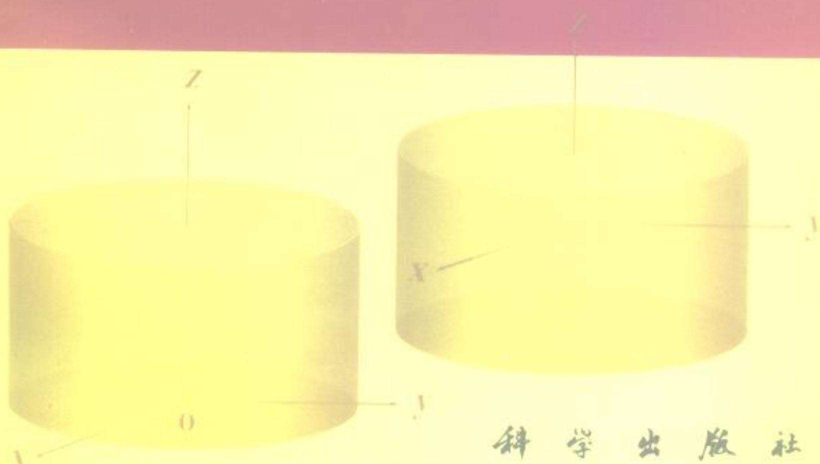
高等院校选用教材系列

高等数学系列教材

一元分析基础

黄立宏 戴斌祥 主编



科学出版社

高等数学系列教材

一元分析基础

黄立宏　戴斌祥　主编

科学出版社

1998

03

内 容 简 介

本书是高等数学系列教材的第一册，其内容包括集合论初步、一元函数微分学及其应用、无穷级数、一元函数积分学及其应用、常微分方程等.各节后面配有适量习题，书末附有习题答案.

本书的结构和一些表述方法有别于以往的同类教材，如：常微分方程内容安排较以往同类教材靠前，有利于“大学物理”等有关课程的教学与学习；书中无穷级数内容被巧妙地分散在有关的章节中等.本书结构严谨、内容精练、条理清楚、重点突出、例题较多.

本书可作为各类高等院校“高等数学”课程的教材，也可作为工程技术及有关人员的自学用书或参考用书.

图书在版编目（CIP）数据

一元分析基础/黄立宏，戴斌祥主编.—北京：科学出版社，1998
高等数学系列教材
ISBN 7-03-006829-7

Ⅰ.一…　Ⅱ.①黄…　②戴…　Ⅲ.数学分析-高等学校-教材
Ⅳ.O171

中国版本图书馆CIP数据核字（98）第17616号

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717

北京双青印刷厂 印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1998年11月第一版　开本：850×1168　1/32
1998年11月第一次印刷　印张：12 1/8
印数：1—7 000　字数：314 000

定价：19.00元

（如有缺页倒装,本社负责掉换。〈环伟〉）

《高等数学系列教材》

主　编　刘楚中

主　审　周叔子

《一元分析基础》

主　编　黄立宏　戴斌祥
编　者　罗　汉　梁　勉　张勤勤
　　　　李丹衡　张诚坚　刘楚中

前　言

我国国民经济和科学技术在21世纪的更大发展已成必然之势，培养各类高等专门人才的我国大学教育的改革也势在必行. 作为大学教育中重要一环的大学数学教育的改革应如何革故鼎新，以适应新的形势，这是广大数学教育工作者所面临的重大课题. 近年来，我校十分注重这方面的工作，组织了一大批教学经验丰富、又具创新精神的教师，进行教学和教材的改革研究.

高等数学是高等院校众多专业学生必修的重要基础理论课，它的设置是为培养各类高等专门人才服务的，因此我们编写的这套高等数学系列教材，在传授知识的同时，注意到通过各环节逐步培养学生具有抽象概括问题的能力、逻辑推理能力、空间想象能力和自学能力，还特别注意培养学生具有比较熟练的运算能力和综合运用所学知识去分析问题和解决问题的能力.

这套系列教材由《一元分析基础》、《多元微积分与代数》、《应用概率统计》和《数学实验》四册组成，它们在结构体系和内容选取方面，不同于以往的众多同类教材，它是按照培养跨世纪人才数学素质的要求编写的，渗透了不少现代数学的观点和内容，以开阔学生的眼界，启迪他们的思维. 正因为如此，这套教材中难免会有不妥之处，希望使用本教材的教师和学生提出宝贵意见.

这套系列教材由刘楚中任总主编，周叔子任总主审. 其中的《一元分析基础》由黄立宏、戴斌祥主编，参加编写的人员还有：罗汉、梁勉、张勤勤、李丹衡、张诚坚和刘楚中. 本教材中带 * 号的内容，可根据授课学时和教学对象进行取舍.

这套系列教材在编写过程中得到了湖南大学教务处的大力支持，在此表示衷心感谢.

湖南大学应用数学系

1998年4月

目　录

第一章　集合与函数

第一节　集　　合

一、逻辑量词和符号

为了书写方便，我们介绍一些逻辑量词和符号.

