

力学名著译丛

有限元法

下册

〔英〕O. C. 威尔逊 著



科学出版社

力学名著译丛

有 限 元 法

下 册

〔英〕O. C. 威尔逊 著

尹泽勇 柴家振 译

唐立民 刘迎曦 校

科 学 出 版 社

1985

内 容 简 介

本书论述有限元的一般理论,介绍有限元法在工程技术各个领域中的应用,并有专章说明有限元法如何在计算机上实现。

本书下册包括原书的第十七章至第二十四章,以及六个附录。它讨论有限元法在几何及材料非线性问题、热传导、电磁位势、流体流动等稳态和瞬态场问题,以及断裂力学问题中的应用,并说明有限元法的程序设计。

本书可供高等院校有关专业师生及有关的科技工作者参考。

O.C. Zienkiewicz

The Finite Element Method (third edition)

McGraw-Hill, 1977

力学名著译丛

有 限 元 法

下册

[英] O. C. 兹凯维奇 著

尹泽勇 柴家振 译

唐立民 刘迎曦 校

责任编辑 魏茂乐

科学出版社出版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1985 年 11 月 第 一 版 开本: 850×1168 1/32

1985 年 11 月 第一次印刷 印张: 12 1/8

印数: 精 1—4,000 插页: 精 2

平 1—5,700 字数: 323,000

统一书号: 13031·2976

本社书号: 4206·13—2

定价: 布脊精装 4.20 元
平 装 3.40 元

目 录

第十七章 稳态场问题——热传导、电势及磁势、流体流动等	445
第十八章 材料非线性问题。塑性,蠕变(粘塑性),非线性场问题等	473
第十九章 几何非线性问题;大位移及结构不稳定性	527
第二十章 时间维。场问题及动态问题的半离散化,解析解法	556
第二十一章 时间维;初值-瞬态问题的有限元近似	600
第二十二章 粘性流体的流动;对流输送现象中的某些特殊问题	641
第二十三章 “边界解”法与有限元法。无限域;断裂力学中的奇异性	682
第二十四章 有限元分析的计算机程序	717
附录 1 矩阵代数	801
附录 2 位移分析(第二章)的基本方程	807
附录 3 二维及三维分部积分公式(格林定理)	808
附录 4 关于三角形的一些积分公式(图 4.1)	810
附录 5 关于四面体的一些积分公式(图 6.1)	811
附录 6 向量代数的一些基本知识	813
内容索引	818

第十七章

稳态场问题——热传导、电势及 磁势、流体流动等

17.1 引言

虽然前面大部分章节详细处理的是弹性连续体问题，但其一般方法可以应用于各种物理问题。其实，在第三章中已经指出过一些这样的可能性，这里将对于其中一类特殊而又具有一定普遍性的问题进行较详细的考察。

首先，我们将处理可以归结为一般“拟调和”方程的问题，其特殊情况就是熟知的拉普拉斯方程及泊松方程^[1-6]。属于这一范畴的物理问题的范围很广。这里仅列出工程实际中经常遇到的几个问题，它们是

热传导，
通过多孔介质的渗流，
理想流体的无旋流动，
电(或磁)势的分布，
棱柱形轴的扭转，
棱柱形梁的弯曲等，
油膜轴承的润滑。

本章中建立的公式系统同样适用于所有的问题，因此几乎没有涉及实际的物理量。可以同样容易地处理各向同性或各向异性区域。

在本章第一部分中讨论二维问题。随后推广到三维问题。将

会看到，这里仍然遇到与前面弹性力学问题的二维或三维公式系统中所用相同的 C 。“形状函数”。主要差别是，空间中每点处现在只有一个未知标量（未知函数）。以前，要寻求用位移向量来表示的几个未知量。

在第三章中，我们简述了适用于拉普拉斯方程及泊松方程的“弱形式”及变分原理（参见 3.3 节及 3.10.1 节）。在以下各节中，我们将把这些方法推广于一般的拟调和方程，并表明一个统一方法的应用范围，应用这个方法，一个计算机程序就可求解各种各样的物理问题。

