

晶体中的光波

激光的传播与控制

A. 亚里夫 P. 叶 著

科学出版社

晶体中的光波

激光的传播与控制

A. 亚里夫 P. 叶 著

于荣金 金 锋 译



科学出版社

1991

9110121

DS83 / 19

内 容 简 介

这是由世界著名量子电子学专家A.亚里夫等编著的一本内容丰富的光电子学教科书。全书共分十三章:电磁场;激光束的传播;光波的偏振;各向异性介质中电磁波的传播;琼斯计算及其在双折射光学系统中的应用;周期性介质中电磁波的传播;电光学及其器件;声光学及其器件;导波光学和集成光学;非线性光学;相位共轭光学。书中给出了激光在各种光学介质中传播的物理图象,以及如何分析和设计各种器件。本书的重点是阐述基本原理;同时也通过一些实际的例子,建立起理论和实际问题之间的桥梁。每章还列出了主要参考文献,并附有习题。

本书可用作应用物理系、材料科学系、电子工程系和电机工程系高年级学生及研究生的教科书,也可供从事光电子学领域的科技人员和高等院校的教师参考。

A. Yariv P. Yeh
OPTICAL WAVES IN CRYSTALS
Propagation and Control of Laser Radiation
John Wiley & Sons, Inc. 1984

晶体中的光波

激光的传播与控制

A. 亚里夫 P. 叶 著

于荣金 金 锋 译

责任编辑 陈菊华

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码: 100707

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

1991年3月第 一 版 开本: 850×1168 1/32
1991年3月第一次印刷 印张: 16 1/4
印数: 001—810 字数: 428 000

ISBN 7-03-001879-6/O·373

定 价: 19.50 元

序 言

本书是为电机工程系或应用物理系的学生学习电光学课程而写的一本教科书，它有两个主要目的：介绍激光辐射在各种光学介质中传播时的清晰物理图象；指导读者如何分析和设计电光器件。

只有研究电磁传播才能理解光学器件的特性，并了解它的局限性，正是由于具有这些性能，这种光学器件才能用作控制激光辐射的元件。本书的重点是阐述基本原理，同时努力用一些根据真实情况的例子来把理论和实践联系起来。在处理激光辐射与各种光学介质的相干相互作用时，只用到经典电动力学。用介电张量、回转张量、电光系数、光弹性常数和非线性极化率等材料参数来描述这些介质的光学性质。读者从目录可以看出，本书的内容相当广泛。

在撰写本书时，我们假定在电学和磁学的中级课程中，已给学生介绍了麦克斯韦方程，并且要求学生掌握傅里叶积分、矩阵代数、微分方程方面的一些数学基础。

1982年夏天，P.叶在台湾大学讲授近代光学时，已把初稿作为研究生课程的讲义。我们感谢该校的同事们和学生们在教学过程中所提出的许多有益意见和进行的讨论。其中特别要提到的是台湾大学的K.P.Wang教授，正是由于他的支持和鼓励，才有机会讲授这门课程。感谢M.Khoshnevisan博士和C.C.Shih博士，他们阅读手稿并提出了宝贵的意见；还要感谢H.Kuwamoto博士、E.Sovero博士和M.Ewbank，作者和他们进行了许多有益的讨论。

我们感谢C.Byrne和R.Stratton，他们耐心而熟练地打出了手稿。我们也对P.Foraker和H.Coogan表示感谢，在获得

版权和准备参考文献方面，得到了他们的帮助。P.叶感谢罗克韦
尔国际科学中心所给予的支持，以及J.T.Longo博士和J.M.
Tracy博士经常给予的鼓励。

A. 亚里夫

P. 叶

加利福尼亚

1983年5月

目 录

序言	(i)
第一章 电磁场	(1)
1.1 麦克斯韦方程和边界条件	(1)
1.2 坡印廷定理和守恒定律	(4)
1.3 复函数形式	(5)
1.4 波动方程和单色平面波	(7)
1.5 激光脉冲的传播; 群速度	(11)
习题	(16)
第二章 激光束的传播	(19)
2.1 标量波动方程	(19)
2.2 均匀介质中的高斯光束	(21)
2.3 类透镜介质中的基模高斯光束—— $ABCD$ 定律	(25)
2.4 均匀介质中的高斯光束高阶模	(33)
2.5 二次方折射率变化介质中的高斯光束模	(33)
习题	(44)
第三章 光波的偏振	(46)
3.1 偏振的概念	(46)
3.2 单色平面波的偏振	(47)
3.3 复数表示法	(51)
3.4 琼斯矢量表示法	(53)
习题	(55)
第四章 各向异性介质中电磁波的传播	(58)
4.1 各向异性介质的介电张量	(58)
4.2 各向异性介质中平面波的传播	(60)
4.3 折射率椭球	(65)
4.4 相速度、群速度和能量速度	(67)
4.5 各向异性介质(晶体)的分类	(69)

