

自动控制原理

下 册

李 友 善 主 编



國防工業出版社

自动控制原理

(下 册)

李友善 主编

国防工业出版社

内 容 简 介

《自动控制原理》一书分上、下两册出版。本书为下册，其内容包括：非线性控制系统的描述函数分析法与相平面分析法，离散系统的分析与综合，在平稳随机函数作用下线性系统的分析，控制系统的状态空间分析法，李雅普诺夫稳定性分析，控制系统的状态空间综合法等。

书中通过古典控制理论与现代控制理论，阐述自动控制技术中的基本概念、基本原理和基本分析方法。每章均附有一定数量的例题和习题。

本书是高等院校自动控制与导航专业《自动控制原理》课程的试用教材，也可供计算机控制，工企电自动化、测量仪表、热工仪表、液压控制等专业师生和有关的科技人员参考。

自 动 控 制 原 理

(下 册)

李 友 善 主 编

*

国防工业出版社出版

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

国防工业出版社印刷厂印装

*

787×1092¹/₁₆ 印张 32³/₄ 768 千字

1981年8月第一版 1983年11月第二次印刷 印数：15,501—37,900册

统一书号：15034·2236 定价：3.35元

前 言

本书系根据一九七八年至一九八〇年全国造船专业教材会议通过的《自动控制原理》大纲编写的。本册内容包括：非线性控制系统的描述函数分析法和相平面分析法，离散系统的分析与综合，在平稳随机函数作用下线性系统的分析，控制系统的状态空间分析法，李雅普诺夫稳定性分析，控制系统的状态空间综合法等。

本书由哈尔滨工业大学自动控制理论教研室李友善、强文义两同志编写，李友善副教授任主编。由哈尔滨船舶工程学院朱克定、吕思义、高淑林三同志审阅，朱克定副教授任主审。在写作过程中得到了哈尔滨工业大学自动控制理论教研室全体同志及教材科同志的大力支持，在此一并致谢。

编 者

目 录

第八章 非线性控制系统的分析	1	习题	219
§ 1 控制系统中的典型非线性特性	1	第十一章 控制系统的状态空间	
§ 2 描述函数法	7	分析法	221
§ 3 波波夫法	44	§ 1 引言	221
§ 4 相平面分析法	51	§ 2 线性定常系统的状态空间表达式	222
§ 5 点变换法	84	§ 3 线性定常系统的分析	255
§ 6 利用非线性特性改善系统的控制性能	86	§ 4 线性时变系统的分析	287
习题	92	§ 5 线性离散系统的状态空间表达式	298
第九章 线性离散系统的分析与综合	96	§ 6 线性离散系统状态方程的解	309
§ 1 引言	96	§ 7 数字控制系统状态方程的解	316
§ 2 采样过程与采样定理	98	§ 8 线性时变离散系统状态方程的解	330
§ 3 信号恢复	102	§ 9 线性连续状态方程的离散化	333
§ 4 Z 变换	106	§ 10 非线性系统的分析	339
§ 5 Z 变换的基本定理	114	习题	355
§ 6 Z 反变换	116	第十二章 李雅普诺夫稳定性分析	359
§ 7 脉冲传递函数	123	§ 1 李雅普诺夫稳定性定义	359
§ 8 稳定性分析	136	§ 2 判别系统稳定性的李雅普诺夫方法	362
§ 9 根轨迹法在分析线性离散系统中		§ 3 线性系统的李雅普诺夫稳定性分析	366
的应用	143	§ 4 非线性系统的李雅普诺夫	
§ 10 频率特性法在分析离散系统中		稳定性分析	380
的应用	152	习题	399
§ 11 线性离散系统的数字校正	160	第十三章 控制系统的状态空间	
习题	170	综合法	401
第十章 平稳随机函数作用下线性		§ 1 线性系统的能控性与能观测性	401
系统的分析	172	§ 2 线性系统的状态反馈与状态观测器	436
§ 1 引言	172	§ 3 线性数字控制系统的综合	456
§ 2 随机过程	172	§ 4 非线性数字控制系统的综合	465
§ 3 相关函数与谱密度	176	§ 5 最优控制问题与线性二次型问题	472
§ 4 平稳随机函数作用下线性系统		§ 6 最大值原理	480
的分析	194	§ 7 动态规划法	489
§ 5 平稳随机函数作用下线性离散		习题	498
系统的分析	202	附录 数学基础——矩阵	504
附录 A 概率论的基本概念	209	§ 1 矩阵的定义	504
附录 B $\frac{\sin x}{x}$, $\frac{\cos x}{x}$ 函数表	214	§ 2 矩阵代数	507
附录 C 化谱密度曲线为解析函数的		§ 3 矩阵变换	510
图解解析法	216	§ 4 矩阵的微分和积分	516

第八章 非线性控制系统的分析

在上册中，已经研究了线性系统分析设计的各种问题。事实上，大多数实际的自动控制系统，严格地说来均不属于线性系统，而用线性方法来研究实际控制系统往往只是近似的。当实际的系统接近线性系统或者在某一范围内，某一限制条件下可以视为线性系统时，那么用线性方法研究控制系统是很有实际价值和意义的。但是如果真实系统与线性系统相差甚大，则用线性方法来研究，便会引起很大的误差甚至得到错误的结论。因此必须进一步研究分析和处理非线性系统的方法。

非线性是指元件或环节的静特性不是按线性规律变化而言的。例如，图 8-1 所示的伺服电机控制特性就是一种非线性特性。

图中横轴坐标 u 为电机的控制电压，纵轴坐标 ω 为电机的输出转速。

如果伺服电机工作在 A_0A_1 区段，则伺服电机的控制电压与输出转速的关系近似为线性，因此可以把伺服电机作为一个线性元件来处理。但如果电机的运行范围在 B_0B_1 区段之间，那么电机便不能再作为线性元件来处理，其静特性具有明显的非线性。

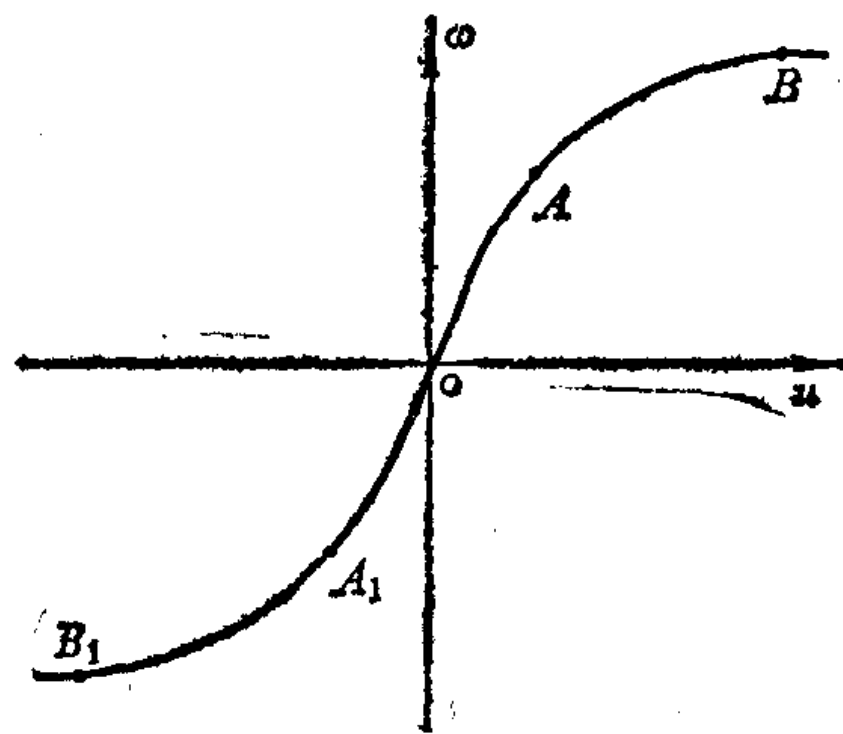


图8-1 伺服电机控制特性

如果一个控制系统，包含一个或一个以上具有非线性静特性的元件或环节，那么称这样的系统为非线性系统。因此，凡是控制系统不能直接进行线性化处理，不能用线性微分方程来描述的，均称为非线性系统，或称本质非线性系统。

§1 控制系统中的典型非线性特性

在自动控制系统中经常遇到的典型非线性特性有以下几种。其中一些特性是组成控制系统的元件本身所固有的。如死区（不灵敏区）特性、滞环特性等，这些特性一般来说对控制系统的性能是不利的。另一些特性则是为了改善系统的性能而人为加入的，如继电器特性，变放大系数特性等。在控制系统中加入这类非线性特性，一般来说，能使系统具有比纯线性系统更为优良的动态性能。