17.2 一般拟调和方程

17.2.1 一般表达形式 在许多物理情况下，我们牵涉到象热量、质量或化学量等这样一些量的扩散或流动。在这种问题中，每单位面积的传递率 $\mathbf{q}$ 可以通过其笛卡儿分量写成

$$\mathbf{q}^T = [q_x, q_y, q_z]. \quad (17.1)$$

如果每单位体积中产生(或除去)有关量的速率是 Q ，对于稳态流动，平衡或连续性要求给出

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} = Q. \quad (17.2)$$

引入梯度算子

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}, \quad (17.3)$$

我们还可以把式(17.2)写成

$$\nabla^T \mathbf{q} - Q = 0. \quad (17.4)$$

通常，流动速率将会与某一位势量 ϕ 的梯度联系起来。例如，在热量流动的情况下，这一位势量可以是温度。我们有如下形式的很一般的关系：

$$\mathbf{q} = \begin{Bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{Bmatrix} = -\mathbf{k} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{Bmatrix} = -\mathbf{k} \nabla \phi, \quad (17.5)$$

式中 $\mathbf{k}$ 是一个 3×3 的矩阵。由于能量方面的理由，这通常是对称的形式。

通过把式(17.5)代入式(17.4)来得到关于“位势” ϕ 的最终控制方程，这导出

$$\nabla^T \mathbf{k} \nabla \phi + Q = 0, \quad (17.6)$$

上式必须在域 Q 中求解。在这一区域的边界上，我们通常将遇到如下条件：

(a) 在 Γ_ϕ 上，

$$\phi = \bar{\phi}, \quad (17.7a)$$

即给定位势；

(b) 在 Γ_q 上，法向流动分量 q_n 被给定为

$$q_n = \bar{q} + \alpha \phi, \quad (17.7b)$$

式中 α 是传递系数或辐射系数。

因为

$$q_n = \mathbf{q}^T \mathbf{n}; \quad \mathbf{n}^T = [n_x, n_y, n_z],$$

式中 $\mathbf{n}$ 是表面法线的方向余弦向量，我们马上可把式(17.7b)改写成

$$-(\mathbf{k} \nabla \phi)^T \mathbf{n} - \bar{q} - \alpha \phi = 0, \quad (17.7c)$$

式中 $\bar{q}$ 及 α 是给定的。

17.2.2 特殊形式 如果我们认为式(17.5)的一般表达形式是对于任意一组坐标轴 x, y, z 确定的，我们将看到，总是可以局部地确定另一组坐标轴 x', y', z' ，关于它的矩阵 $\mathbf{k}'$ 变成对角矩阵。对于这样的坐标轴，我们有

$$\mathbf{k}' = \begin{bmatrix} k'_x & 0 & 0 \\ 0 & k'_y & 0 \\ 0 & 0 & k'_z \end{bmatrix}, \quad (17.8)$$

而控制方程(式(17.6))可以写成(这里省去了撇号)

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) + Q = 0, \quad (17.9)$$

同时适当改变边界条件.

最后,对于各向同性材料,我们可以写出

$$\mathbf{k} = k\mathbf{I}, \quad (17.10)$$

式中 $\mathbf{I}$ 是一个单位矩阵. 这导致第三章中详细讨论过的式(3.10)那种简单形式.

17.2.3 一般拟调和方程(式(17.6))的弱形式 遵照第三章3.2节的原理,我们可以对于在 Γ_ϕ 上为零的所有函数 v 写出

$$\begin{aligned} \int_\Omega v [\nabla^T \mathbf{k} \nabla \phi + Q] d\Omega - \int_{\Gamma_q} v [(\mathbf{k} \nabla \phi)^T \mathbf{n} \\ + \bar{q} + \alpha \phi] d\Gamma = 0, \end{aligned} \quad (17.11)$$

由此得到式(17.6)的弱形式.