4.6	单轴晶体中光的传播	(72)
4.7	在边界处的双折射	(74)
4.8	双轴晶体中光的传播	(76)
4.9	旋光性	(8)
4.10	法拉第旋转	(85)
4.11	波在各向异性介质中传播的耦合模分析	(88)
4.12	偏振态的运动方程	(93)
	习题	(96)
第五章	琼斯算法及其对双折射光学系统的应用	(101)
5.1	琼斯矩阵表示	(101)
5.2	光强透射性	(107)
5.3	偏振干涉滤波器	(110)
5.4	扭曲各向异性介质中光的传播	(121)
5.5	菲涅耳反射和相移问题	(124)
	习题	(125)
第六章	周期性介质中电磁波的传播	(130)
6.1	周期性介质	(130)
6.2	周期性层状介质	(138)
6.3	布喇格反射	(147)
6.4	耦合模理论	(153)
6.5	Solc滤波器的耦合模理论	(161)
6.6	布喇格反射镜的耦合模理论	(167)
6.7	相速度、群速度和能量速度	(173)
6.8	形式双折射	(177)
6.9	电磁表面波	(180)
	习题	(186)
第七章	电光学	(190)
7.1	电光效应	(190)
7.2	线性电光效应	(192)
7.3	电光调制	(208)
7.4	电光晶体中波的传播	(215)
7.5	二次电光效应	(225)

7.6	电光系数的物理性质	(232)
7.7	液晶的电光效应	(234)
	习题	(237)
第八章	电光器件	(241)
8.1	电光光调制器	(241)
8.2	电光法布里-珀罗调制器	(252)
8.3	若干设计考虑	(257)
8.4	双稳电光器件	(261)
8.5	电光频移和脉冲压缩	(267)
8.6	电光光束偏转器	(272)
	习题	(274)
第九章	声光学	(279)
9.1	光弹性效应	(279)
9.2	声光相互作用的基本概念	(289)
9.3	声光相互作用的粒子图象	(292)
9.4	各向异性介质中的布喇格衍射	(293)
9.5	布喇格衍射的耦合模分析	(296)
9.6	喇曼-纳斯 (Nath) 衍射	(311)
9.7	表面声光学	(315)
	习题	(319)
第十章	声光器件	(321)
10.1	声光调制器	(321)
10.2	声光偏转器	(332)
10.3	声光可调谐滤波器 (AOTF)	(340)
10.4	声光频谱分析器	(348)
10.5	声光信号相关器	(350)
	习题	(352)
第十一章	导波和集成光学	(355)
11.1	介质波导的一般性质	(355)
11.2	非对称波导中的TE模和TM模	(365)
11.3	电介质微扰和模式耦合	(372)
11.4	周期性波导——布喇格反射	(376)

11.5	周期波导中的同向耦合	(383)
11.6	分布反馈激光器	(385)
11.7	电光调制和模式耦合	(393)
11.8	定向耦合	(404)
11.9	频率多路复用	(415)
11.10	其它的平面波导	(418)
11.11	漏泄的介质波导	(427)
11.12	电磁表面波 (表面等离子体激元)	(434)
	习题	(439)
第十二章	非线性光学	(444)
12.1	引言	(444)
12.2	二次非线性现象——一般性方法论	(445)
12.3	非线性相互作用的电磁表示	(455)
12.4	光的二次谐波产生	(457)
12.5	耗尽输入的二次谐波产生	(466)
12.6	高斯光束的二次谐波产生	(468)
12.7	参量放大	(470)
12.8	参量振荡	(472)
12.9	参量振荡中的频率调谐	(477)
12.10	频率上转换	(481)
	习题	(484)
第十三章	相位共轭光学	(486)
13.1	引言	(486)
13.2	通过畸变介质的传播	(486)
13.3	纤维中的像传输	(488)
13.4	四波混频的相位共轭理论	(489)
	习题	(498)
参考文献		(502)