下面分别说明典型非线性。

1. 饱和特性

饱和非线性的静特性示于图 8-2。图中 $e(t)$ 为非线性元件的输入信号， $x(t)$ 为非线性元件的输出信号，其数学表达式为

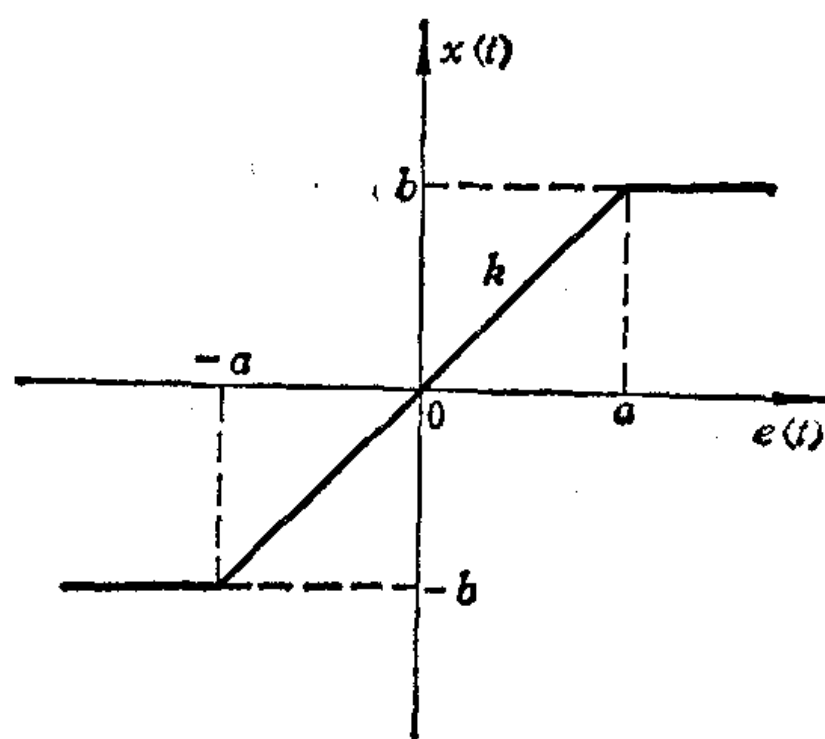


图8-2 饱和特性

$$x(t) = \begin{cases} ke(t) & |e(t)| \leq a \\ k \operatorname{sign} e(t) & |e(t)| > a \end{cases} \quad (8-1)$$

式中 a ——线性区宽度;

k ——线性区的斜率;

$\operatorname{sign} e(t)$ 表示:

当 $e(t) > 0$ 时, $\operatorname{sign} e(t) = +1$

当 $e(t) < 0$ 时, $\operatorname{sign} e(t) = -1$

对于饱和特性, 若输入信号超出线性范围后, 输出信号便不再随输入信号的变化而变化, 将保持为某一常值。此时元件或环节的传递系数将随之而急剧下降。放大器的饱和输出特性; 伺服电机在大控制电压情况下运行的输出转速特性; 液压调节阀具有行程限制及功率限制时的特性等等都属于饱和非线性特性。在控制系统中有饱和特性存在时, 将使系统在大信号作用下的等效放大倍数降低, 从而引起过渡过程时间的增长和稳态误差的增加。对于条件稳定系统, 甚至可能出现小信号时稳定, 而大信号时不稳定的情况。为了避免饱和特性使系统动态性能变坏, 一般应尽量设法扩大系统的线性工作范围, 同时为了充分发挥系统中各元件的潜力, 应使前级元件的线性区比后级元件的线性区更宽些。需要指出, 在有些系统中饱和特性是作为有利因素加以利用的, 如功率限制、行程限制等等, 这些特性保证系统或元件能在额定和安全情况下运行。

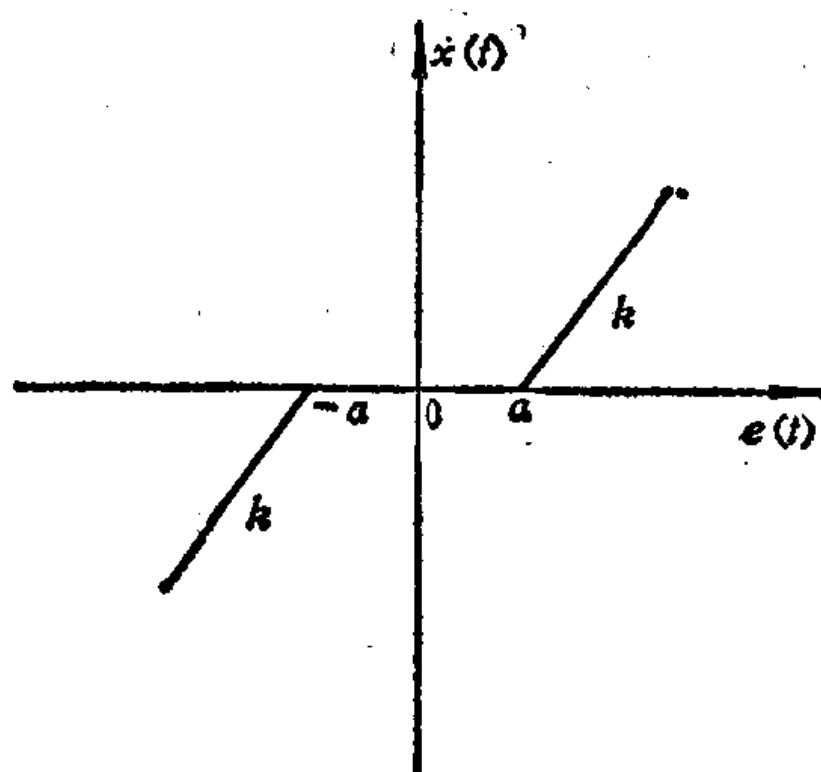


图8-3 死区特性

2. 死区 (不灵敏区) 特性

死区非线性的静特性示于图 8-3。其数学表达式为

$$x(t) = \begin{cases} 0 & |e(t)| \leq a \\ k(e(t) - a \operatorname{sign} e(t)) & |e(t)| > a \end{cases} \quad (8-2)$$

式中 a ——死区宽度;

k ——线性输出特性的斜率。

这类特性表示输入信号在零值附近变化时, 元件或环节无信号输出, 只有当输入信号大于某一数值 (死区) 后, 输出信号才会出现, 并与输入信号呈线性关系。伺服电机的死区电压 (启动电压), 测量元件的不灵敏区, 以及有予拉力, 搭接段和干摩擦的元件的特性均属于死区非线性特性。在液压和气动调节系统中也常遇到这类非线性特性。自动控制系统中, 由于有死区特性存在, 将使系统产生静态误差, 特别是测量元件的不灵敏区影响最为突出。而系统的摩擦死区特性将造成系统低速运动的不平滑性, 这种低速不平滑性往往导致雷达、火炮等武备系统在运行过程中不能正确跟踪目标, 甚至会丢失目标。一般可通过加强润滑, 提高功率, 改善闭环系统动态性能来消除或减弱死区特性造成的影响。

3. 间隙特性

间隙非线性特性示于图 8-4。其数学表达式为

$$x(t) = \begin{cases} k(e(t) - \varepsilon) & \dot{x}(t) > 0 \\ k(e(t) + \varepsilon) & \dot{x}(t) < 0 \\ b \operatorname{sign} e(t) & \dot{x}(t) = 0 \end{cases} \quad (8-3)$$

式中 2ε ——间隙宽度;

k ——输出特性斜率。

这类特性表示在元件开始运动, 而输入信号小于间隙 ε 时元件无输出信号, 只有当输入信号 $e(t)$ 大于 ε 后, 元件的输出信号才随着输入信号的变化而线性变化。当元件反向运动时, 元件输出则保持在运动方向发生变化瞬间的输出值上, 直到输入信号反向变化两倍 ε 后, 输出信号才再随输入信号的变化而线性变化。齿轮传动的齿隙特性, 液压传动的油隙特性等均属于这类特性。控制系统中有间隙特性存在时, 将使系统输出信号在相位上产生滞后, 从而使系统的稳定裕度减少, 动态特性变坏。间隙的存在常常是系统产生自持振荡的主要原因。因此, 一般应当竭力减少和避免间隙, 力争在控制系统中不采用简单的齿轮传动, 建议采用无隙齿轮 (双片弹性齿轮) 传动, 以消除齿轮间隙的不利影响。