通过分部积分(见附录3)将会得到如下弱表达形式:

$$\begin{aligned} \int_\Omega \nabla^T v \mathbf{k} \nabla \phi d\Omega - \int_\Omega v Q d\Omega \\ - \int_{\Gamma_q} v (\alpha \phi + \bar{q}) d\Gamma = 0, \end{aligned} \quad (17.12)$$

它相当于满足控制方程及自然边界条件(17.7b). 强迫边界条件(17.7a)仍然需要强行给定.

17.2.4 变分原理 试验证,泛函

$$\begin{aligned} \Pi = \frac{1}{2} \int_\Omega (\nabla \phi)^T \mathbf{k} \nabla \phi d\Omega - \int_\Omega Q \phi d\Omega \\ - \frac{1}{2} \int_{\Gamma_q} \alpha \phi^2 d\Gamma - \int_{\Gamma_q} \bar{q} \phi d\Gamma \end{aligned} \quad (17.13)$$

通过极小化(承受式(17.7a)的约束)使式(17.6)及(17.7)所规定的原始问题得到满足. 我们把这留给读者作为一个练习.

验证上述原理所需的代数处理完全遵照第三章 3.10 节的方法,可作为练习完成。

17.3 有限元离散化

现在,利用式(17.12)的弱表达形式或者式(17.13)的变分表达形式,可根据如下试探函数展开假设进行有限元离散化:

$$\phi = \sum N_i a_i = \mathbf{N} \mathbf{a}. \quad (17.14)$$

首先,如果我们依照伽辽金原理取

$$v = N_i, \quad (17.15)$$

则将得到与由变分原理的极小化所得一样的形式。

于是,把式(17.15)代入式(17.12),我们有如下典型的表达形式:

$$\left[\int_{\Omega} \nabla^T N_i \mathbf{k} \nabla \mathbf{N} d\Omega - \int_{\Gamma_q} N_i \alpha \mathbf{N} d\Gamma \right] \mathbf{a} - \int_{\Omega} N_i Q d\Omega - \int_{\Gamma_q} N_i \bar{q} d\Gamma = 0, \quad (i = 1, \dots, n), \quad (17.16)$$

或者是如下形式的一组标准离散方程:

$$\mathbf{H} \mathbf{a} + \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (17.17)$$

式中

$$H_{ij} = \int_{\Omega} \nabla^T N_i \mathbf{k} \nabla N_j d\Omega - \int_{\Gamma_q} N_i \alpha N_j d\Gamma, \\ f_i = - \int_{\Omega} N_i Q d\Omega - \int_{\Gamma_q} N_i \bar{q} d\Gamma,$$

对于这组方程,在边界 Γ_{ϕ} 上必须强加给定的 ϕ 值。

我们现在注意到,在规定辐射常数 α 的边界上贡献了附加的“刚度”,但另一方面,存在着与弹性结构力学问题的完全相似性。

实际上,在一个计算机程序中,将进行相同的标准运算,甚至包括计算与应力类似的量。显然,这些量就是流动速率

$$\mathbf{q} = -\mathbf{k} \nabla \phi = -(\mathbf{k} \nabla \mathbf{N}) \mathbf{a}, \quad (17.18)$$

而依照第十一章中所述,这种计算应当根据所用展开式的阶次在最优(积分)点处进行。

第七章及第八章中给出的任何一种 C_0 展开式及等参数变换等仍然可以采用。

17.4 一些计算上经济的特殊情况

17.4.1 各向异性及非均匀介质 显然,由矩阵 $\mathbf{k}$ 所确定的材料性质可以按不连续的方式随单元不同而不同。在问题的弱表达形式及变分表达形式中都默许这一点。