第一章 电 磁 场

理想的激光器所发出的相干电磁辐射可用其电场和磁场矢量来描述。此辐射场的传播由麦克斯韦方程组决定。因此先来熟悉一下电磁场的若干基本性质是很重要的。

在导论性的这一章中，我们叙述和推导经典电磁场的若干基本关系式，从麦克斯韦方程和物质方程出发，求得电磁场的能量密度和能流表达式。我们也推导坡印廷定理、守恒定律和波动方程，并相当详细地研究单色平面波的传播及其若干重要性质，最后讨论波包在色散介质中传播的相速度和群速度概念。

1.1 麦克斯韦方程和边界条件

1.1.1 麦克斯韦方程

经典的办法是由两个场矢量 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$ 来描述空间的电磁场，它们分别称为电矢量和磁矢量。为了包括场对物质的作用，有必要引入第二组矢量 $\mathbf{D}$ 和 $\mathbf{B}$ ，它们分别称为电位移矢量和磁感应矢量。这些矢量由下列麦克斯韦方程组〔采用米千克秒（MKS）制〕联系起来：

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad (1.1-1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{J}, \quad (1.1-2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \quad (1.1-3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (1.1-4)$$

式中 $\mathbf{J}$ 为电流密度（安培/平方米，即 A/m^2 ）， ρ 为电荷密度（库仑/立方米，即 C/m^3 ）。

这四个方程是电学和磁学基本定律的微分形式.式(1.1-1)是法拉第感应定律的微分形式,它描述随时间变化的磁通量产生的感应电场.式(1.1-2)是广义安培定律的微分形式,它描述电荷流动产生的感应磁场.式(1.1-3)是库仑定律的微分形式,它描述电场分布与电荷分布的关系.式(1.1-4)可以看作不存在自由磁单极的一种说明.

麦克斯韦方程(1.1-1), (1.1-2), (1.1-3)和(1.1-4)足以描述电磁辐射在任何介质中的传播.

电荷密度 ρ 和电流密度 $\mathbf{J}$ 可以看作电磁辐射源.光学的许多领域里,经常处理电磁辐射在远离源的区域中传播,这种情况下的 ρ 和 $\mathbf{J}$ 均为零.本书所考虑的所有内容均属这一范畴.

麦克斯韦方程构成一组联立的偏微分方程,它涉及电磁场的四个基本量 $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{D}$ 和 $\mathbf{B}$.为了能从给定的电流和电荷分布唯一确定场矢量,还必须由描述电磁场对材料介质作用的关系式来补充这些方程.这些关系式称为本构方程(或物质方程),可表示为

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad (1.1-5)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} = \mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{M}, \quad (1.1-6)$$

式中本构参数 ϵ 和 μ 为2阶张量,分别称为介电张量(或电容率张量)和磁导率张量; $\mathbf{P}$ 和 $\mathbf{M}$ 分别为电极化矢量和磁极化矢量; ϵ_0 和 μ_0 分别为真空中的电容率和磁导率.如果材料介质是各向同性的,则这些张量简化为标量.在许多情况下,可以假定量 ϵ 和 μ 与场强无关.然而,如果场足够强,例如将激光束聚焦或将一个强的直流电场加到电光晶体上所达到的场强,则必须考虑这些量与 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$ 的关系.这些非线性光学效应将在第七章和第十二章里研究.

1.1.2 边界条件

在 ϵ 和 μ 均为连续的空间区域内,麦克斯韦方程是可解的.光学中,往往处理由 ϵ 和 μ 表征的物理性质通过一个或多个光滑表面时发生突变的情况.在两个介质(1和2)之间光滑表面一边某一点的场矢量 $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{D}$ 和 $\mathbf{B}$,与界面另一边附近一点的场矢量,

可由边界条件联系起来,而边界条件可直接由麦克斯韦方程推出.

