 是函数 X_s 的所有高于一次項的总和。既然在稳定問題中，必須研究方程(5.1)在量 x_s 的很小的初始值时的解，于是就很