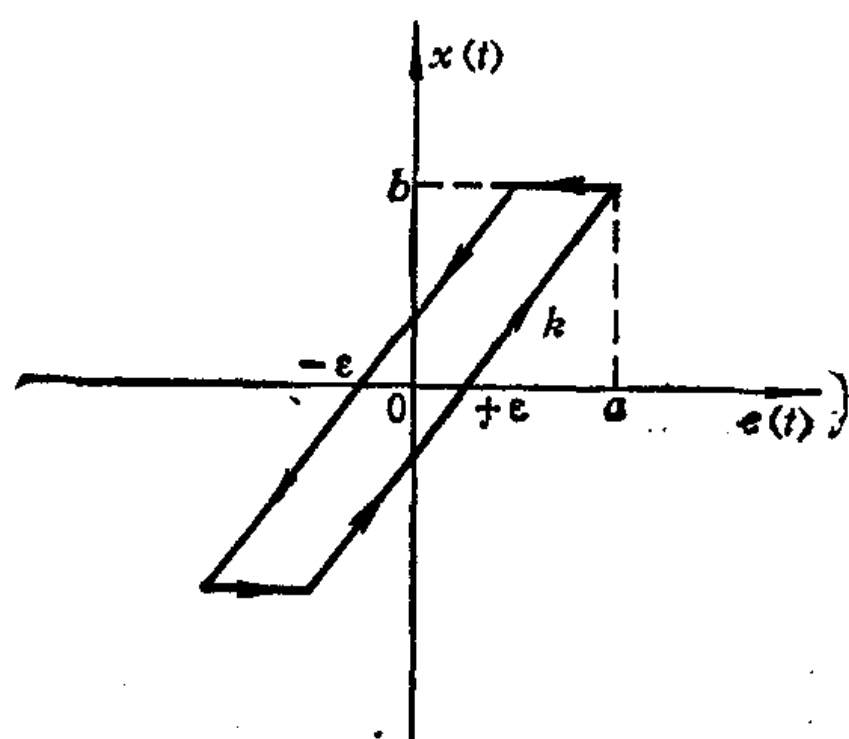


图8-4 间隙特性

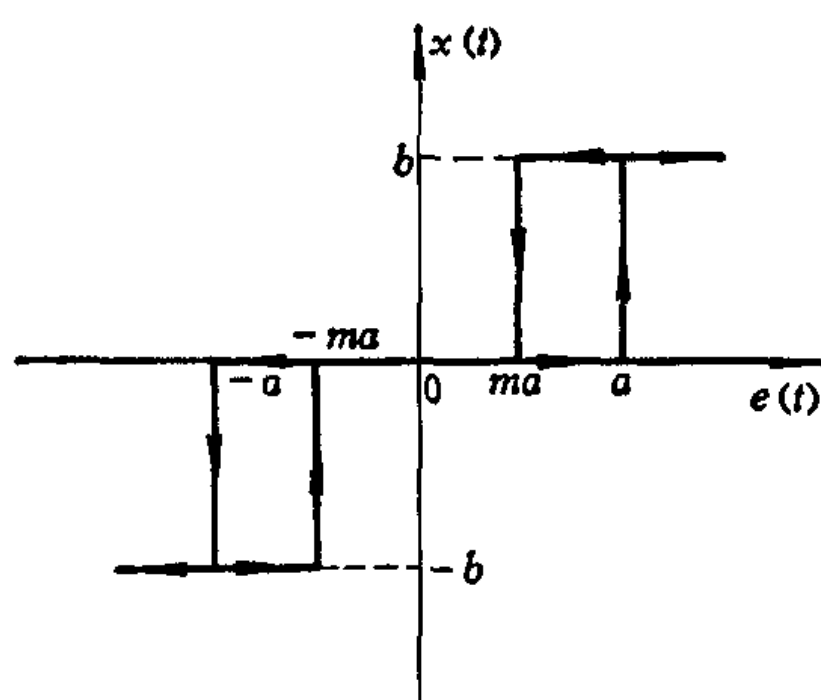


图8-5 继电器特性

4. 继电器特性

继电器非线性特性一般用图 8-5 表示。其数学表达式为

$$x(t) = \begin{cases} 0 & -ma < e(t) < a & \dot{e}(t) > 0 \\ 0 & -a < e(t) < ma & \dot{e}(t) < 0 \\ b & \operatorname{sign} e(t) & |e(t)| \geq a \\ b & e(t) \geq ma & \dot{e}(t) < 0 \\ -b & e(t) \leq -ma & \dot{e}(t) > 0 \end{cases} \quad (8-4)$$

式中 a ——继电器吸上电压;

ma ——释放电压;

b ——饱和输出。

这类特性表示, 由于继电器的吸上电压和释放电压不同, 因此输入-输出特性不仅包含死区特性和饱和特性, 而且出现了滞环特性。如果在上述特性中, a 值为零, 即继电器吸上电压和释放电压均为零的零值切换, 称这种特性为理想继电器特性。其静特性示于图 8-6 (a)。

若在图 8-5 所示特性中, $m = 1$, 即继电器吸上电压和释放电压相等, 则称这种特性为具有死区的单值继电器特性, 其特性示于图 8-6 (b)。

若在图 8-5 所示特性中, $m = -1$, 即继电器的正向释放电压等于反向吸上电压时, 称

这种特性为具有滞环的继电器特性，其静特性示于图 8-6 (c)。

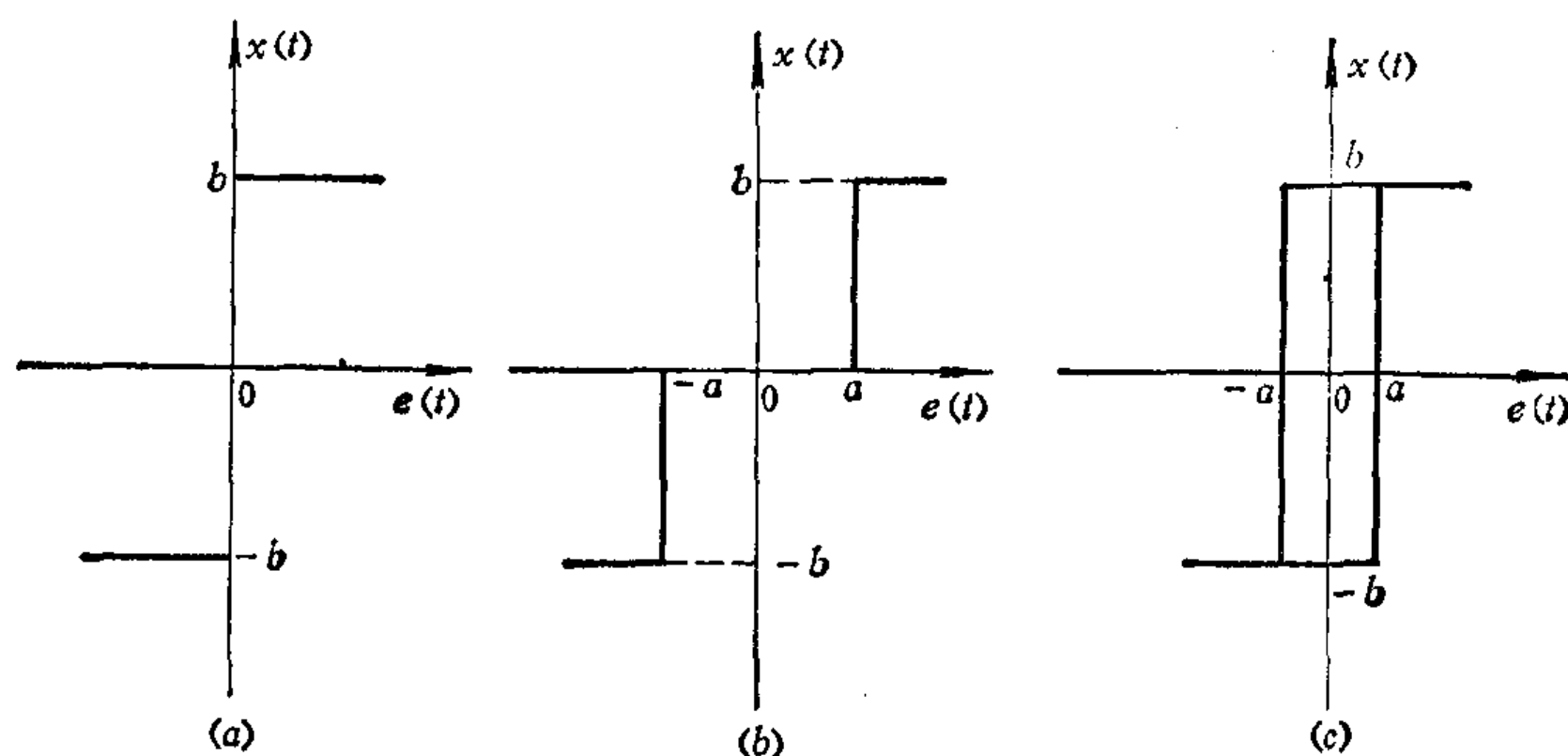


图 8-6

(a) 理想继电器特性；(b) 具有死区的单值继电器特性；(c) 具有滞环的继电器特性。

由于继电器元件在控制系统中常常用来作为改善系统性能的切换元件，因此继电器特性在非线性的分析中将占有重要地位。

5. 变放大系数特性

变放大系数非线性特性如图 8-7 所示。其数学表达式为

$$x(t) = \begin{cases} k_1 e(t) & |e(t)| < a \\ k_2 e(t) & |e(t)| > a \end{cases} \quad (8-5)$$

式中 k_1, k_2 ——输出特性斜率；

a ——切换点。

这种特性表示，当输入信号的幅值不同时，元件或环节的放大系数也有所不同。这种变放大系数特性，使系统在大误差信号时具有较大的放大系数，从而使系统响应迅速。而在小误差信号时具有较小的放大系数，使系统响应既缓且稳。具有这种特性的系统，在高频低振幅噪音作用时，能使干扰信号基本被抑制，而控制信号则可顺利通过。在电的控制系统和液压控制系统中，这种特性得到了广泛的应用。

除了上述典型非线性特性外，分析控制系统时可能还会遇到一些更为复杂的非线性特性。在这些特性中，有些可视为上述典型特性的不同组合，如图 8-8 (a) 所示的死区-线性-饱和特性，又如图 8-8 (b) 所示的死区-继电器-线性特性等。有的则无法用一般的函数形式加以描述，称为不规则非线性特性。如图 8-8 (c) 所示特性。