现在考虑一个围绕边界表面画出的非常短的圆柱体,如图 1.1(a) 所示.这一圆柱体的两个端面分别位于区域1和2,且与不

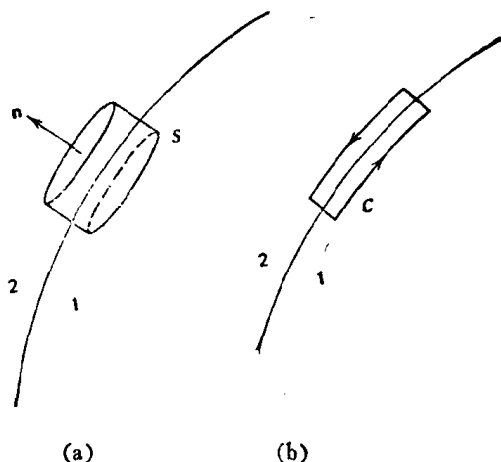


图 1.1 (a) 围绕两种介质界面的短圆柱体. S 是这一圆柱体的表面. (b) 围绕两种介质界面的窄长方形. C 是这一长方形的边界.

连续表面相平行. 圆柱体的高度无限小, 使得端面任意接近边界表面. 将高斯散度定理

$$\int \nabla \cdot \mathbf{F} dV = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \quad (1.1-7)$$

应用到式 (1.1-3) 和 (1.1-4) 的两边, 得

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) &= 0, \\ \mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) &= \sigma, \end{aligned} \quad (1.1-8a)$$

式中 $\mathbf{n}$ 为由介质1指向介质2且与表面垂直的单位矢量, σ 为表面电荷密度 (C/m^2), 下标表示两种介质中表面处的值. 边界条件 (1.1-8a) 通常写为

$$\begin{aligned} B_{2n} &= B_{1n}, \\ D_{2n} - D_{1n} &= \sigma, \end{aligned} \quad (1.1-8b)$$

式中 $B_{2n} = \mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{n}$, $B_{1n} = \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{n}$, $D_{2n} = \mathbf{D}_2 \cdot \mathbf{n}$, $D_{1n} = \mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{n}$. 换句话说, 磁感应矢量 $\mathbf{B}$ 的法向分量总是连续的, 并且电位移矢量 $\mathbf{D}$ 的法向分量之间的差, 在数值上等于表面电荷密度 σ .

下面考虑环绕边界表面一段小而窄的长方形闭合回路，如图 1.1 (b) 所示。这一长方形的两个长边分别位于区域 1 和 2，且平行于不连续表面。长方形的宽度无限小，使得两个长边任意接近边界。将斯托克斯定理

$$\int \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} \quad (1.1-9)$$

应用到式 (1.1-1) 和 (1.1-2) 两边，得

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) &= 0, \\ \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) &= \mathbf{K}, \end{aligned} \quad (1.1-10a)$$

式中 $\mathbf{K}$ 是表面电流密度 (A/m)。电场矢量和磁场矢量的边界条件 (1.1-10a) 通常又写为

$$\begin{aligned} E_{2t} &= E_{1t}, \\ H_{2t} - H_{1t} &= K, \end{aligned} \quad (1.1-10b)$$

式中下标 t 表示场矢量的切向分量。(注意：与边界表面相切的这些场矢量分量仍是与表面相切的平面中的矢量。) 换句话说，电场矢量 $\mathbf{E}$ 的切向分量在边界表面处总是连续的，并且磁场矢量 $\mathbf{H}$ 的切向分量之间的差等于表面电流密度 $\mathbf{K}$ 。

光学的许多领域里，往往处理表面电荷密度 σ 和表面电流密度 $\mathbf{K}$ 均为零的情况。因此在这种情形下， $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$ 的切向分量以及 $\mathbf{D}$ 和 $\mathbf{B}$ 的法向分量在使介质 1 和 2 隔离的界面处是连续的。这些边界条件对于求解光学中波的许多传播问题（如导波光学和层状介质中波的传播）是重要的。

1.2 坡印廷定理和守恒定律

电磁场能量守恒，要求在一定体积内所包含的电磁能的时间变化速率，加上单位时间通过该体积边界表面流出的能量，等于场对该体积内的源所作总功的负值。对一个点电荷 q ，外界电磁场做功的速率为 $q\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}$ ，其中 $\mathbf{v}$ 为电荷速度。磁场对这个点电荷不作功，因为磁力总是与速度相垂直。在分布电荷和电流情形下，每单位

体积场所作功的速率为 $\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}$ 。有一个描述这种能量平衡的连续性方程。现在从麦克斯韦方程出发推导这个方程。利用方程(1.1-2)，由单位体积电磁场所作功的速率可表示为

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) - \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (1.2-1)$$

若采用矢量等式

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}), \quad (1.2-2)$$

并且利用式(1.1-1)，则式(1.2-1)右边变成

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = -\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) - \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (1.2-3)$$

如果进一步假定：所涉及的材料介质在电磁特性上是线性的（即 ϵ 和 μ 与场强无关），则式(1.2-3)可写成

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} = -\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}, \quad (1.2-4)$$

式中 U 和 $\mathbf{S}$ 定义为

$$U = \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}), \quad (1.2-5)$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}. \quad (1.2-6)$$

标量 U 代表电磁场的能量密度，其量纲为焦耳/立方米(J/m^3)。代表能流的矢量 $\mathbf{S}$ 称为坡印廷矢量，其量纲为焦耳/平方米·秒 $[\text{J}/(\text{m}^2 \cdot \text{s})]$ 相当于把 $|\mathbf{S}|$ 看作场在单位面积内沿 $\mathbf{S}$ 方向携带的功率(瓦/平方米，即 W/m^2)。因此， $\nabla \cdot \mathbf{S}$ 代表从单位体积流出的净电磁功率。式(1.2-4)称为连续性方程或能量守恒(坡印廷定理)。电磁场线性动量的守恒定律可由类似方法得到。这给学生留作习题(习题1.4)。

1.3 复函数形式

光学中，通常处理稳态的随时间正弦变化的场(如激光辐射)的较方便的办法是把每个场矢量表示成复函数。举例来说，考虑场矢量的某个分量

$$a(t) = |A| \cos(\omega t + \alpha), \quad (1.3-1)$$

式中 ω 为角频率， α 为相位。如果定义 $a(t)$ 的复振幅为

$$A = |A| e^{i\alpha}, \quad (1.3-2)$$

则式(1.3-1)可写成

$$a(t) = \operatorname{Re}[A e^{i\omega t}]. \quad (1.3-3)$$

经常用下式表示 $a(t)$ ：

$$a(t) = A e^{i\omega t}, \quad (1.3-4)$$

而不是用式(1.3-1)或(1.3-3)表示 $a(t)$ 。当然这样做是不严格的；它出现时，式(1.3-4)的意思总是理解为取 $A e^{i\omega t}$ 的实部。在大多数情形下，用复数形式(1.3-4)表示场矢量，就线性数学运算（如微分、积分和求和）而论，是不成问题的。不过当涉及场矢量的乘积（或乘方）时，如能量密度和坡印廷矢量，就会出现例外。这时必须采用物理量的实数形式。

举例来说，考虑两个正弦函数 $a(t)$ 和 $b(t)$ 的乘积，其中

$$a(t) = |A| \cos(\omega t + \alpha) = \operatorname{Re}[A e^{i\omega t}], \quad (1.3-5)$$

$$b(t) = |B| \cos(\omega t + \beta) = \operatorname{Re}[B e^{i\omega t}], \quad (1.3-6)$$

式中 $A = |A| e^{i\alpha}$ ， $B = |B| e^{i\beta}$ 。用实函数，可得

$$a(t)b(t) = \frac{1}{2}|AB| \left[\cos(2\omega t + \alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) \right]. \quad (1.3-7)$$

但是如果用复函数形式求乘积 $a(t)b(t)$ 的值，则会得到

$$a(t)b(t) = A B e^{i2\omega t} = |AB| e^{i(2\omega t + \alpha + \beta)}. \quad (1.3-8)$$

这一结果与式(1.3-7)比较，可以看出与时间无关的直流项 $\frac{1}{2}|AB| \cos(\alpha - \beta)$ 消失了，因此使用复数形式造成了误差。一般说来，两个复数的实部之乘积不等于这两个复数乘积的实部。换句话说，如果 x 和 y 为两个任意复数，则下面的不等式一般是正确的：

$$\operatorname{Re}[x]\operatorname{Re}[y] \neq \operatorname{Re}[xy]. \quad (1.3-9)$$

1.3.1 正弦乘积的时间平均

光学领域里，场矢量是随时间迅速变化的函数。例如，波长

$\lambda (=1 \text{ 微米, 即 } 1\mu\text{m})$ 随时间变化场的周期为 $T = \lambda/c = 0.33 \times 10^{-14} \text{ s}$. 因此, 通常考虑许多物理量 (如坡印廷矢量和能量密度) 的时间平均值, 而不是瞬时值. 经常要求两个相同频率正弦函数乘积的时间平均

$$\langle a(t)b(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T |A| \cos(\omega t + \alpha) |B| \times \cos(\omega t + \beta) dt, \quad (1.3-10)$$

式中 $a(t)$ 和 $b(t)$ 由式 (1.3-5) 和 (1.3-6) 给出, 括号表示时间平均; $T = 2\pi/\omega$ 为振荡周期. 式 (1.3-10) 的积分是以 T 为周期, 故可在时间 T 内求平均. 因为含有 $\cos(2\omega t + \alpha + \beta)$ 的项对 T 的平均为零, 所以用式 (1.3-7), 直接求得

$$\langle a(t)b(t) \rangle = \frac{1}{2} |AB| \cos(\alpha - \beta). \quad (1.3-11)$$

最后的这个结果, 直接按照式 (1.3-5) 和 (1.3-6) 定义的复振幅 A 和 B 的形式, 可以写成

$$\langle a(t)b(t) \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}[AB^*]. \quad (1.3-12)$$

或用 $a(t)$ 和 $b(t)$ 的解析形式, 直接写成

$$\langle \text{Re}[a(t)] \text{Re}[b(t)] \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}[a(t)b^*(t)]. \quad (1.3-13)$$

式中星号表示复数共轭. 式 (1.3-13) 右边时间相关性不见了, 这是因为 $a(t)$ 和 $b(t)$ 均有相同的正弦式时间关系 $e^{i\omega t}$. 这两个结果 [即式 (1.3-12) 和 (1.3-13)] 很重要, 本书中将会经常使用.

采用场矢量 $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{D}$ 和 $\mathbf{B}$ 的复函数形式, 对于正弦式变化的场, 时间平均的坡印廷矢量 [式 (1.2-6)] 和能量密度 [式 (1.2-5)] 分别为

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} \text{Re}[\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*], \quad (1.3-14)$$

$$U = \frac{1}{4} \text{Re}[\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}^* + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}^*]. \quad (1.3-15)$$

1.4 波动方程和单色平面波

节 1.1 中描述的麦克斯韦方程, 是一组联立的偏微分方程. 这

些方程经过处理,能得出每个场矢量分别必须满足的微分方程.我们将把注意力限于电荷密度 ρ 和电流密度 $\mathbf{J}$ 均为零的范围.这一节中还假定介质是各向同性的,故 ϵ 和 μ 为标量.

如果将 $\mathbf{B}$ 的本构关系式(1.1-6)用于式(1.1-1),用 μ 除以两边,并应用旋度算符,可得

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{E} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{H} = 0. \quad (1.4-1)$$

如果现在将式(1.1-2)对时间求微分,把它与式(1.4-1)结合起来,并用物质方程(1.1-5),可得

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{E} \right) + \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (1.4-2)$$

采用矢量等式

$$\begin{aligned} \nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{E} \right) &= \frac{1}{\mu} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) \\ &\quad + \left(\nabla \frac{1}{\mu} \right) \times (\nabla \times \mathbf{E}) \end{aligned} \quad (1.4-3)$$

和

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}, \quad (1.4-4)$$

式(1.4-2)变成

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{E} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + (\nabla \log \mu) \times (\nabla \times \mathbf{E}) \\ - \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) = 0. \end{aligned} \quad (1.4-5)$$

用式(1.1-5)的 $\mathbf{D}$ 代入式(1.1-3),并应用矢量等式

$$\nabla \cdot (\epsilon \mathbf{E}) = \epsilon \nabla \cdot \mathbf{E} + \mathbf{E} \cdot \nabla \epsilon, \quad (1.4-6)$$

由式(1.4-5)可得

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{E} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + (\nabla \log \mu) \times (\nabla \times \mathbf{E}) \\ + \nabla (\mathbf{E} \cdot \nabla \log \epsilon) = 0. \end{aligned} \quad (1.4-7)$$

这是场矢量 $\mathbf{E}$ 的波动方程.磁场矢量 $\mathbf{H}$ 的波动方程,可用类似方法求得,并可表示为

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{H} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} + (\nabla \log \epsilon) \times (\nabla \times \mathbf{H}) \\ + \nabla (\mathbf{H} \cdot \nabla \log \mu) = 0. \end{aligned} \quad (1.4-8)$$