现代管理丛书

管理运筹学

王志学

电子工业出版社

管 理 运 筹 学

王 志 学

電子工業出版社

内容简介

本书详细阐述了工业企业管理中几种常用的运筹学方法。全书共分九章，主要内容包括线性规划、运输及分配问题、投入产出分析、存贮论和动态规划。本书注重实用。可供高等院校工业企业管理工程专业师生做教学用书，也可供工矿企业的经济管理人员和工程技术人员做自学或培训教材。

管理运筹学

王志学

责任编辑　张文生　王京波

*

电子工业出版社出版（北京市万寿路）

吉林工学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

开本：850×1168 1/32印张：8.375 字数：222千字

1986年11月第1版1986年11月第1次印刷

印数：19000册　定价：1.80元

统一书号：4290·450

前　　言

随着科学技术的不断进步，经济不断地发展，现代管理科学也在迅速地发展。为了满足工业企业及广大读者学习管理科学的需要，我们编写了这套企业管理系列丛书。全书共分为六个分册，即《经营管理学》、《生产组织学》、《管理运筹学》、《质量管理学》、《技术经济学》和《企业管理常用方法的程序设计》。

这套书的特点是，在较为全面阐述企业管理的基本理论和方法的同时，吸收和借鉴了国外现代管理理论和方法，并结合我国近年来在企业管理实践中较为成功的经验，理论联系实际，深入浅出，特别重视了定量的分析。

《管理运筹学》这本书介绍了运筹学中的基本理论和方法，并注意结合管理工程专业的实践和应用。书中编入了大量的例题，可供管理工程类专业的本科和专科生做教材使用，也可供工矿企业、经济管理人员和工程技术人员参考。

《管理运筹学》这本书承何季阳副教授审阅，特此表示致谢。本书编写过程中参考了许多文献和编著，谨向有关作者表示衷心感谢，由于编者水平有限，书中缺点错误在所难免，恳请读者批评指正。

编者

一九八六年十月

现代管理丛书

经营管理学	生产组织学
管理运筹学	质量管理学
技术经济学	企业管理常用方法的程序设计

现代管理丛书编委

主编　　潘海珍　杨化民

委员（以姓氏笔划为序）

王玉民　王廷辅　王志学

朱廷昌　杨化民　周立华

尚正明　林树隆　赵文祥

胡喜忠　侯化国　高　瑞

目 录

第一章　线性规划问题及其数学模型

第一节　线性规划问题的数学模型

一、引言

线性规划（Linear Programming 简称 LP）是运筹学的一个重要分支。其应用范围相当广泛，概括地说，它研究的问题主要有两类：一类是已有一定数量的人力、物质资源，研究如何充分和合理地利用这些资源，使完成的任务量最大；另一类是已确定了一项任务，研究怎样合理安排，才能使完成任务所耗费的资源量最小。实际上，这两类问题是相互联系的，或者说是一个问题的两种不同提法。总的要求是：耗费最小量的资源，完成尽可能多的任务，获得最佳的经济效果。

二、几种线性规划问题数学模型的建立

下面通过一些例子来说明几种线性规划问题数学模型的建立。

（一）生产计划问题

例1　某工厂生产A和B两种产品。主要消耗煤、电力和劳动力（以工作日计）三种资源。假定每生产一吨A产品需用煤 9 吨、电力 4 千瓦、劳动力 3 个；而每生产一吨B产品需用煤 4 吨、电力 5 千瓦，劳动力10个，已知生产一吨A产品获得利润 7 万元，生产一吨B产品获利润12万元。现该厂只有煤360吨、电力200千瓦、劳动力300个。问应生产A产品和B产品各多少吨，才能获得利润最大？

解：首先将上述条件和要求列成表1-1。

表1-1

产品 消耗 资源	A	B	条件限制
煤（吨）	9	4	360
电力（千瓦）	4	5	200
劳动力（工作日）	3	10	300
单位产品获利（万元）	7	2	

为了将上述问题用数学模型表示出来，我们设x_1、x_2分别表示生产A产品和B产品的数量，单位为吨。

由于生产一吨A产品需要9吨煤，4千瓦电力，3个劳动力，所以生产x_1吨A产品就需要$9x_1$吨煤，$4x_1$千瓦电力和$3x_1$个劳动力。同样生产一吨B产品就需要$4x_2$吨煤，$5x_2$千瓦电力和$10x_2$个劳动力。由已知条件可知，不论生产多少吨A产品，也不论生产多少吨B产品，即不论x_1和x_2各为多少，它们所消耗的煤不能大于360吨，即可表示为