符号“$\forall$ ”称为全称量词，表示“对于任意的”，“对于所有的”或“对于每一个”，它是 Any 字头 A 的倒写.

符号“$\exists$ ”称为存在量词，表示“存在”，它是 Exist 字头 E 的反写.

例如，“对于任意的 x，都存在 y，使得 $x+y=1$”可以写成

$$\forall\, x,\ \exists\, y,\ \text{使得}\ x+y=1\,.$$

符号“$\Rightarrow$”称为蕴涵词. 设 S_1，S_2 是两个陈述句，它们可以指命题，也可以指条件. $S_1 \Rightarrow S_2$ 表示“若命题 S_1 成立，则命题 S_2 也成立”，这时 S_1 是 S_2 的充分条件，或者 S_2 是 S_1 的必要条件.

符号“$\Leftrightarrow$”称为双蕴涵词. $S_1 \Leftrightarrow S_2$ 表示“当且仅当 S_1 成立时 S_2 成立”或“S_1 与 S_2 等价”，这时 S_1 与 S_2 互为充分且必要的条件.

例如，“若 $x>0$，$y>0$，则 $xy>0$”可记为

$$x>0,\ y>0 \Rightarrow xy>0;$$

“$a^2+b^2=0$ 的充要条件是 $a=b=0$”可记为

$$a^2+b^2=0 \Leftrightarrow a=b=0\,.$$

二、集合的概念

自从康托(Cantor)在 19 世纪末创立集合论以来，集合论的概念和方法已渗透到数学的各个分支，成为数学的基础和语言. 所谓集合(简称集)是指具有某种特定属性的具体或抽象的事物所构成的一个整体，而其中的每个事物称为该集合的元素(简称元).

我们常用大写字母 A,B,X,Y 等表示集，小写字母 a,b,x,y 等表示元. 设 A 是一个集，若某一事物 a 是集 A 的元，则说 a 属于 A，记为 $a\in A$；若 a 不是 A 的元，则说 a 不属于 A，记为 $a \bar{\in}$（或 $a\notin A$）A.

例如，所有英文字母构成字母集，所有自然数的全体构成数集，平面上第一象限里所有点的全体构成点集，等等. 再如平面解析几何中的直线、曲线等几何图形也是由平面上满足一定条件的点所构成的点集.

集合通常有两种表示方法. 一是列举法，列举出集合中的全部元素，例如 $A=\{2,4,6,8\}$；另一是描述法，给出该集中元素所具有的性质，例如 $B=\{x|x^2-1\geqslant 0\}$，$C=\{(x,y)|x^2+y^2=1\}$.

设集 A,B，若 $\forall\ a\in A\Rightarrow a\in B$，则称 A 是 B 的子集，记为 $A\subset B$（读作 A 包含于 B）或记为 $B\supset A$（读作 B 包含 A），这时 A 的所有元都是 B 的元.

子集具有下列性质：

(1)$A\subset A$；

(2)$A\subset B,B\subset C\Rightarrow A\subset C$.

为研究问题的需要，引入一个不含任何元的集，称为空集，记为 $\varnothing$，并规定 $\varnothing$ 是任何集之子集，即 $\forall\ A,\varnothing\subset A$.

若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称 A 与 B 相等，记为 $A=B$，这时 A 与 B 含有完全相同的元，实际上是同一集. 例如

$$A=\{x|x^2-1=0\},$$
$$B=\{-1,1\},$$

有 $A=B$.

若 $A\subset B$ 但 $A\neq B$，则说 A 是 B 的真子集.

全体自然数，整数，有理数，实数和复数分别构成的集依次记为 N,Z,Q,R,C. 显然有

$$N\subset Z\subset Q\subset R\subset C.$$

设 $a,b\in R$ 且 $a<b$，数集

$$\{x|a<x<b,x\in R\}$$

称为开区间，记为(a,b)；数集

$$\{x|a\leqslant x\leqslant b,x\in R\}$$

称为闭区间，记为$[a,b]$；类似地记

$$[a,b)=\{x|a\leqslant x<b,x\in R\};$$

$$(a,b]=\{x|a<x\leqslant b,x\in R\}.$$

实数集R亦可记为区间$(-\infty,+\infty)$，而

$$(a,+\infty)=\{x|x>a,x\in R\};$$

$$(-\infty,a]=\{x|x\leqslant a,x\in R\}$$

等.

在今后的研究中，我们常常要考虑一个点附近的情况. 例如研究函数不仅仅是讨论它在一点的取值，更主要地是要研究它在这一点附近的变化. 一个点的附近就是“邻域”的概念.

设$x_0\in R$，对$\delta\in(0,+\infty)$，数集

$$\{x||x-x_0|<\delta,x\in R\}$$

称为点x_0的δ邻域. 记为$U(x_0,\delta)$，x_0称为该邻域的中心，δ称为该邻域的半径. 显然$U(x_0,\delta)$便是以x_0为中心对称的区间$(x_0-\delta,x_0+\delta)$. 若只考虑x_0附近但不包括点x_0自身，即$U(x_0,\delta)-\{x_0\}$，称之为点x_0的去心δ邻域，记为$\hat{U}(x_0,\delta)$. 当我们不强调邻域的半径时，常将邻域和去心邻域分别简记为$U(x_0)$和$\hat{U}(x_0)$.