通常只知道关于主(或对称)轴的材料性质,如果主方向在单元中不变,那末在建立公式系统时,采用在每个单元中规定的局部坐标轴(如图 17.1 所示)是方便的。

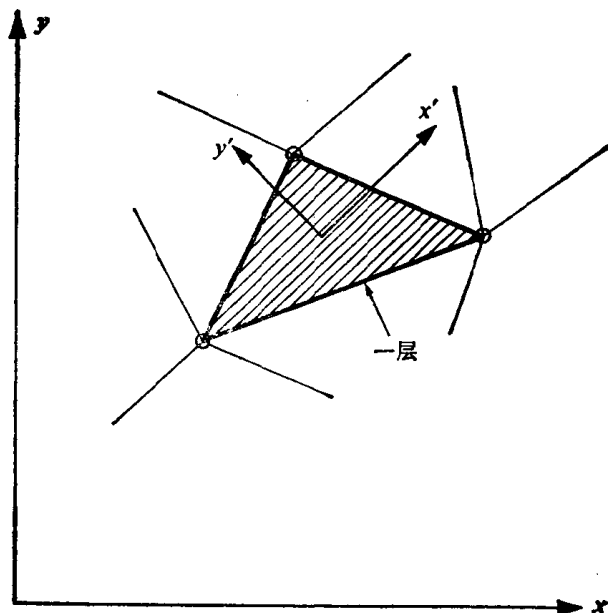


图 17.1 各向异性材料。局部坐标与层内的主方向一致

对于这种坐标轴,只需规定三个系数 k_x , k_y 及 k_z , 并确实得到很大的计算上的经济性,因为在计算矩阵 $\mathbf{H}$ 的系数(式(17.17))时只需要用一个对角矩阵作乘法。

指出这样一点是重要的: 当参数 $\mathbf{a}$ 相应于标量值时,不必在集合总矩阵之前对于在局部坐标系中算出的矩阵进行变换。

因此,在大部分计算机程序中,只采用对角型的矩阵 $\mathbf{k}$.

17.4.2 二维问题 在二维情况下,在局部坐标系中写出的一般控制方程(17.9)变成

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + Q = 0. \quad (17.19)$$

通过式(17.17)进行离散化,现在会看到,矩阵 $\mathbf{H}$ 的形式有所简化. 略去含 α 及 $\bar{q}$ 的项,我们可以写出

$$H_{ij} = \int_{ve} \left(k_x \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + k_y \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) dx dy. \quad (17.20)$$

看来,不必对此作进一步的讨论. 然而,或许值得在这里特别考察一下最简单而又非常有用的三角形单元(图 17.2).

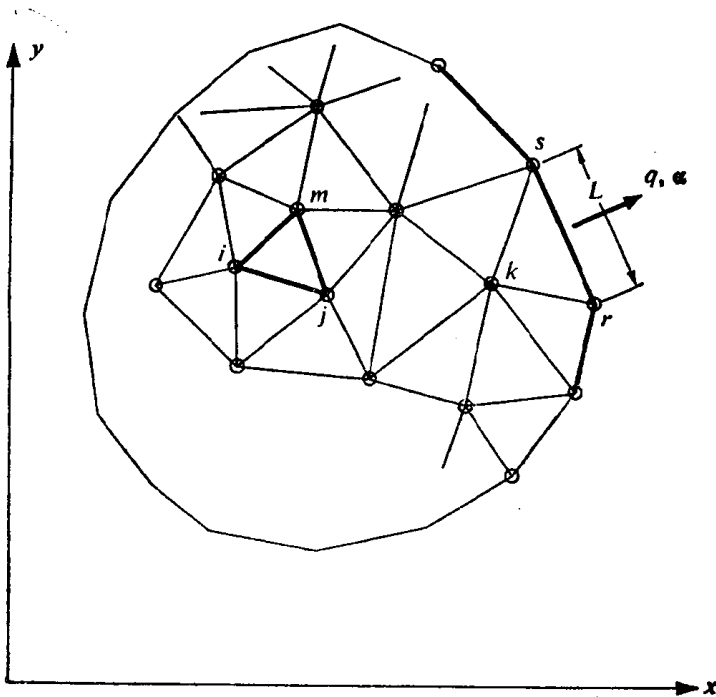


图 17.2 一个二维区域剖分成三角形单元

如同第四章式(4.8)那样,采用

$$N_i = (a_i + b_i x + c_i y) / 2\Delta,$$

我们可以把单元“刚度”矩阵写出如下:

$$\mathbf{H}^e = \frac{k_x}{4\Delta} \begin{bmatrix} b_i b_i & b_i b_j & b_i b_m \\ & b_j b_j & b_j b_m \\ \text{对称} & & b_m b_m \end{bmatrix} + \frac{k_y}{4\Delta} \begin{bmatrix} c_i c_i & c_i c_j & c_i c_m \\ & c_j c_j & c_j c_m \\ \text{对称} & & c_m c_m \end{bmatrix}. \quad (17.21)$$

载荷矩阵遵照类似的简单方式得到;例如,读者可以证明,对于 Q , 我们有如下非常简单的(几乎是“显然的”)结果:

$$\mathbf{f}^e = -\frac{Q\Delta}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}. \quad (17.22)$$

另外,可以对于圆柱坐标写方程,并用来求解轴对称问题。现在,该微分方程是

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(k_r r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) + Q = 0. \quad (17.23)$$

变分原理现在也可适当地进行变换,但是比较简单的作法是:把值 $(k_r r)$ 及 (k_z) 作为修正了的“传导系数”代入,直接利用前面的表达式。如同第五章相应问题中那样,现在最好用数值方法进行积分*。

17.5 例子——精度的评价

很容易证明,对于图 17.3(a)所示“规则”网格,把算出的三角形单元的“刚度”明显地集合起来,所得离散方程与可由熟知的有限差分法导出的方程一样^[7]。

显然,由这两种方法得到的解答是一样的,因此近似的阶次也是一样的^[9]。

如果采用基于节点按正方形排列的“不规则”网格(图 17.3(b)),两种方法的差别将是明显的。这一差别限于“载荷”向量 $\mathbf{f}^e$ 。集合方程的“载荷”与由有限差分表达式得到的“载荷”在节点处的值有些不同,但它们的和量仍然相等。因此,两种解答仅在局部上

* 请见第五章 5.2.5 节的脚注。——译者注

1) 在仅规定边界值 $\bar{\phi}$ 的情况下,这才是真实的。

不同,但给出相同的平均值。

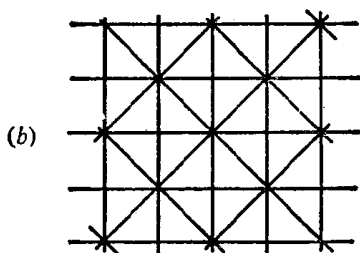
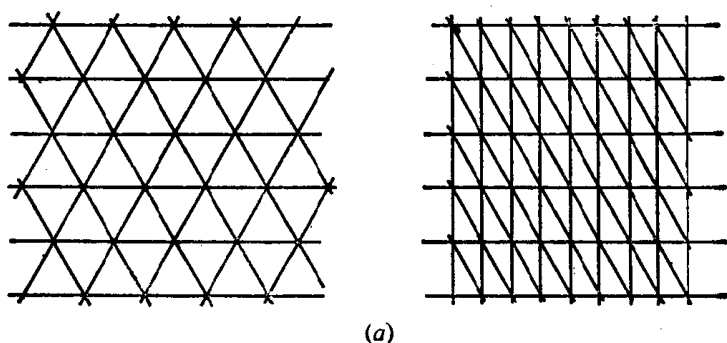


图 17.3 “规则”及“不规则”剖分方式

在图 17.4 中,把根据“不规则”网格得到的结果同最低阶有限差分近似的松弛解作了比较。确实如同所料,两种方法给出精度相似的结果。然而可以证明,在一维问题中,有限元算法在节点处给出精确答案,而有限差分法一般作不到这一点。因此一般说来,用有限元法离散化可以得到很好的精度。此外,有限元解法的优点还有