$$9x_1+4x_2\leqslant 360$$

类似地，对电力和劳动力可得以下两式：

$$4x_1+5x_2\leqslant 200$$

$$3x_1+10x_2\leqslant 300$$

假定只生产A产品，不生产B产品，则有

$$x_1>0 \quad x_2=0$$

而假定只生产B产品，不生产A产品，则有

$$x_2>0 \quad x_1=0$$

但这两种情况下绝不会有生产“负产品”的情况，因此，还需要限制x_1和x_2不能为负值，即

$$x_1\geqslant 0 \quad x_2\geqslant 0$$

以上数学表达式描述了解决实际问题应当满足的条件，我们把这些数学表达式叫做约束条件。

又由已知条件我们知道，生产x_1吨A产品可获利润$7x_1$万元，生产x_2吨 B产品可获利润$12x_2$万元。生产x_1吨A 产品和x_2吨B 产品共获得利润为$7x_1+12x_2$万元。现在需要求出 x_1和 x_2两个变量的值，且使该工厂获得的总利润值

$$z=7x_1+12x_2$$

为最大。

上式是生产计划的目标要求，称为目标函数。

上述问题可以概括为：求某一目标函数在一定约束条件下的最大值问题。因此，例 1 可归纳为如下的线性规划问题：

求x_1、x_2满足约束条件

$$\begin{aligned}
&9x_1+4x_2\leqslant 360\\
&4x_1+5x_2\leqslant 200\\
&3x_1+10x_2\leqslant 300\\
&x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0
\end{aligned}$$

并且使得目标函数

$$z=7x_1+12x_2$$

为极大值。

通过上例可以看出，要将实际问题归纳成线性规划问题，一般来说，要经过下述几个步骤：

1．首先要选定所需确定的某些变量。在上例中x_1和x_2为选定的变量，它们分别表示生产A产品和B产品的数量。

2．确定与变量有关的给定系数值。如上例中生产一吨A 产品或生产一吨B 产品所需要的煤、电力、劳动力的数量和可获得的利润值。

3．确定限制条件的数量限额。在上例中就是可以使用的煤电力、劳动力的数量限额。

4．列出约束条件和目标函数的数学表达式。

5．写出实际问题的线性规划数学模型。就是将实际问题概括为在一定约束条件下，求一组变量值，使目标函数达到最大（或最小）值的问题。把实际问题归纳成一个线性规划问题，就可以运用线性规划的方法进行求解了。关于如何求解，我们在以后各章节中加以讨论。

在上例中，我们变换一下问题的角度，假定该工厂要求所获得的利润不得少于400万元，其它条件均不改变，问应如何安排A产品和B产品的生产数量，才能使耗电量为最少？这在当前电力能源紧张的情况下，是具有现实意义的问题。

该问题的数学模型为：求x_1，x_2满足约束条件

$$\begin{cases}9x_1+4x_2\leqslant 360\\3x_1+10x_2\leqslant 300\\7x_1+12x_2\geqslant 400\\x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0\end{cases}$$

并且使 $z=4x_1+5x_2$达到极小值。

上述两个数学模型的实质是相同的，都是为了寻求最佳计划安排。

（二）物资调运问题

例2 假设有三个矿A_1、A_2和A_3生产矿石，它们的日产量分别为100、80和50吨，另外有四个炼铁厂B_1、B_2、B_3和B_4，它们每天分别需要矿石50、70、80和30吨。自各矿到各炼铁厂的运价（单位：元/吨）见表1-2。问应如何调运，才能使总运费最低？

解：设从$A_i(i=1,2,3)$运往$B_j(j=1,2,3,4)$的矿石数量为x_{ij}（单位：吨），例如x_{21}表示由矿A_2运往炼铁厂B_1的数量。现列表1-3。

因为从矿A_1运往四个炼铁厂的矿石的总数应为A_1的产量，即有

$$x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=100$$

表1-2

铁厂 运价 矿山	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	1.5	2	0.3	3
A_2	7	0.8	1.4	2
A_3	1.2	0.3	2	2.5

表1-3

炼铁厂 矿山	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	100
A_2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	80
A_3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}	50
需要量	50	70	80	30	230

同理可得

$$x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=80$$
$$x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=50$$

另外，三个矿供给炼铁厂 B_1 的矿石数量应等于B_1的需要量50吨，即有

$$x_{11}+x_{21}+x_{31}=50$$

同理可得

$$x_{12}+x_{22}+x_{32}=70$$
$$x_{13}+x_{23}+x_{33}=80$$
$$x_{14}+x_{24}+x_{34}=30$$

又因为调运量不可为负数，即

$$x_{ij}\geqslant 0 \quad (i=1,2,3;j=1,2,3,4)$$

因此，调运方案就是满足下列约束条件的一组变量x_{ij}（$i=1,2,3$；$j=1,2,3,4$）的值，约束条件为

$$
\begin{aligned}
&x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=100\\
&x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=80\\
&x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=50\\
&x_{11}+x_{21}+x_{31}=50\\
&x_{12}+x_{22}+x_{32}=70\\
&x_{13}+x_{23}+x_{33}=80\\
&x_{14}+x_{24}+x_{34}=30\\
&x_{ij}\geqslant 0\ (i=1,2,3;j=1,2,3,4)
\end{aligned}
$$

显然，可行的调运方案有很多个。

现在的问题就是要在这很多个可行的方案中，找一个运费最少的方案，即：求一组变量x_{11}，x_{12}，x_{13}，x_{14}，x_{21}，x_{22}，x_{23}，x_{24}，x_{31}，x_{32}，x_{33}，x_{34}的值，使它满足上述约束条件，并使目标函数

$$
\begin{aligned}
z=&1.5x_{11}+2x_{12}+0.3x_{13}+3x_{14}\\
&+7x_{21}+0.8x_{22}+1.4x_{23}+2x_{24}\\
&+1.2x_{31}+0.3x_{32}+2x_{33}+2.5x_{34}
\end{aligned}
$$

的值最小（即总运费最少）。

此问题的约束条件和目标函数都是变量x_{ij}的线性表达式或线性函数，故显然是个线性规划问题。

（三）配比（营养）问题

例3 一个消费者要购买营养物，且要求其中所含维生素A和C的单位数不能少于9和19。今设有6种营养物都含有这二种维生素，但含量各不相同，单位营养物价格也各不相同，如表1-4所示。问消费者购买6种营养物各多少，才能使既获得必要的维生素A、C又花钱最少？

解：设x_j（$j=1,2,3,4,5,6$）为购买上述6种营养物之数量，

表1-4

营养物 维生素	每公斤营养物所含维生素（单位）						所要求维生素之最小数量
	1	2	3	4	5	6	
A	1	0	2	2	1	2	9
C	0	1	3	1	3	2	19
单位营养物价格	35	30	60	50	27	22	元／公斤

单位为公斤，则由已知条件可把问题变成：求$x_j(j=1,2,\cdots\cdots,6)$满足下列约束条件

$$\begin{cases} x_1+2x_3+2x_4+x_5+2x_6\geqslant 9 \\ x_2+3x_3+x_4+3x_5+2x_6\geqslant 19 \\ x_j\geqslant 0 \quad (j=1,2,\cdots\cdots,6) \end{cases}$$

并使得总费用

$$z=35x_1+30x_2+60x_3+50x_4+27x_5+22x_6$$

取得最小值。

通过例3，我们可以把类似的问题概括如下，设用n种原料B_1，$B_2,\cdots\cdots$，B_n制成具有m种成份A_1，$A_2,\cdots,A_m$的产品，其所含各成份需要量分别不低于a_1，$a_2,\cdots,a_m$，各种原料的单价，以及各种原料所含成份的数量如表1-5所示，问应如何配料，才能使产品成本最低？

设取原料B_j为x_j单位（$j=1,2,\cdots,n$），那么这一问题的数学模型为：求一组变量$x_j(j=1,2,\cdots,n)$的值，使它满足下述约束条件

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_j\geqslant a_i \qquad (i=1,2,\cdots\cdots,n) \\ x_j\geqslant 0 \qquad (j=1,2,\cdots\cdots,n) \end{cases}$$

并且使目标函数 $z=\sum_{j=1}^{n} b_jx_j$的值最小。

表1-5

一单位原料所含成份的数量 \ 原料 / 原料所含成份名称	B_1	B_2	$\cdots$	B_n	产品所含成份需要量
A_1	c_{11}	c_{12}	$\cdots$	c_{1n}	a_1
A_2	c_{21}	c_{22}	$\cdots$	c_{2n}	a_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_m	c_{m1}	c_{m2}	$\cdots$	c_{mn}	a_m
单　价	b_1	b_2	$\cdots$	b_n	

（四）下料问题

例4　某车间要将长度为10米的棒料，截成长度为3米和4米两种毛坯各100根，问怎样截法，使之所用的原材料最少？

分析：根据经验或简单计算，我们可以知道，在一根10米长的棒料上，可以设计出三种不同的截法B_1、B_2、B_3。如表1-6所示。

表1-6

毛坯数目（根） \ 截法 / 毛坯种类	B_1	B_2	B_3	毛坯需要量
3 米	3	2	0	100
4 米	0	1	2	100
剩下料头（米）	1	0	2	

设用B_1种截法截x_1根原材料，用B_2种截法截x_2根原材料，用B_3种截法截x_3根原材料，于是，这一问题的数学模型为：求变量x_1，x_2，x_3的值，使它满足约束条件