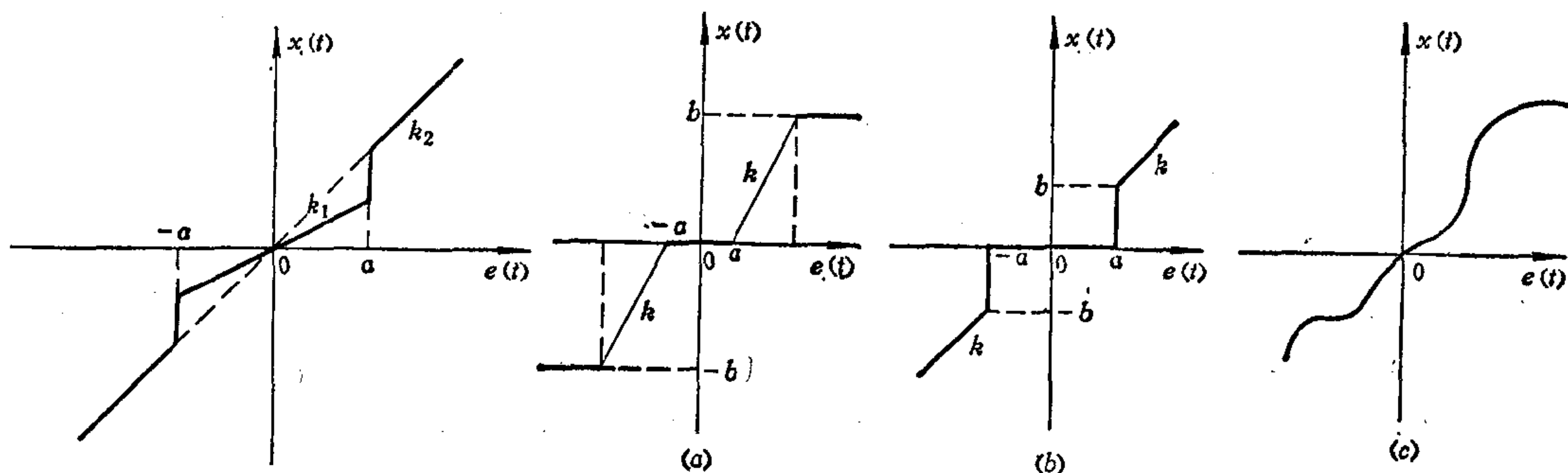


图 8-8

图 8-7 变放大系数特性

(a) 死区-线性-饱和特性；(b) 死区-继电器-线性特性；(c) 不规则非线性特性。

非线性控制系统的特点

非线性控制系统与线性控制系统相比，有其明显的特点：

1. 在线性系统中，系统的动态过程和稳定性，只决定于系统特征根的分布，即只决定于系统的结构形式和参数，而与系统的初始条件无关。但非线性系统的稳定性和动态过程，除了和系统的结构形式和参数有关以外，还和系统的初始条件有关。对于同一结构形式和参数的系统，在不同的初始条件下，运动的最终状态可能完全不同。如有的系统当初始值处于较小区域内时，系统是稳定的，而当初始值处于较大区域内时，系统则变为不稳定的了。反之，也可能系统的初始值处在较大区域时，系统为稳定的，而初始值处在较小区域时系统是不稳定的。甚至还有更为复杂的情况。

图 8-9 所示为一信号发生器振荡电路的原理方块图。这是一个典型的非线性电路。

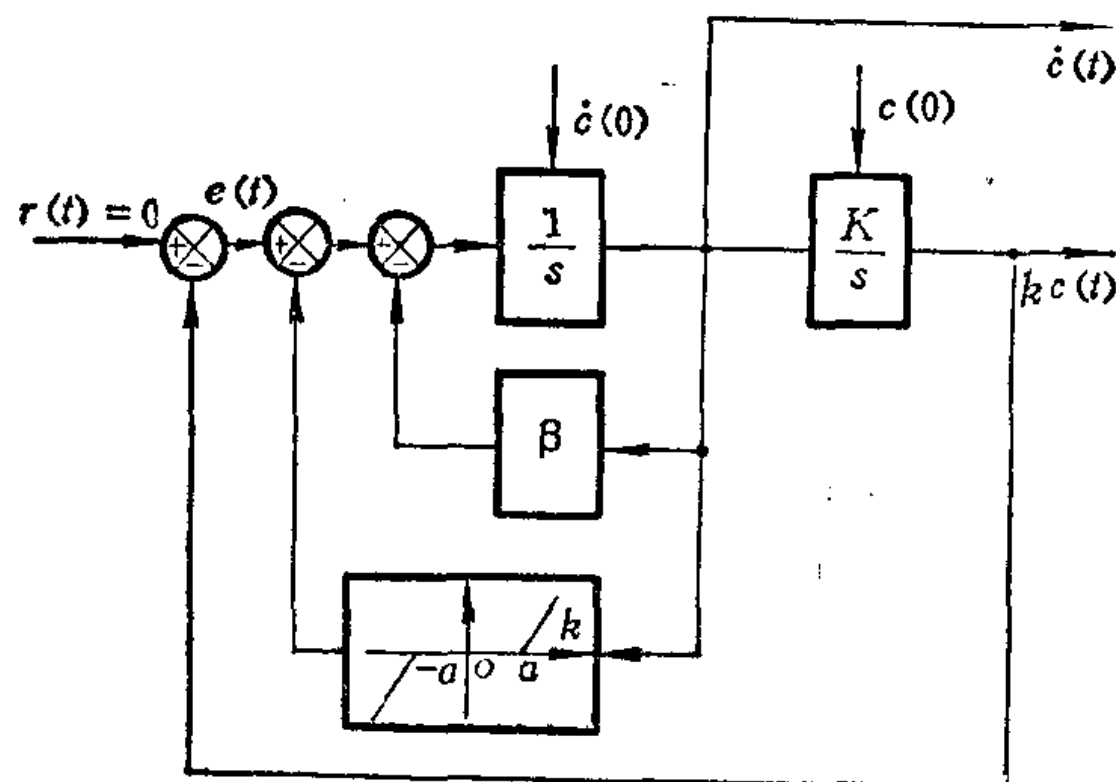


图 8-9 振荡电路原理方块图

该系统由两个积分器及适当的反馈电路构成。其中局部反馈电路由两部分组成，一为反馈系数为 β 的正反馈电路，另一为由死区非线性构成的负反馈电路。整个电路的工作原理如下：当电路没有局部反馈回路时，系统闭环传递函数的特征方程式为

$$\ddot{c}(t) + Kc(t) = 0 \quad (8-6)$$

其解为一正弦函数。即 $c(t) = A \sin \omega t$ 。解中振幅 A 由初始值 $\dot{c}(0)$ 确定，而角频率 $\omega = \sqrt{K}$ ，因此可以通过设置不同的初始值 $\dot{c}(0)$ 和改变 K 值来调整输出的 $c(t)$ 。但是在上述振荡电路中由于不可能做到无阻尼，因此上述等幅振荡不可能持久。为了得到稳定的正弦等幅振荡信号，在系统中设置了由正负反馈两部分共同构成的局部反馈电路。首先讨论只有 β 正反馈电路而无非线性负反馈电路的情况。这时系统的闭环传递函数的特征方程式为

$$\ddot{c}(t) - \beta \dot{c}(t) + Kc(t) = 0 \quad (8-7)$$

由上式可求得系统的输出为一发散的振荡过程。因为方程的阻尼系数为负，所以系统为不稳定。这时即使系统不设置初始条件，输出信号的振幅也会越来越大。

若在系统中再加入由死区非线性组成的负反馈电路，则当系统输出信号 $\dot{c}(t)$ 的幅值达到一定数值（即大于死区时），系统闭环传递函数的特征方程式便为

$$\ddot{c}(t) - \beta \dot{c}(t) + k(\dot{c}(t) - a) + Kc(t) = 0 \quad (8-8)$$

当 $k(\dot{c}(t) - a) > \beta \dot{c}(t)$ 时，系统的输出便为衰减振荡过程，这时系统为稳定的。如果将系统输出信号 $c(t)$ 和 $\dot{c}(t)$ 分别加至示波器的 x 轴和 y 轴，当为系统设置不同的初始值 $\dot{c}(0)$ 时，便能观察到如下图象：

1) 当初始值 $\dot{c}(0)$ 较小，致使 $\dot{c}(0)$ 小于非线性特性的死区电压 oa 值时，则输出轨迹由小向大发散，如图 8-10(a) 所示。这时系统为不稳定。但发散到一定值后，由于非线性负反馈电路的作用，轨迹线不再继续发散而出现稳定极圈。这时系统出现等幅振荡。

2) 若初始值 $\dot{c}(0)$ 较大时，致使 $\dot{c}(0)$ 大于非线性死区电压 oa 值，则系统输出轨

迹线如图 8-10 (b) 所示。这时系统为稳定，轨迹线由大向小收敛，但收敛到一定值后，也将出现稳定的极圈，且极圈的大小和上述情况相同。这时系统输出稳定的等幅振荡信号。

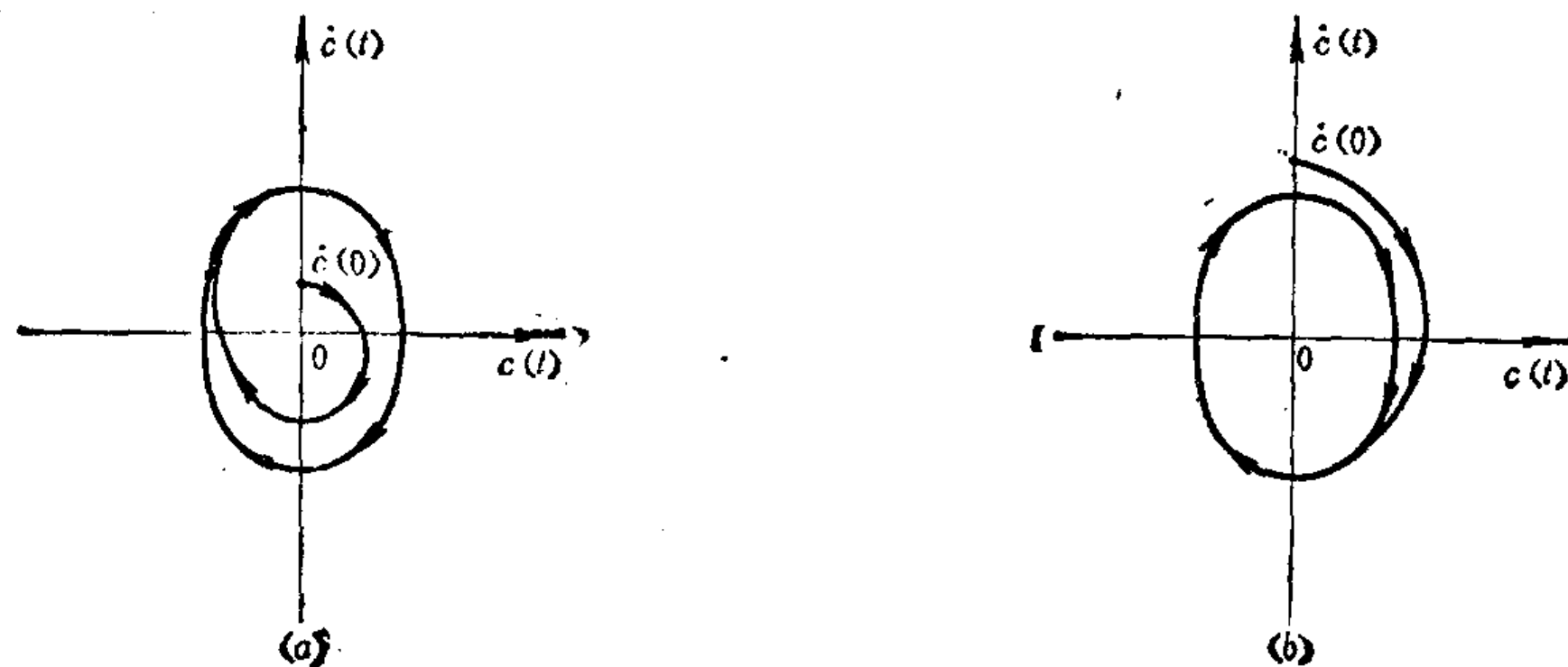


图 8-10 振荡电路输出轨迹线

改变非线性死区电压 oa 的大小就改变了稳定极圈的大小，也就改变了输出信号的振幅，而改变系统放大系数 K 则改变了输出信号的角频率 ω 。

上述例子可以在模拟计算机上进行数学模拟，并可清楚地观察到整个动态过程，由此，不难看出非线性系统的稳定性和动态过程确实是和初始条件密切相关的。

2. 对于线性系统而言，如果系统参数不正好对应于稳定边界时，则系统的运动状态或为收敛于平衡状态，或为发散。只有系统参数恰好对应于稳定边界时，系统才有可能出现不衰减的振荡。但这种状态是不能持久的，只要系统参数稍有变动，立即会遭到破坏而变为发散或收敛。但是在非线性系统中，除了发散或收敛于平衡状态两种运动状态外，往往遇到，即使没有外界作用存在，系统本身也会产生具有一定振幅和频率的振荡，而且这种振荡具有一定稳定性，一般称为自持振荡。改变系统的结构和参数，能够改变这种自持振荡的振幅和频率。

对于一些非线性系统，甚至于会处于近似周期振荡的稳定运动状态，其运动并不衰减，但也没有固定的振幅和频率。这是非线性系统所独具的现象。

3. 线性系统用线性微分方程来描述，而非线性系统则用非线性微分方程来描述。求解非线性微分方程不能应用叠加原理，而对应非线性微分方程式右项的每一种形式均需完全重新求解。因此没有一个通用的方法来处理所有非线性问题。

4. 和线性系统相比，非线性系统输出的稳态分量，一般和输入量并不具有相同的函数形式。在线性系统中，当输入是正弦函数时，其输出的稳态分量也是同频率的正弦函数，两者仅在幅值和相位上有所不同，因此可以用频率特性来表示系统的固有特性。但在非线性系统中，输入是正弦函数时，输出则是包含有高次谐波分量的非正弦周期函数，因此不能应用频率特性、传递函数这些线性系统常用的方法来分析和综合非线性系统，也不能应用象单位阶跃等典型输入信号作用评价非线性系统性能的试验信号。因此目前尚无一般通用的方法来分析和设计非线性控制系统。在工程上一般对于非本质非线性特性通常采用小偏差线性化方法处理，而对于本质非线性特性，则常常采用分段线性化或其他近似方法加以处理。

需要指出，对于非线性控制系统来说，在许多实际问题中，并不要求解其输出过程。而通常是把讨论问题的重点放在①系统是否稳定；②系统是否产生自持振荡，如产生，其

振幅和频率各等于多少；③如何消除自持振荡等有关稳定性问题的分析上。因此，需建立一些判别和保证系统稳定性的准则。这样便使非线性控制系统的分析工作大为简便。

目前在工程上广泛应用的分析方法有基于频率域分析的描述函数法和波波夫法。有基于时域分析的相平面法，点变换法和李亚普诺夫第二法。这些方法分别在一定的假设条件下，提供了系统的稳定信息或时间响应信息。在以后各节中，将分别应用这些方法去分析非线性控制系统的特性。这里还应指出，模拟计算机和数字计算机技术的发展，给分析和处理复杂的非线性控制系统，提供了极为方便和有效的条件，解决了解析方法无法解决的问题。使成功地设计性能优良的非线性控制系统成为现实。

§2 描述函数法

描述函数法是分析非线性控制系统的一种近似方法。它是线性系统理论中的频率特性法在一定假设条件下，在非线性系统中的应用。它主要用来分析非线性系统的稳定性，以及确定非线性系统在正弦函数作用下的输出特性。应用这种方法时非线性系统的阶数不受限制。描述函数法的最基本思想是用输出信号中的基波分量来代替非线性元件在正弦输入信号作用下的实际输出。

设有一个非线性系统，其方块图如图 8-11 所示。

设非线性元件的输入信号，即误差信号 $e(t)$ 为一正弦函数，则其输出信号 $x(t)$ 是一个非正弦周期函数，其周期和输入信号周期相同。应用描述函数法分析上述系统时，假设在输出信号 $x(t)$ 中只有基波分量是有意义的。这种假设对于一般控制系统是正确的，因为在非线性元件的输出中，高次谐波的振幅通常比基波分量的要小，再加上系统的线性部分又大都具有低通滤波特性，所以高次谐波分量通过线性部分将衰减殆尽。因此当非线性元件的输入 $e(t)$ 为正弦信号时，可认为只有 $x(t)$ 的基波分量沿着闭环回路反馈到 $e(t)$ ，而高次谐波经低通滤波后可忽略不计。可见，当上述假设成立时，便可用一个只是对正弦输入信号的幅值和相位进行变换的环节来代替非线性元件，该环节的特性可以用一个复函数来描述，其幅值等于输出信号基波的幅值与输入正弦信号的幅值比，其相位表示上述二正弦信号的相移。定义上述复函数为非线性元件的描述函数，用符号 $N(A)$ 表示，即

$$N(A) = \frac{X_1}{A} e^{j\phi_1} \quad (8-9)$$

式中 $N(A)$ ——非线性元件的描述函数；

A ——为正弦输入信号的振幅；

X_1 ——非线性元件输出信号基波分量的振幅；

ϕ_1 ——输出信号基波分量相对输入正弦信号的相移。

$N(A)$ 一般为输入信号振幅的函数。当系统中包含有储能元件时， $N(A)$ 同时为输入信号振幅和频率的函数。这时记为 $N(A, \omega)$ 。

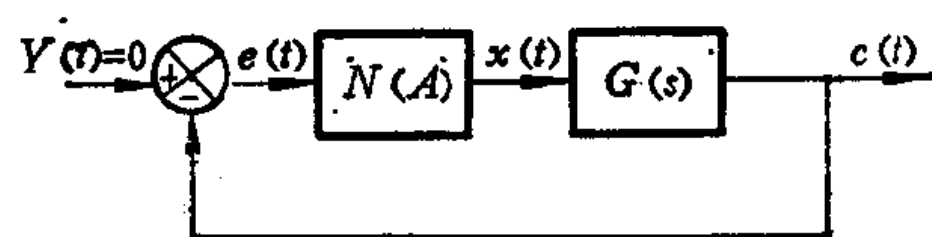


图8-11 控制系统方块图

$e(t)$ ——系统的误差信号，因为系统具有单位反馈，所以误差信号与偏差信号相同； $N(A)$ ——非线性元件； $G(s)$ ——线性部分的传递函数。

为了推导非线性元件的描述函数, 由上述定义可知, 必须首先求取输出信号的基波分量。当非线性元件的正弦输入为

$$e(t) = A \sin \omega t \text{ 时}$$

其输出 $x(t)$ 可展开成下列傅立叶级数。

$$x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\omega t + B_n \sin n\omega t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} X_n \sin(n\omega t + \phi_n) \quad (8-10)$$

式中

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(t) \cos n\omega t d(\omega t)$$

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(t) \sin n\omega t d(\omega t) \quad (8-11)$$

$$X_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2} \quad \phi_n = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{A_n}{B_n} \right)$$

如果非线性特性是对称的, 那么 $A_0 = 0$, 这时输出的基波分量为

$$\begin{aligned} x_1(t) &= A_1 \cos \omega t + B_1 \sin \omega t \\ &= X_1 \sin(\omega t + \phi_1) \end{aligned} \quad (8-12)$$

式中

$$A_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(t) \cos \omega t d(\omega t)$$

$$B_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(t) \sin \omega t d(\omega t) \quad (8-13)$$

$$X_1 = \sqrt{A_1^2 + B_1^2} \quad \phi_1 = \operatorname{tg}^{-1} \frac{A_1}{B_1}$$

由此可求得非线性元件的描述函数为

$$N(A) = \frac{X_1}{A} e^{j\phi_1} = \frac{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}{A} e^{j \operatorname{tg}^{-1} \frac{A_1}{B_1}} \quad (8-14)$$

$N(A)$ 也称为非线性元件的等效复放大系数, 它表示当输入信号按正弦规律变化时, 输出信号基波分量与输入信号在幅值和相位上的相互关系, 它类似于线性系统的频率特性。一般等效复放大系数 $N(A)$ 是输入信号幅值 A 的函数, 而与它的频率 ω 无关。同时, 对于具有单值特性的非线性元件来说, 它的等效复放大系数是一个实数, 这时输出信号的一次谐波与输入信号同相。

典型非线性特性的描述函数

1. 饱和非线性特性的描述函数

饱和非线性的输入, 输出特性如图 8-2 所示。当输入信号为 $e(t) = A \sin \omega t$ 时, 其输入和输出信号的波形如图 8-12。其输出信号的数学表达式为

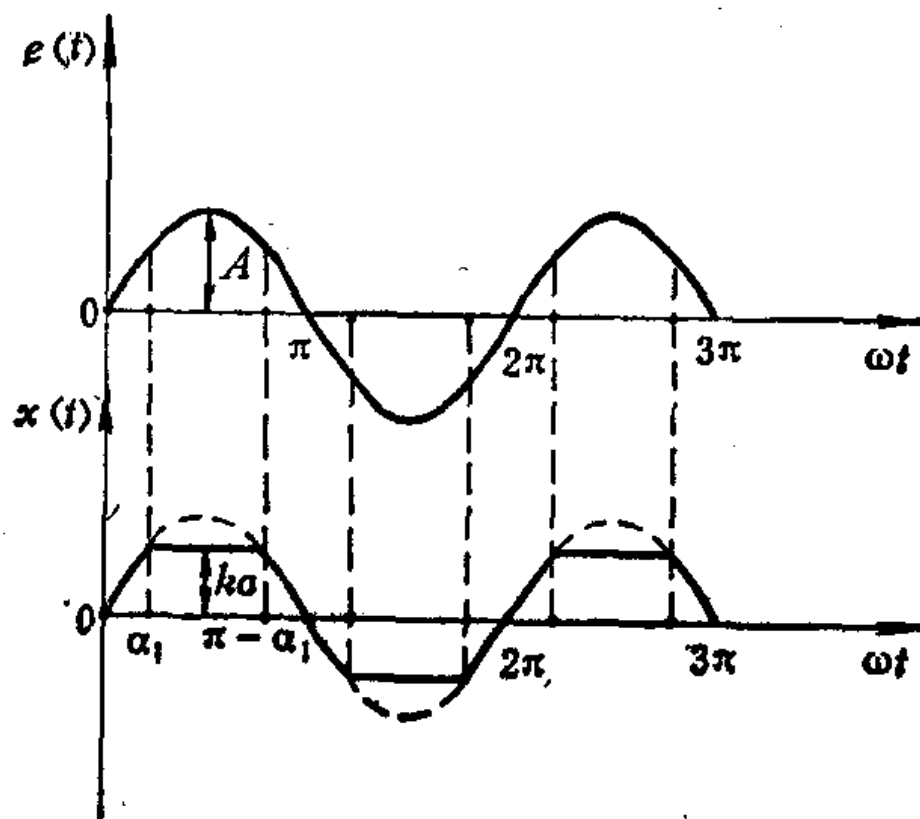


图8-12 饱和非线性输入和输出波形图

$$x(t) = \begin{cases} kA \sin \omega t & (0 < \omega t < \alpha_1) \\ ka = b & (\alpha_1 < \omega t < \pi - \alpha_1) \\ kA \sin \omega t & (\pi - \alpha_1 < \omega t < \pi) \end{cases} \quad (8-15)$$

式中 k ——线性区输出特性斜率;

a ——饱和特性线性区宽度;

$$\alpha_1 = \sin^{-1} \frac{a}{A}。$$

$x(t)$ 傅氏展开式的基波分量可计算为

$$x_1(t) = A_1 \cos \omega t + B_1 \sin \omega t$$

由于 $x(t)$ 为奇函数, 即 $x(-t) = -x(t)$

所以

$$A_1 = 0$$

而

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(t) \sin \omega t d(\omega t) \\ &= \frac{4}{\pi} \left[\int_0^{\alpha_1} kA \sin \omega t \cdot \sin \omega t d\omega t + \int_{\alpha_1}^{\pi-\alpha_1} ka \sin \omega t d\omega t \right] \\ &= \frac{4}{\pi} \left[kA \cdot \frac{1}{2} \left(\alpha_1 - \frac{1}{2} \sin 2\alpha_1 \right) + ka \cos \alpha_1 \right] \end{aligned} \quad (8-16)$$

以 $\alpha_1 = \sin^{-1} \left(\frac{a}{A} \right)$ 代入上式则得

$$B_1 = \frac{2}{\pi} kA \left[\sin^{-1} \left(\frac{a}{A} \right) + \frac{a}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{A} \right)^2} \right]$$

由此可得

$$x_1(t) = X_1 \sin(\omega t + \varphi_1) = B_1 \sin \omega t = \frac{2kA}{\pi} \left[\sin^{-1} \left(\frac{a}{A} \right) + \frac{a}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{A} \right)^2} \right] \sin \omega t$$

从而求得饱和和非线性的描述函数为

$$N(A) = \frac{X_1}{A} = \frac{2k}{\pi} \left[\sin^{-1} \left(\frac{a}{A} \right) + \frac{a}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{A} \right)^2} \right] \quad (8-17)$$

若以 $\left(\frac{a}{A} \right)$ 为自变量, $\frac{N(A)}{k}$ 为因变量, 则可画出相应的函数曲线如图 8-13。

图 8-13 表明, 当 $\frac{a}{A} = 0$ 时 $\frac{N(A)}{k} = 0$, 而当 $\frac{a}{A} \rightarrow 1$ 时 $\frac{N(A)}{k} \rightarrow 1$ 。当 $\frac{a}{A} > 1$ 时 $\frac{N(A)}{k}$ 仍等于 1, 因为这时系统是线性系统。

2. 死区非线性的描述函数

死区非线性特性如图 8-3 所示。当死区非线性元件的输入信号 $e(t) = A \sin \omega t$ 时其输入和输出信号的波形示于图 8-14。其输出信号的数学表达式为

$$x(t) = \begin{cases} 0 & (0 < \omega t < \alpha_1) \\ k(A \sin \omega t - a) & (\alpha_1 < \omega t < \pi - \alpha_1) \\ 0 & (\pi - \alpha_1 < \omega t < \pi) \end{cases} \quad (8-18)$$

式中 a ——非线性特性的死区宽度;

k ——线性输出特性斜率;

$$\alpha_1 = \sin^{-1}\left(\frac{a}{A}\right).$$

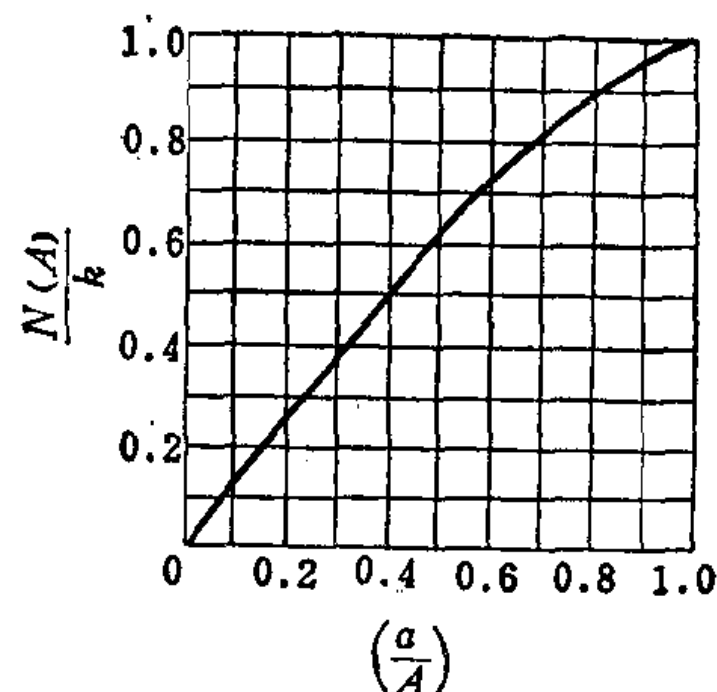


图8-13 饱和非线性描述函数曲线

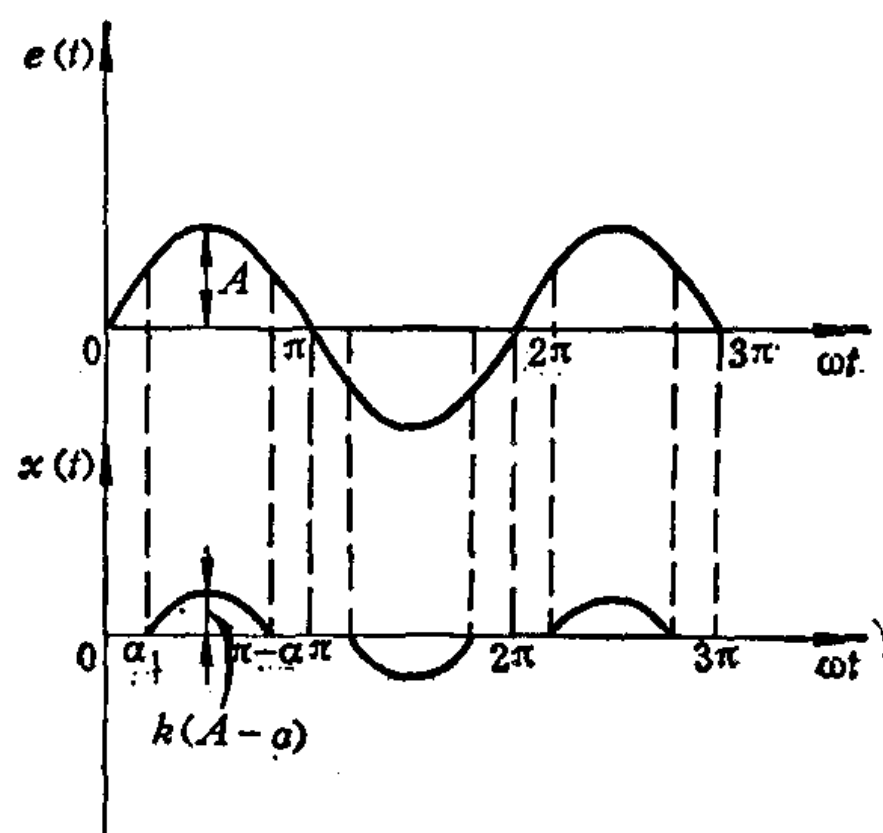


图8-14 死区非线性输入和输出信号波形图

输出信号 $x(t)$ 的傅氏展开式的基波分量可计算如下。因为 $x(t)$ 为奇函数, 所以 $A_1 = 0$ 。

$$x_1(t) = X_1 \sin(\omega t + \phi_1) = B_1 \sin \omega t$$

而

$$\begin{aligned} B_1 &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(t) \sin \omega t d\omega t \\ &= -\frac{4}{\pi} \left[\int_{\alpha_1}^{\frac{\pi}{2}} k(A \sin \omega t - a) \cdot \sin \omega t d\omega t \right] \\ &= -\frac{4k}{\pi} \left[A \cdot \frac{1}{2} \left(\omega t - \frac{1}{2} \sin 2\omega t \right) \Big|_{\alpha_1}^{\frac{\pi}{2}} + a \cos \omega t \Big|_{\alpha_1}^{\frac{\pi}{2}} \right] \\ &= -\frac{2kA}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} - \sin^{-1}\left(\frac{a}{A}\right) - \frac{a}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{A}\right)^2} \right] \end{aligned} \quad (8-19)$$

从而求得死区非线性的描述函数为

$$N(A) = \frac{X_1}{A} = \frac{2k}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} - \sin^{-1}\left(\frac{a}{A}\right) - \frac{a}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{A}\right)^2} \right] (A > a) \quad (8-20)$$

若以 $\left(\frac{a}{A}\right)$ 为自变量, $\frac{N(A)}{k}$ 为因变量, 则死区非线性描述函数的曲线如图8-15所示。

图8-15表明, 当 $\left(\frac{a}{A}\right) > 1$ 时 $\frac{N(A)}{k} = 0$ 。因为这时输入信号的幅值小于死区, 所以非线性元件无输出。

从饱和非线性和死区非线性特性的描述函数表达式还可以看到当饱和特性的线性区宽度 a 和死区非线性的死区宽度 a 相等, 以及斜率 k 相同时,

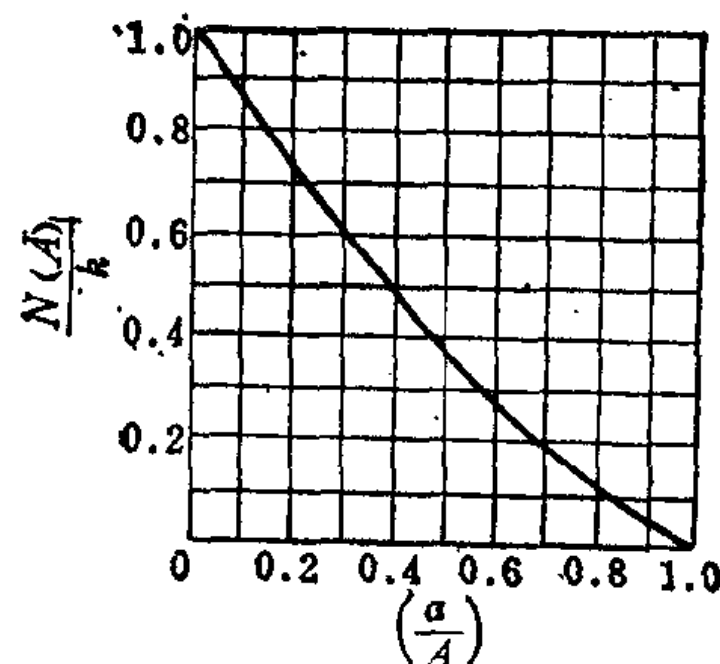


图8-15 死区非线性描述函数曲线

则 $N(A)_{\text{死区}} = k - N(A)_{\text{饱和}}$ (8-21)

$$\frac{N(A)_{\text{死区}}}{k} = 1 - \frac{N(A)_{\text{饱和}}}{k}$$

3. 间隙非线性特性的描述函数

间隙非线性的输入-输出特性如图 8-4 所示。当输入信号为 $e(t) = A \sin \omega t$ 作用于该非线性特性时，其输入信号和输出信号的波形示于图 8-16。其输出信号的数学表达式为

$$x(t) = \begin{cases} k(A \sin \omega t - \varepsilon) & (0 < \omega t < \frac{\pi}{2}) \\ k(A - \varepsilon) & (\frac{\pi}{2} < \omega t < \pi - \alpha_1) \\ k(A \sin \omega t + \varepsilon) & (\pi - \alpha_1 < \omega t < \pi) \end{cases} \quad (8-22)$$

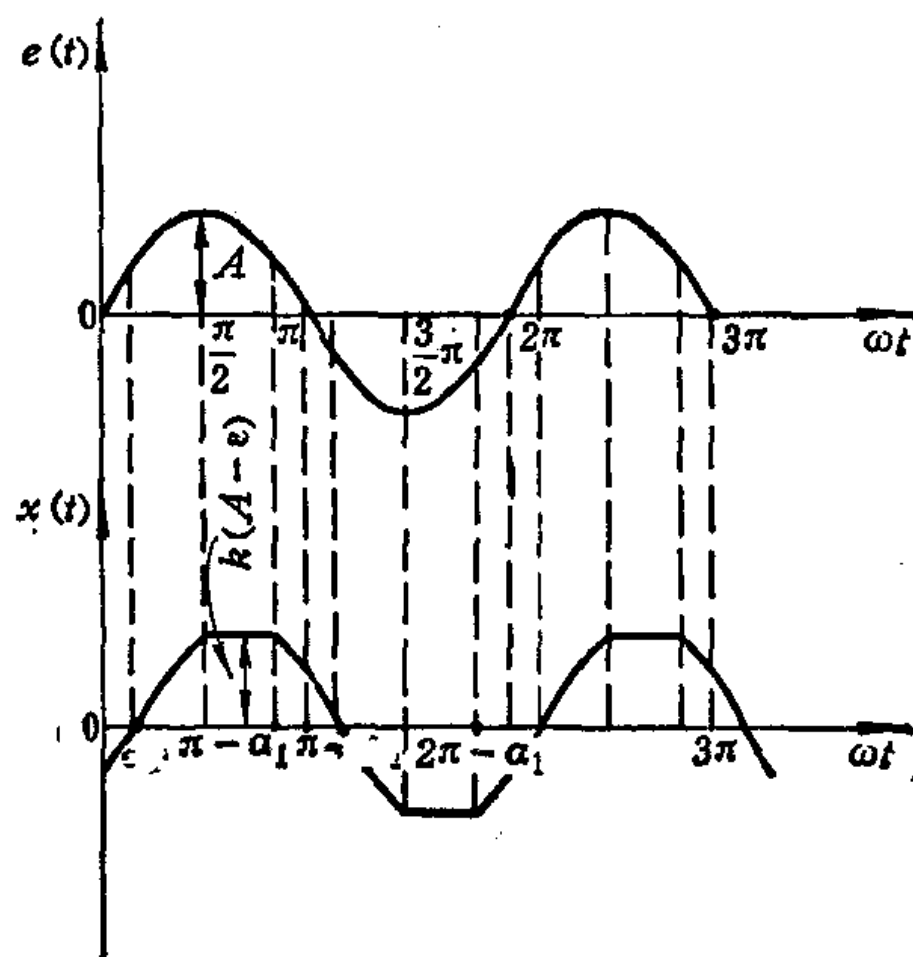


图8-16 间隙非线性输入-输出波形图

式中 ε ——间隙宽度；

k ——特性输出斜率；

$$\alpha_1 = \sin^{-1} \left(\frac{A - 2\varepsilon}{A} \right)。$$

输出信号 $x(t)$ 的傅氏展开式的基波分量可计算如下：

$$x_1(t) = A_1 \cos \omega t + B_1 \sin \omega t$$

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(t) \cos \omega t d\omega t = \frac{2}{\pi} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} k(A \sin \omega t - \varepsilon) \cos \omega t d\omega t \right. \\ &\quad \left. + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi - \alpha_1} k(A - \varepsilon) \cos \omega t d\omega t + \int_{\pi - \alpha_1}^{\pi} k(A \sin \omega t + \varepsilon) \cos \omega t d\omega t \right] \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{kA}{2} \sin 2\omega t - k\varepsilon \cos \omega t \right) d\omega t + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi - \alpha_1} k(A - \varepsilon) \cos \omega t d\omega t \right. \\ &\quad \left. + \int_{\pi - \alpha_1}^{\pi} \left(\frac{kA}{2} \sin 2\omega t + k\varepsilon \cos \omega t \right) d\omega t \right] \\ &= \frac{2}{\pi} \left[-\frac{kA}{2} + kA \sin \alpha_1 - \frac{kA}{2} \sin^2 \alpha_1 - 2k\varepsilon \sin \alpha_1 \right] \end{aligned}$$

以 $\alpha_1 = \sin^{-1} \left(\frac{A - 2\varepsilon}{A} \right)$ 代入上式得

$$A_1 = \frac{2}{\pi} \left[\frac{2k\varepsilon(\varepsilon - A)}{A} \right] = \frac{4kA}{\pi} \left[\frac{\varepsilon(\varepsilon - A)}{A^2} \right] \quad (8-23)$$

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(t) \cdot \sin \omega t d\omega t \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} k(A \sin \omega t - \varepsilon) \sin \omega t d\omega t + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi - \alpha_1} k(A - \varepsilon) \sin \omega t d\omega t \right. \\ &\quad \left. + \int_{\pi - \alpha_1}^{\pi} k(A \sin \omega t + \varepsilon) \sin \omega t d\omega t \right] \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{kA\pi}{4} - k\varepsilon + k(A - \varepsilon) \cos \alpha_1 + \frac{kA}{2} (\alpha_1 - \cos \alpha_1 \sin \alpha_1) + k\varepsilon - k\varepsilon \cos \alpha_1 \right] \\ &= \frac{kA}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} + \frac{2(A - 2\varepsilon)}{A} \cos \alpha_1 + \alpha_1 - \cos \alpha_1 \sin \alpha_1 \right] \end{aligned}$$

以 $\alpha_1 = \sin^{-1} \left[\frac{A-2\varepsilon}{A} \right]$ 代入上式得

$$B_1 = \frac{kA}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} + \sin^{-1} \left(\frac{A-2\varepsilon}{A} \right) + \frac{A-2\varepsilon}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{A-2\varepsilon}{A} \right)^2} \right] \quad (8-24)$$

由式 (8-24) 求得间隙非线性特性的描述函数为

$$\begin{aligned} N(A) &= \frac{X_1}{A} e^{j\phi_1} = \frac{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}{A} \cdot e^{j \operatorname{tg}^{-1} \frac{A_1}{B_1}} = \frac{B_1}{A} + j \frac{A_1}{A} \\ &= \frac{k}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} + \sin^{-1} \left(\frac{A-2\varepsilon}{A} \right) + \left(\frac{A-2\varepsilon}{A} \right) \sqrt{1 - \left(\frac{A-2\varepsilon}{A} \right)^2} \right] \\ &\quad + j \frac{4k}{\pi} \left[\frac{\varepsilon(\varepsilon - A)}{A^2} \right] = |N(A)| \cdot e^{j\phi_1} \end{aligned} \quad (8-25)$$

式中

$$\begin{aligned} |N(A)| &= \sqrt{\left[\frac{4k}{\pi} \left(\frac{\varepsilon(\varepsilon - A)}{A^2} \right) \right]^2 + \left[\frac{k}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} + \sin^{-1} \left(\frac{A-2\varepsilon}{A} \right) + \left(\frac{A-2\varepsilon}{A} \right) \sqrt{1 - \left(\frac{A-2\varepsilon}{A} \right)^2} \right) \right]^2} \\ \phi_1 &= \operatorname{tg}^{-1} \frac{4 \left(\frac{\varepsilon(\varepsilon - A)}{A^2} \right)}{\left[\frac{\pi}{2} + \sin^{-1} \left(\frac{A-2\varepsilon}{A} \right) + \frac{A-2\varepsilon}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{A-2\varepsilon}{A} \right)^2} \right]} = L\phi \end{aligned}$$

若以 $\left(\frac{\varepsilon}{A} \right)$ 为自变量, $\left(\frac{N(A)}{k} \right)$ 为因变量, 则间隙非线性的描述函数曲线示于图8-17。

需要指出, 由于在间隙非线性特性中, 出现了回环, 而成为非单值函数, 所以其描述函数已不再是实数, 而是一个复函数。

4. 继电器非线性特性的描述函数

带有滞环和死区的继电器非线性元件的输入和输出特性如图 8-5 所示。

若输入信号为 $e(t) = A \sin \omega t$, 其输出信号或为正的常数, 或为负的常数。这时的波形图示于图 8-18。其输出信号数学表达式为

$$x(t) = \begin{cases} 0 & (0 < \omega t < \alpha_1) \\ b & (\alpha_1 < \omega t < \pi - \alpha_2) \\ 0 & (\pi - \alpha_2 < \omega t < \pi) \end{cases} \quad (8-26)$$

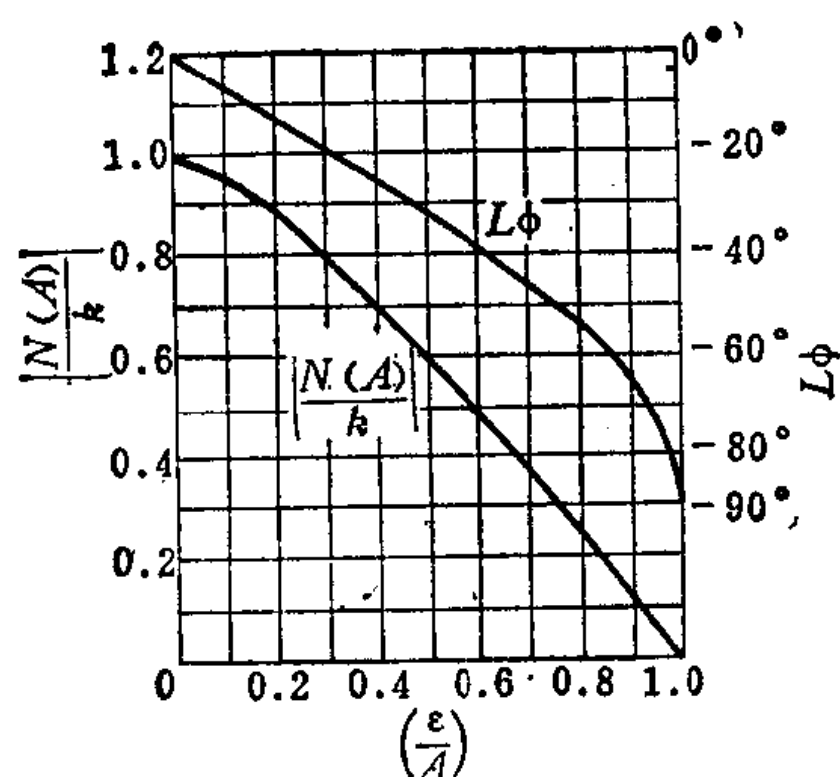


图8-17 间隙非线性描述函数曲线

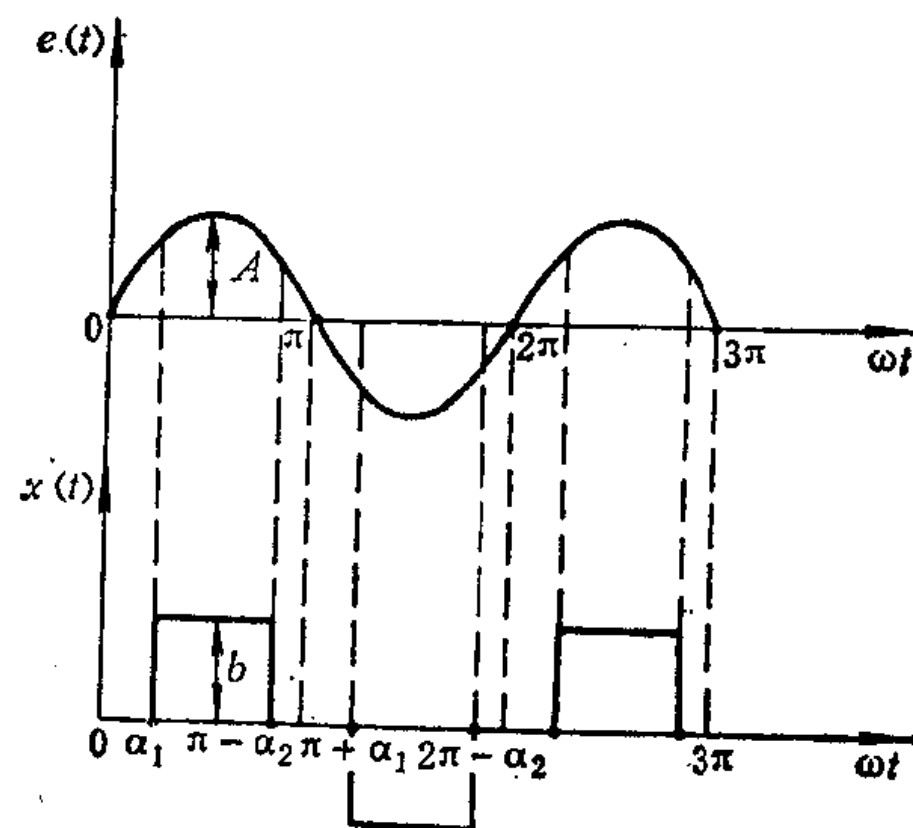


图8-18 继电器非线性输入输出信号波形图