(a) 可以简单地处理非均质及各向异性情况(特别是各向异性的方向变化时)。

(b) 单元可以在形状及尺寸上分类,以模拟任意边界并用于所寻求的函数急剧变化的区域。

(c) 自然地引入给定的梯度或“辐射”边界条件,并具有比标准有限差分法更好的精度。

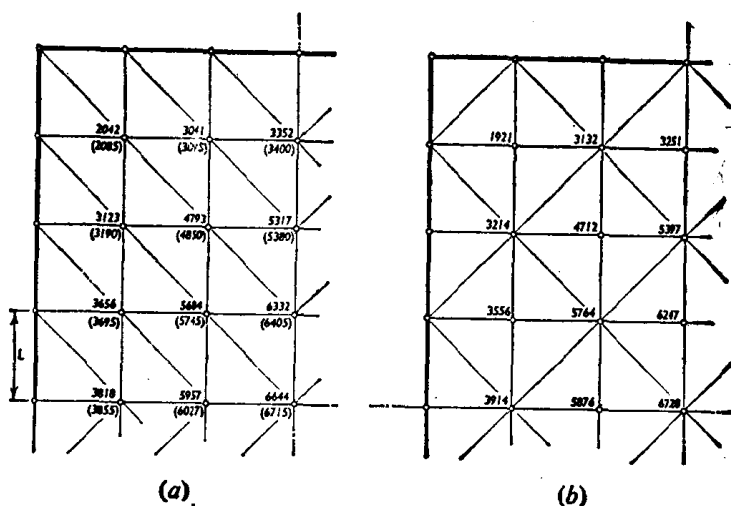


图 17.4 矩形轴的扭转。括号中的数字表示由索斯威尔用 12×16 网格得到的更精确的解 ($\phi/G\theta L^2$ 的值)

(d) 容易用高阶元来改善精度而不会使边界条件复杂化，采用高阶有限差分近似时总是出现使边界条件复杂化这一困难。

(c) 最后，可以用标准的(结构力学)程序来进行集合及求解，

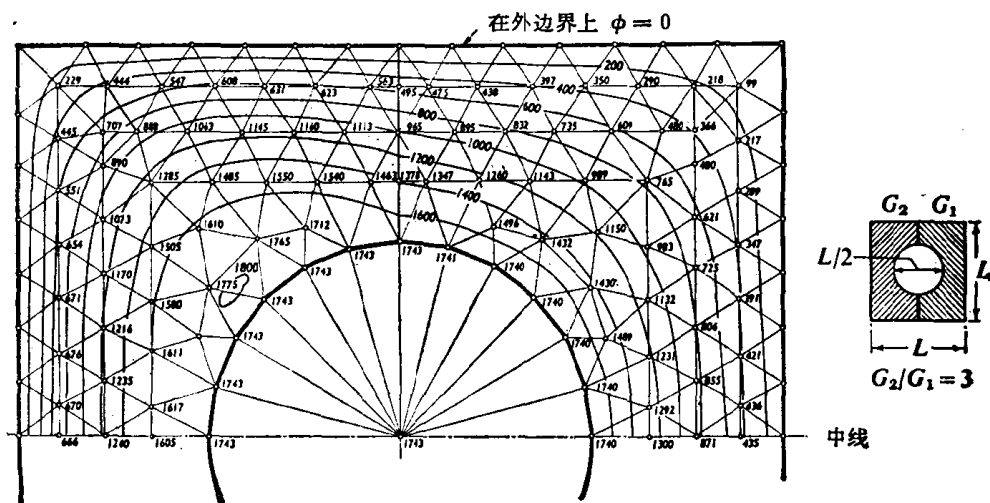


图 17.5 空心双材料轴的扭转。 $\phi/G\theta L^3 \times 10^4$

这在计算机时代是相当重要的。

下面给出两个更复杂的例子，以说明在实际中所能达到的精度。第一个例子是图 17.5 所示非均质轴的纯扭问题。在这里，基本微分方程是

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{G} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{G} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + 2\theta = 0, \quad (17.24)$$