另外，$\{x|x_0-\delta<x\leqslant x_0,x\in R\}$称为$x_0$的左邻域，记为$U(x_0^-,\delta)$；$\{x|x_0\leqslant x<x_0+\delta,x\in R\}$称为$x_0$的右邻域，记为$U(x_0^+,\delta)$. 当我们不强调邻域的半径时，常将左、右邻域分别简记为$U(x_0^-)$和$U(x_0^+)$. 相应地也有去心左、右邻域的概念.

三、集合的运算

1. 并集. 给定集A,B，称集合

$$\{x|x\in A\text{或}x\in B\}$$

为A与B的并集，记为$A\cup B$. 显然有

$$A\cup\varnothing=A;A\cup A=A;$$

$$A\cup B=B\cup A;\ (A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C).$$

2. 交集. 给定集 A,B，称集合

$$\{x|x\in A \text{ 且 } x\in B\}$$

为 A 与 B 的交集，记为 $A\cap B$.

显然，$A\cap\varnothing=\varnothing$；$A\cap A=A$；

$A\cap B=B\cap A$；$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$；

$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$；

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$；

$A\subset B\Rightarrow A\cap B=A$.

设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是一组集，可以定义这组集的并集

$$\bigcup_{i=1}^{n}A_i=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$$

和这组集的交集

$$\bigcap_{i=1}^{n}A_i=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n.$$

3. 差集. 给定集 A,B，称集合

$$\{x|x\in A \text{ 但 } x\bar{\in} B\}$$

为 A 与 B 的差集，记为 $A-B$.

显然，$A-A=\varnothing$；$A-\varnothing=A$；

$\varnothing-A=\varnothing$；$A-B=A-(A\cap B)$；

$(A-B)\cap C=(A\cap C)-(B\cap C)$.

在具体问题中，往往把讨论限制在某一固定的集 X 的范围内，讨论的内容只涉及到它的元素或子集等，这时常常称 X 为全集. 全集是一个相对的概念，所研究的问题不同，全集也不同. 例如讨论自然数的加法运算，自然数集 N 可以被认为是全集，但当讨论自然数的加减乘除运算时，就要以有理数集 Q 为全集，而 N 只是 Q 的子集.

相对于全集 X，若 $A\subset X$，则称 $X-A$ 为 A 的余集或补集，记为 A^c.

用文(Venn)图能够较直观地理解并集、交集、差集和余集的概念(见图 1-1 的阴影部分).

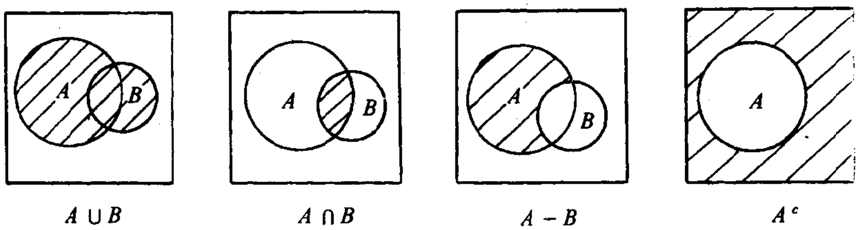


图 1-1

4. 直积. 给定非空集 A,B，称 A,B 的元所构成的有序对的集合

$$\{(x,y)\,|\,x\in A, y\in B\}$$

为 A 与 B 的直积，亦称笛卡尔(Descartes)积，记为 $A\times B$.

例如，$A=\{a,b,c\}$，$B=\{x,y\}$，有

$$A\times B=\{(a,x),(b,x),(c,x),(a,y),(b,y),(c,y)\}.$$

再如 $M=\{x\,|\,1\leqslant x\leqslant 3\}$，$N=\{y\,|\,-2\leqslant y\leqslant -1\}$，则 $M\times N$ 和 $N\times M$ 分别为坐标平面上如图 1-2 所示的矩形.

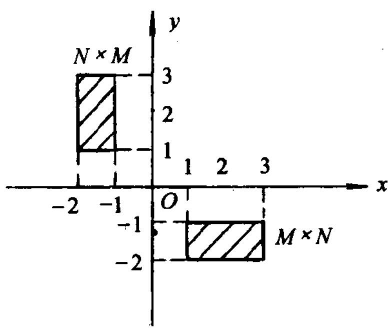


图 1-2

特别地，当 $B=A$ 时，$A\times A$(常记为 A^2)是 A 中一切元所作成的有序对的集. $R^2=R\times R$ 是坐标平面上全部点的集.

设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 n 个非空集，则定义

$$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$$
$$=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,|\,x_1\in A_1,x_2\in A_2,\cdots,x_n\in A_n\},$$