式中 ϕ 是应力函数， G 是剪切模量， θ 是每单位长度轴的扭角。

在所给出的有限元解中，空心处用与其它地方处材料相比 G 值的量级为 10^{-3} 的材料来表示¹⁾。该结果与由精确的有限差分解^[8]导出的等值线很一致。

在图 17.6 中，示出了一个关于通过各向异性多孔基础的流动的例子。

在这里，控制方程是

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial H}{\partial y} \right) = 0, \quad (17.25)$$

式中 k_x 及 k_y 表示（倾斜的）主轴方向的渗透系数。在这里，把答案同由精确解导出的等值线作了比较。在这个例子中，采用分等尺寸剖分的可能性是显而易见的。

17.6 一些实际应用

17.6.1 各向异性渗流 第一个问题处理的是通过很不均匀的各向异性扭曲地层的流动。基本控制方程仍然是式(17.25)。然而，在计算机程序中必须加进允许主方向 x' 及 y' 在单元间变化这样一个特点。

计算上没有什么困难，在图 17.7 中给出了这个问题及其解答^[3]。

17.6.2 轴对称热流 如果不发热，轴对称热流方程可按标准形式写成

1) 这样作是为了避免区域的“多连通性”造成的困难，也是为了能利用标准程序。

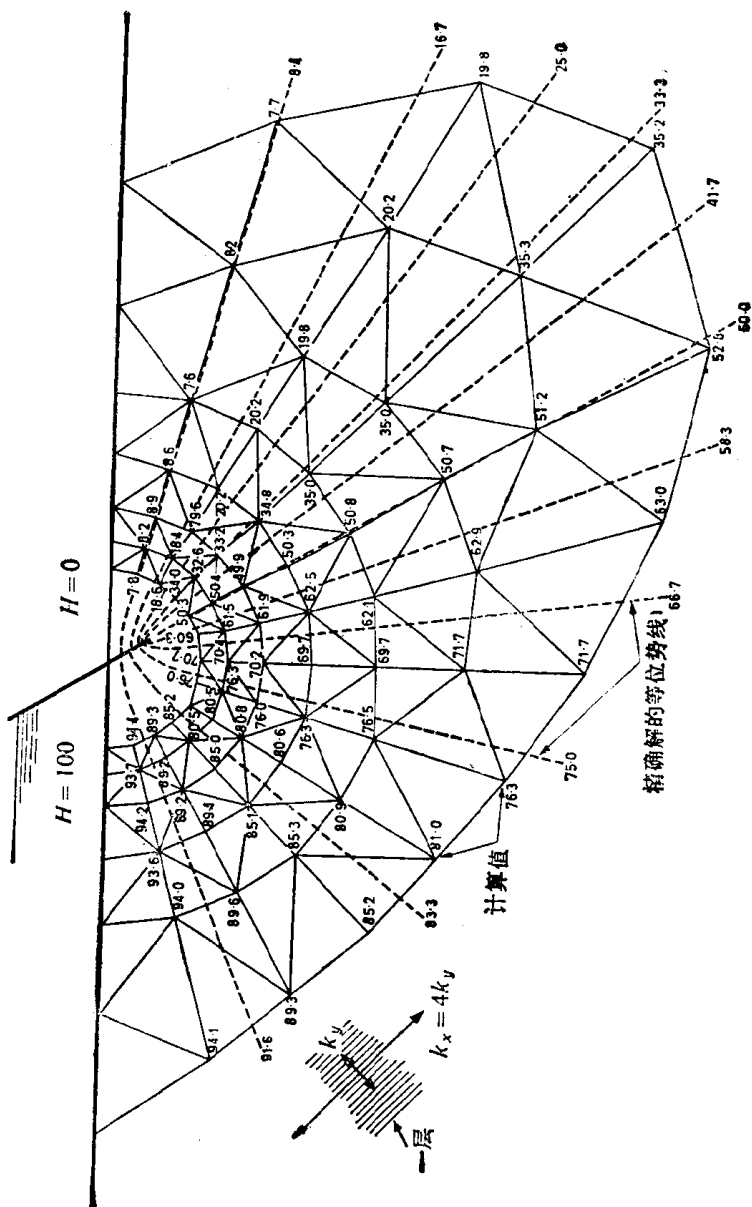


图 17.6 层状基础中斜桩墙下的流动，未示出桩尖端附近的细网路，用等值线给出与精确解的比较

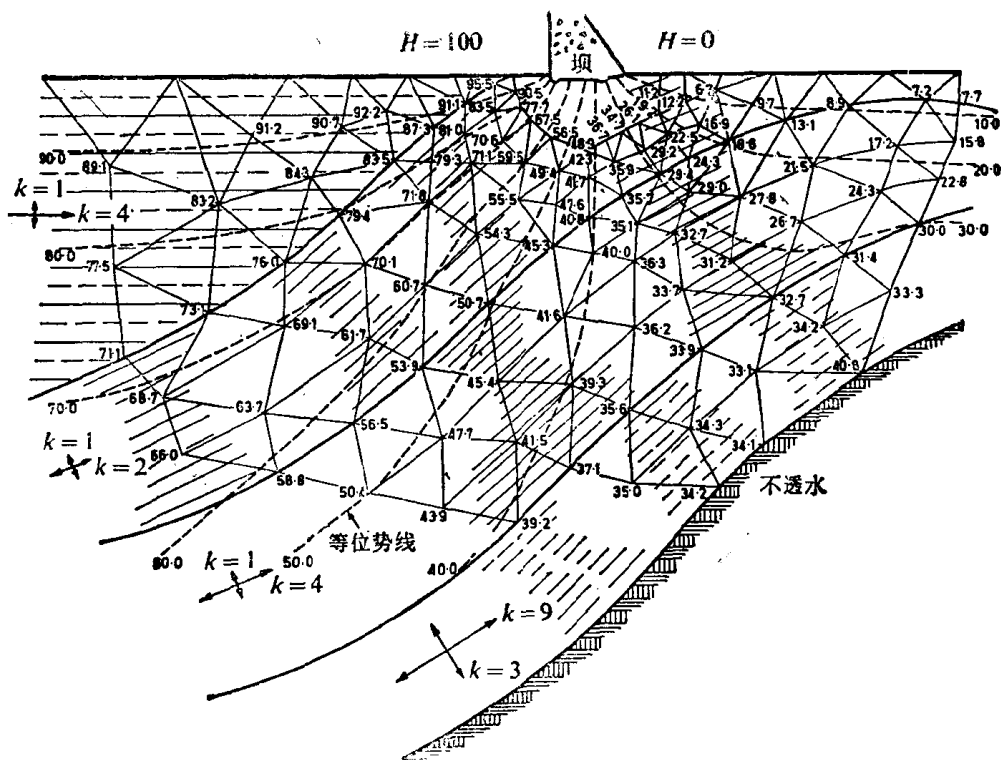


图 17.7 通过坝下很不均匀的扭曲基础的流动

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r k \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(r k \frac{\partial T}{\partial z} \right) = 0. \quad (17.26)$$

在上式中, T 是温度, 而 k 是传导系数。现在用径向及轴向坐标 r, z 代替坐标 x, y 。

在图 17.8 中示出了一个核反应堆压力容器^[1]当内壁温度均匀升高时的温度分布, 求解是按稳态热传导问题进行的。

17.6.3 运动表面上的动压力 如果一个沉浸在流体中的表面以规定的加速度作小幅度运动, 则可证明, 在忽略压缩性时, 所产生的附加压力服从拉普拉斯方程(见第二十章 20.3 节)

$$\nabla^2 p = 0.$$

在运动(或静止)边界上, 边界条件是(b)类(见式(17.7 b)), 它由下式给出: