# 可靠性试验及其统计分析

下　册

国防工业出版社

# 可靠性试验及其统计分析

## 下　　册

戴树森　费鹤良
王玲玲　苏德清　编著
白鹤翔　滕怀流

国防工业出版社

## 内容简介

本书分上下两册。上册介绍了概率和数理统计的初步知识、可靠性基本概念、各种寿命分布和常用的概率分布、回归分析、寿命试验（疲劳寿命试验）和加速寿命试验的图分析法以及各种数值分析法；下册介绍了寿命试验（疲劳寿命试验）与加速寿命试验的极大似然估计法、指数分布的各种分析法、抽样验收方案和威布尔分布的抽样验收方案、可靠性筛选试验和加速寿命试验的失效物理分析。对每种方法既介绍了其简单推理，又举例介绍了如何使用该方法，因此，既照顾了初次接触可靠性工作的人员的需要，也一定程度地满足了对可靠性作深入钻研的人员的要求，尤其是对于从事可靠性试验的人员提供了必备的统计分析知识，同时还适用于目前正在全国推行的全面质量管理工作。本书不仅适宜电子、电气、机械、航空、舰船、兵工、纺织、冶金、化工等领域从事可靠性和质量管理的人员学习、使用，对于科研和教学人员也有一定参考价值。



可靠性试验及其统计分析

下　册

戴树森　费鹤良
王玲玲　苏德清　编著
白鹤翔　滕怀流

*

国防工业出版社出版
新华书店北京发行所发行　　各地新华书店经售
国防工业出版社印刷厂印刷

*

850×1168 1/32　印张 16 3/4　432 千字
1984年 4 月第一版　1984年 4 月第一次印刷　印数：0,001— 6,200册
统一书号：15034·2613　　定价：2.65元

# 目　录


第十二章　极大似然估计 …………………………………………… 1

§12.1　极大似然估计 ………………………………………………… 1

§12.2　完全寿命试验中参数的极大似然估计 ………………………… 6

§12.3　定时、定数截尾寿命试验中参数的极大似然估计 ……………18

§12.4　定时测试截尾寿命试验中参数的极大似然估计 ………………33

§12.5　恒定应力加速寿命试验中参数的极大似然估计(Ⅰ)——威布尔分布情况 ………………………………44

§12.6　恒定应力加速寿命试验中参数的极大似然估计(Ⅱ)——对数正态分布情况 ……………………………55

附录　极大似然估计方法中的数值计算问题 ……………………67

附表 ……………………………………………………………………82

参考资料 ………………………………………………………………94

第十三章　关于指数分布的某些统计推断 …………………………96

§13.1　前言 …………………………………………………………96

§13.2　关于单参数指数分布的点估计 ………………………………98

§13.3　关于单参数指数分布的区间估计 ……………………………125

§13.4　单参数指数分布的可靠度 $R(t_0)$ 的最小方差无偏估计量 ……162

§13.5　两参数指数分布的点估计 ……………………………………163

§13.6　两参数指数分布的区间估计 …………………………………173

§13.7　对 $\theta=\theta_0$(或 $\lambda=\lambda_0$) 的假设检验(单参数指数分布的情形) ……………………………179

§13.8　对 $\theta_1=\theta_2$(或 $\lambda_1=\lambda_2$)的假设检验(单参数指数分布的情形) ……………………………245

§13.9　对 $\theta_1=\theta_2=\cdots=\theta_K$ 的假设检验(单参数指数分布的情形)……247

§13.10　对是否符合指数分布的检验 ………………………………251

附录 ……………………………………………………………………257

附录13-1　尼曼-皮尔逊(Neyman-Pearson)引理 ……………………257

附录13-2　关于检验简单的原假设 $H_0$ 和简单的备择假设 $H_1$ 的序贯概率比检验 ……………………258

附表和附图 ……………………………………………………………260

参考资料 ……301
第十四章　假设检验 ……305
§14.1　引言 ……305
§14.2　分布的检验 ……308
§14.3　用似然比检验区分两个具有未知位置参数和尺度参数的分布 ……324
§14.4　分布函数的偏度和峰度检验 ……333
§14.5　参数的假设检验 ……339
§14.6　数据是否来自同一分布的检验——异常数据检验 ……360
附表 ……384
参考资料 ……394
第十五章　可靠性抽样验证试验 ……397
§15.1　引言 ……397
§15.2　指数分布的失效率试验 ……398
§15.3　失效率、置信度、允许失效数和总试验时间的关系 ……408
§15.4　威布尔分布的抽样验证试验 ……411
参考资料 ……441
第十六章　可靠性筛选 ……442
§16.1　引言 ……442
§16.2　筛选时间的确定 ……445
§16.3　应力强度模型 ……454
§16.4　线性判别筛选 ……465
附录　0，1回归分析与线性判别分析的等价性 ……483
参考资料 ……486
第十七章　加速寿命方程的物理分析 ……487
§17.1　引言 ……487
§17.2　阿伦尼斯方程 ……487
§17.3　简单电真空器件失效机理的分析 ……501
§17.4　半导体器件金属化部分失效机理与阿伦尼斯方程的关系 ……513
附录 ……525
附录　17-1　分子的碰撞频率 ……525
附录　17-2　计算激活能 $\Delta E$ 及 $K$ 值实例 ……527
附录　17-3　绝对反应速度理论 ……529
参考资料 ……532

# 第十二章　极大似然估计

这一章介绍极大似然估计方法及其在寿命试验和加速寿命试验中的应用。其中讨论的寿命分布有：两参数和三参数的威布尔分布，两参数和三参数的对数正态分布；考虑的寿命试验数据类型有：完全寿命试验中的完全子样，定时、定数截尾试验中的截尾子样，定时间隔测试截尾试验中的截尾子样；包括的加速寿命方程有：以温度为应力的阿伦尼斯方程，以电压为应力的逆幂律方程，以温度和电压为双应力的加速寿命方程；附录中介绍了两种求解似然方程的数值计算方法：拟牛顿迭代法——变尺度法和网格法。

## § 12.1　极大似然估计

极大似然估计（Maximum Likelihood Estimation），简称 MLE，是一个重要的估计方法，因为它给出的估计量有不少优良性质。

设母体指标 $X$ 具有密度函数 $f(x;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)$（或概率函数 $p_k(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)$），其中 $\theta_i(i=1,2,\cdots,m)$ 是有待估计的未知参数，我们要用取自此母体的、容量为 $n$ 的子样 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 来估计这些未知参数。

设子样的一个观察值为 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，则子样落在这个观察值领域内的概率为

$$P=\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)dx_i$$

在取定子样观察值和 $dx_i$ 的情况下，概率 $P$ 将随 $\theta_i$ 的取值而变化，所以是 $\theta_i(i=1,2,\cdots,m)$ 的函数。极大似然估计方法根据下述原则来决定参数 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m$ 的取值，即取估计量 $\hat{\theta}_1$，$\hat{\theta}_2,\cdots,\hat{\theta}_m$ 使得当参数取这一估计值时，子样落在观察值 $(x_1$，

$x_2, \cdots, x_m$）的领域里的概率 $P=\prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m)$ $dx_i$ 达到最大。即对固定的子样观察值($x_1, x_2, \cdots, x_m$）和 $dx_i$ ($i=1, 2, \cdots, n$)，选取 $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \cdots, \hat{\theta}_m$ 使 $P$ 达到最大，亦即解方程

$$\prod_{i=1}^{n} f(x_i; \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \cdots, \hat{\theta}_m)$$

$$=\max_{\theta} \prod_{i=1}^{n} f(x_i; \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m) \tag{12-1}$$

极大似然估计的直观意义是明确的，因为子样来自母体，因而子样在一定程度上反映了母体的特征。我们在一次试验中既然得到了子样的观察值（$x_1, x_2, \cdots, x_m$），那么我们总认为子样落在该观察值（$x_1, x_2, \cdots, x_m$）的领域里，这一事件是较易发生的，即它发生的可能性很大。所以就应选取使这一事件发生的概率达到最大的参数值作为未知参数真值的估计。根据事件出现的概率大小而作出决策的事例在我们日常工作、生活中也是常有的事。例如，某一工厂有甲、乙两车间生产同一种产品，甲车间生产质量好，次品率低，乙车间生产质量较差，次品率高。如我们从这两个车间的总产品中抽取一个样品，而且是次品，我们有理由作这样的判断：此样品是乙车间生产的，因为这件事情乙车间发生的可能性大，这就是我们根据事件出现的概率大小而作出的一个决策。极大似然估计的基本思想就是根据使子样观察值出现的概率最大的原则，来求母体中未知参数的估计量。

为了解方程（12-1）的方便，记

$$L(\boldsymbol{x}; \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i; \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m) \tag{12-2}$$

并称其为参数 $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m$ 的似然函数，其中 $\boldsymbol{x}'=(x_1, x_2, \cdots, x_m)$。由于 $\ln x$ 是 $x$ 的单调函数，所以通常还引入

$$\ln L(\boldsymbol{x};\ \theta_1,\ \theta_2,\ \cdots,\ \theta_m)=\sum_{i=1}^{n}\ln f(x_i;\ \theta_1,\ \theta_2,\cdots,\theta_m)\quad(12\text{-}3)$$

要使 $L(\boldsymbol{x};\ \theta_1,\ \theta_2,\ \cdots,\ \theta_m)$ 达到最大，等价于使 $\ln L(\boldsymbol{x};\ \theta_1,\ \theta_2,\ \cdots,\ \theta_m)$ 达到最大，所以 $\ln L(\boldsymbol{x};\ \theta_1,\ \theta_2,\ \cdots,\ \theta_m)$ 也可称为似然函数。

如果 $f(x;\ \theta_1,\ \theta_2,\ \cdots,\ \theta_m)$ 关于 $\theta_j(j=1,\ 2,\ \cdots,m)$ 可微，则由函数极值的判别法可知，满足方程（12-1）的解 $\hat{\theta}_1$, $\hat{\theta}_2$, $\cdots$, $\hat{\theta}_m$ 可由方程组

$$\left.\frac{\partial\ln L(\boldsymbol{x};\ \theta_1,\ \theta_2,\ \cdots,\ \theta_m)}{\partial\theta_j}\right|_{\theta_j=\hat{\theta}_j}=0\quad(j=1,\ 2,\ \cdots m)$$

(12-4)

求出，这些方程组称为似然方程组。

用似然方程组（12-4）或由方程（12-1）得到的 $\hat{\theta}_1$, $\hat{\theta}_2$, $\cdots$, $\hat{\theta}_m$ 称为未知参数 $\theta_1$, $\theta_2$, $\cdots$, $\theta_m$ 的最大似然估计量。且有下列重要性质。

1．如果 $\theta_j$ 的有效估计 $\hat{\theta}_j$ 存在（当 $\hat{\theta}_j$ 是 $\theta_j$ 的无偏估计时，有效估计就是最小方差估计。详细定义可参阅参考资料〔1〕、〔2〕)，似然方程组（12-4）将有一组唯一解，且就是 $\hat{\theta}_j(j=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$。

2．如果 $\hat{\theta}_j$ 是 $\theta_j$ 的 MLE，$\mu(\theta_j)$ 是 $\theta_j$ 的函数，具有单值反函数，则 $\mu(\hat{\theta}_j)$ 是 $\mu(\theta_j)$ 的极大似然估计量（$j=1,\ 2,\ \cdots,\ m$）。此即为极大似然估计的不变性。

3．在一定条件下，当子样容量 $n\to\infty$ 时，$\hat{\theta}_1$, $\hat{\theta}_2$, $\cdots$, $\hat{\theta}_m$ 的联合分布是多维正态分布，其均值分别为 $\theta_1$, $\theta_2$, $\cdots$, $\theta_m$，方差和协方差矩阵为 $\dfrac{\boldsymbol{V}}{n}$，$\boldsymbol{V}$ 是信息矩阵

$$\boldsymbol{I}=\begin{bmatrix}I_{11} & I_{12}\cdots I_{1m}\\ I_{21} & I_{22}\cdots I_{2m}\\ \vdots & \vdots\\ I_{m1} & I_{m2}\cdots I_{mm}\end{bmatrix}\quad(12\text{-}5)$$

的逆矩阵，信息矩阵 $\boldsymbol{I}$ 中元素为

$$I_{ij}=-E\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\ln f(x;\ \theta_1,\ \theta_2,\ \cdots,\ \theta_m)\right]$$

$$(i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ m) \tag{12-6}$$

可见在一定条件下，极大似然估计量是渐近无偏，渐近正态，渐近有效估计量。

以上性质的详细条件和证明请参阅参考资料〔1〕、〔2〕。

**例12.1** 设 $(X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n)$ 是取自正态母体 $N(\mu,\ \sigma^2)$ 的子样，即其分布密度为

$$f(X;\ \mu,\ \sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{(X-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

其中 $\mu$ 和 $\sigma^2$ 是未知参数，$-\infty<\mu<\infty$，$\sigma^2>0$。求 $\mu$ 和 $\sigma^2$ 的极大似然估计。

极大似然函数为

$$L(\boldsymbol{X};\ \mu,\ \sigma^2)=\frac{1}{(\sqrt{2\pi}\,\sigma)^n}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}$$

似然方程为

$$\frac{\partial\ln L}{\partial\mu}=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)=0$$

$$\frac{\partial\ln L}{\partial\sigma^2}=\frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2-\frac{n}{2\sigma^2}=0$$

解此方程组，可得 $\mu$ 和 $\sigma^2$ 的极大似然估计量

$$\hat{\mu}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=\overline{X}$$

$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2=s_n^2$$

因为

$$E(\hat{\mu})=E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=\mu$$

$$E(\hat{\sigma}^2)=E\left[\frac{1}{n}\Sigma(X_i-\overline{X})^2\right]=E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\overline{X}^2\right]$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2)-E(\overline{X}^2)=(\mu^2+\sigma^2)$$

$$-\left(\mu^2+\frac{\sigma^2}{n}\right)=\frac{n-1}{n}\sigma^2$$

可见 $\hat{\mu}$ 是 $\mu$ 的无偏估计量，而 $s_n^2$ 不是 $\sigma^2$ 的无偏估计量，但这个偏倚是容易消去的，实际上

$$s_n^{*2}=\frac{n}{n-1}s_n^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$$

就是 $\sigma^2$ 的无偏估计量。应当指出，不少参数的极大似然估计是有偏的估计量，但是渐近无偏。不难看到，当 $n\to\infty$ 时，$s_n^2$ 就为无偏了。

利用极大似然估计的渐近性质可以获得下面结果：

$$\ln f(X;\ \mu,\ \sigma^2)=-\frac{1}{2}\ln 2\pi-\frac{1}{2}\ln\sigma^2-\frac{1}{2\sigma^2}(X-\mu)^2$$

$$I_{11}=-E\left(\frac{\partial^2\ln f}{\partial\mu^2}\right)=E\left(\frac{1}{\sigma^2}\right)=\frac{1}{\sigma^2}$$

$$I_{12}=I_{21}=-E\left(\frac{\partial^2\ln f}{\partial\mu\partial\sigma^2}\right)=E\left(\frac{X-\mu}{\sigma^4}\right)=0$$

$$I_{22}=-E\left[\frac{\partial\ln^2 f}{\partial(\sigma^2)^2}\right]=-E\left[\frac{1}{2\sigma^4}-\frac{(X-\mu)^2}{\sigma^6}\right]=\frac{1}{2\sigma^4}$$

所以信息矩阵 $\boldsymbol{I}$ 为

$$\boldsymbol{I}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sigma^2} & 0\\ 0 & \frac{1}{2\sigma^4}\end{bmatrix}$$

而 $\boldsymbol{I}$ 的逆矩阵为

$$I^{-1}=\begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & 2\sigma^4 \end{bmatrix}$$

估计量 $\hat{\mu}$ 和 $\hat{\sigma}^2$ 的渐近方差和协方差矩阵是 $\frac{V}{n}$，$V=I^{-1}$，所以有

$$V_{ar}(\hat{\mu})=\frac{\sigma^2}{n}$$

$$V_{ar}(\hat{\sigma}^2)=\frac{2\sigma^4}{n}$$

$$C_{ov}(\hat{\mu},\ \hat{\sigma}^2)=0$$

可见 $\mu$ 和 $\sigma^2$ 的 MLE $\hat{\mu}=\overline{X}$ 和 $\hat{\sigma}^2=s_n^2$ 是相互独立的随机变量。

对于正态母体来说，$\mu$ 的 MLE $\hat{\mu}=\overline{X}$ 是无偏有效估计量，且 $\hat{\mu}$ 服从正态分布 $N\left(\mu,\ \frac{\sigma^2}{n}\right)$。$\sigma^2$ 的 MLE $\hat{\sigma}^2=s_n^2$ 是渐近无偏、有效估计量，而 $s_n^{*2}$ 是无偏、渐近有效估计量，$s_n^{*2}$ 的精确分布是自由度为 $n-1$ 的 $\chi^2(n-1)$ 分布，而渐近分布是正态分布 $N\left(\sigma^2,\ \frac{2\sigma^4}{n-1}\right)$。

## §12.2 完全寿命试验中参数的极大似然估计

在一批产品中随机地抽取 $n$ 个样品进行寿命试验，试验到全部样品失效，得到 $n$ 个失效时间为

$$t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_n,$$

用此完全子样数据估计寿命分布中未知参数。

行之有效的、常用的寿命分布为威布尔分布和对数正态分布。威布尔分布的分布函数 $F(t)$ 和分布密度函数 $f(t)$ 分别为

$$F(t)=\begin{cases} 1-\exp\left[-\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^m\right] & (t\geqslant\gamma) \\ 0 & (t<\gamma) \end{cases} \tag{12-7}$$

$$f(t)=\begin{cases} \frac{m}{\eta}\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^{m-1}\exp\left[-\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^m\right] & (t\geqslant\gamma) \\ 0 & (t<\gamma) \end{cases} \tag{12-8}$$

其中$m>0$是形状参数，$\eta>0$为尺度参数，$\gamma\geqslant 0$为位置参数，当$\gamma\neq 0$，为三参数的威布尔分布，$\gamma=0$时，为两参数的威布尔分布。

对数正态分布的分布函数$F(t)$和分布密度函数$f(t)$分别为

$$F(t)=\begin{cases}\displaystyle\int_{\gamma}^{t}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma(y-\gamma)}\exp\left\{\frac{-[\ln(y-\gamma)-\mu]^2}{2\sigma^2}\right\}dy & (t\geqslant\gamma)\\ 0 & (t<\gamma)\end{cases}\tag{12-9}$$

$$f(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma(t-\gamma)}\exp\left\{-\dfrac{[\ln(t-\gamma)-\mu]^2}{2\sigma^2}\right\} & (t\geqslant\gamma)\\ 0 & (t<\gamma)\end{cases}\tag{12-10}$$

其中$\sigma>0$是形状参数，$\mu$为位置参数，$\gamma\geqslant 0$是保证寿命参数，当$\gamma\neq 0$时，为三参数对数正态分布，$\gamma=0$时，为两参数对数正态分布。

### 12.2.1 两参数威布尔分布中$m$、$\eta$及可靠度$R(t)$的极大似然估计和区间估计

对于容量为$n$的全子样数据$t_1$，$t_2$，…，$t_n$，参数$m$和$\eta$的似然函数为

$$L(t;\ m,\ \eta)=\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{m}{\eta}\right)\left(\frac{t_i}{\eta}\right)^{m-1}\exp\left\{-\left(\frac{t_i}{\eta}\right)^{m}\right\}\tag{12-11}$$

似然方程为

$$\frac{\partial\ln L}{\partial m}=\frac{n}{m}+\sum_{i=1}^{n}\ln\frac{t_i}{\eta}-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{t_i}{\eta}\right)^{m}\ln\frac{t_i}{\eta}=0$$

$$\frac{\partial\ln L}{\partial\eta}=-\frac{n}{\eta}-\frac{n(m-1)}{\eta}-\frac{m}{\eta}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{t_i}{\eta}\right)^{m}=0$$

经整理化简后得

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} t_i^m \ln t_i}{\sum_{i=1}^{m} t_i^m} - \frac{1}{m} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln t_i$$

$$\eta^m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} t_i^m \qquad (12\text{-}12)$$

由（12-12）式的第一式可以解得$m$的极大似然估计$\hat{m}$，再由第二式得$\eta$的极大似然估计$\hat{\eta}$。第一式是一个超越方程，但只有一个变量，一般可以用二分法[3]迭代求解。

如果$\hat{m}$和$\hat{\eta}$是$m$和$\eta$的MLE，托曼（Thoman）等证明了$\frac{\hat{m}}{m}$和$\hat{m}\ln\frac{\hat{\eta}}{\eta}$的分布不依赖于$m$和$\eta$[4]，它们分布的分位数已用Monte-Carlo方法计算出来(见附表12-1)，利用表中数值可以得到$m$和$\eta$的置信度为$1-\alpha$的置信区间：

$$P\left(Z_{\alpha/2} < \frac{\hat{m}}{m} < Z_{1-\alpha/2}\right) = P\left(\frac{\hat{m}}{Z_{1-\alpha/2}} < m < \frac{\hat{m}}{Z_{\alpha/2}}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(V_{\alpha/2} < \hat{m}\ln\frac{\hat{\eta}}{\eta} < V_{1-\alpha/2}\right) = P\left(\hat{\eta}e^{-\frac{V_{1-\alpha/2}}{\hat{m}}} < \eta < \hat{\eta}e^{-\frac{V_{\alpha/2}}{\hat{m}}}\right)$$

$$= 1-\alpha \qquad (12\text{-}13)$$

其中$Z_{\alpha/2}$，$Z_{1-\alpha/2}$，$V_{\alpha/2}$，$V_{1-\alpha/2}$，由附表12-1给出，所以$m$和$\eta$的置信度为$1-\alpha$的置信上、下限分别为

$$m_U = \frac{\hat{m}}{Z_{\alpha/2}}, \qquad m_L = \frac{\hat{m}}{Z_{1-\alpha/2}}$$

$$\eta_U = \hat{\eta}e^{-\frac{V_{\alpha/2}}{\hat{m}}}, \quad \eta_L = \hat{\eta}e^{-\frac{V_{1-\alpha/2}}{\hat{m}}}$$

由于$m$的MLE $\hat{m}$是有偏的，附表12-1还列出了$\hat{m}$的无偏因子$B(n)$使

$$E(B(n)\hat{m})=m$$

所以$B(n)\hat{m}$是$m$的无偏估计。

对于两参数威布尔分布，时刻$t$的可靠度为

$$R(t)=\exp\left[-\left(\frac{t}{\eta}\right)^m\right]$$

其极大似然估计为

$$\hat{R}(t)=\exp\left[-\left(\frac{t}{\hat{\eta}}\right)^{\hat{m}}\right] \tag{12-14}$$

则有

$$\ln[-\ln\hat{R}(t)]=\hat{m}\ln\left(\frac{t}{\hat{\eta}}\right)=\frac{\hat{m}}{m}\ln\left[\left(\frac{t}{\eta}\right)^m\left(\frac{\hat{\eta}}{\eta}\right)^{-m}\right]$$

$$=\frac{\hat{m}}{m}\ln[-\ln R(t)]-\hat{m}\ln\frac{\hat{\eta}}{\eta}$$

而$\frac{\hat{m}}{m}$和$\hat{m}\ln\frac{\hat{\eta}}{\eta}$的分布是不依赖于$m$和$\eta$的，所以$\hat{R}(t)$的分布仅仅通过$R(t)$依赖于$m$、$\eta$和$t$。这个结果有助于研究$\hat{R}(t)$的分布，亦有可能在$m$、$\eta$未知情况下，在估计量$\hat{R}(t)$基础上给出$R(t)$的置信区间。托曼等在参考资料〔5〕中对于$\hat{R}(t)=$ 0.50 (0.02) 0.98，$n=8$，10，12，15,18,20，25，30，40，50，75,100,置信度$1-\alpha=0.75$，0.90，0.95,0.98用Monte-Carlo方法计算了$R(t)$的下置信限$R_L(t)$（见附表12-2),对于$\hat{R}(t)$的估计值，直接可从附表12-2中读出$R(t)$的下置信限。

**例12.2** 对23个轴承进行疲劳试验，得数据

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 17.88 | 28.92 | 33.00 | 41.52 | 42.12 | 45.60 |
| 48.48 | 51.84 | 51.96 | 54.12 | 55.56 | 67.80 |
| 68.64 | 68.64 | 68.88 | 84.12 | 93.12 | 98.64 |
| 105.12 | 105.84 | 127.92 | 128.04 | 173.40 | |

用（12-12）式可求得$m$和$\eta$的MLE的估计值为

$$\hat{m}=2.102,\quad \hat{\eta}=81.99$$

对于 $t=40$，用（12-14）式计算得可靠度估计值为

$$\hat{R}(t)=0.802$$

如给定置信度为 $1-\alpha=90\%$，由附表12-1可得

$$Z_{0.05}=0.801,\ Z_{0.95}=1.410,\ V_{0.05}=-0.394,$$
$$V_{0.95}=0.388，则$$

$$m_V=\frac{2.102}{0.801}=2.6242$$

$$m_L=\frac{2.102}{1.410}=1.4909$$

$\eta$ 的置信限为

$$\eta_V=81.99\cdot e^{\frac{0.394}{2.102}}=98.42$$

$$\eta_L=81.99\cdot e^{-\frac{0.388}{2.102}}=68.17$$

由附表12-2可得 $R(t)$的90%下置信限为

$$R_L(t)=0.693$$

此数值是表中数值线性插值结果。

利用 $\hat{R}(t)$的经验分布，还可以研究 $R(t)$ 的 MLE $\hat{R}(t)$ 的性质。托曼等计算了 $R(t)$ 的点估计 $\hat{R}(t)$ 的偏倚 $E[\hat{R}(t)-R(t)]$，列表如表12-1。

另外计算了 $\hat{R}(t)$的方差，并与 $R(t)$的正则无偏估计的克拉美-拉奥（Cramer-Rao）下界 CRLB[2]、[5]进行比较，结果列表如表12-2。

可见 $\hat{R}(t)$的偏倚是很小的，对于 $R(t)=0.75$以上的可靠度，$\hat{R}(t)$ 的方差已几乎达到 CRLB，所以 $R(t)$ 的 MLE $\hat{R}(t)$ 是很好的估计量。

表12-1　估计量 $\hat{R}(t)$ 的偏倚 $E[\hat{R}(t)-R(t)]$

| $R(t)$ | $n$ | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 8 | 10 | 12 | 15 | 20 | 25 | 30 | 40 | 50 | 75 | 100 |
| 0.50 | 0.005 | 0.003 | 0.003 | 0.002 | 0.002 | 0.002 | 0.001 | 0.001 | 0.001 | 0.001 | 0.001 |
| 0.60 | 0.012 | 0.009 | 0.008 | 0.006 | 0.005 | 0.004 | 0.003 | 0.002 | 0.002 | 0.002 | 0.001 |
| 0.70 | 0.015 | 0.011 | 0.010 | 0.008 | 0.006 | 0.005 | 0.004 | 0.003 | 0.003 | 0.002 | 0.001 |
| 0.75 | 0.014 | 0.011 | 0.010 | 0.008 | 0.006 | 0.005 | 0.004 | 0.003 | 0.002 | 0.002 | 0.001 |
| 0.80 | 0.013 | 0.010 | 0.008 | 0.006 | 0.005 | 0.004 | 0.003 | 0.002 | 0.002 | 0.002 | 0.001 |
| 0.85 | 0.010 | 0.007 | 0.006 | 0.005 | 0.004 | 0.003 | 0.003 | 0.002 | 0.002 | 0.001 | 0.001 |
| 0.90 | 0.006 | 0.004 | 0.004 | 0.002 | 0.002 | 0.002 | 0.001 | 0.001 | 0.001 | 0.001 | 0.000 |
| 0.925 | 0.003 | 0.002 | 0.002 | 0.001 | 0.001 | 0.001 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 0.95 | 0.001 | 0.006 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 0.98 | −0.002 | −0.002 | −0.001 | −0.001 | −0.001 | −0.001 | −0.001 | −0.001 | −0.000 | −0.000 | −0.000 |

表12-2 $\hat{R}(t)$的方差和CRLB之比

| $R(t)$ \ $n$ | 10 | 12 | 15 | 20 | 25 | 30 | 40 | 50 | 70 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.50 | 1.21 | 1.19 | 1.13 | 1.09 | 1.08 | 1.07 | 1.05 | 1.04 | 1.03 |
| 0.75 | 1.04 | 1.03 | 1.02 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 |
| 0.95 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 |

当$n$很大时，$\hat{R}(t)$是渐近正态分布的，其均值为$R(t)$和方差为CRLB。如果将该方差公式中的$R(t)$，以$\hat{R}(t)$代替，则得到了方差的估计量，即为

$$V[\hat{R}(t)]=\hat{R}^2(\ln\hat{R})^2\{[1.109-0.514\ln(-\ln\hat{R})]$$
$$+0.608[\ln(-\ln\hat{R})]^2\}/n$$

从而置信度为$1-\alpha$时，$R(t)$的渐近置信下限为

$$R_L(t)=\hat{R}-u_\alpha[V(\hat{R})]^{1/2} \qquad (12\text{-}15)$$

其中$u_\alpha$是正态分布的$\alpha$分位数，可查正态分布表。$R_L(t)$称为$R(t)$的精确下置信限$L$的直接近似值，如记

$$L_1=R_L(t)$$

对于$n=100$，计算得$L_1-L$之差小于0.005。为了进一步减少误差$L_1-L$，可考虑用重复程序，此程序是用$V(L_1)$代替（12-15）式中$V(\hat{R})$而得到$L_2$，同样用$V(L_2)$代替同式中$V(\hat{R})$又可得到$L_3$，如此继续下去，可得一组序列

$$L_i=\hat{R}-u_\alpha[V(L_{i-1})]^{1/2} \qquad (i=2,\ 3,\ \cdots)$$

重复4、5次后，$L_i-L$可小于0.00005，这样$L_i$可和附表12-2中的$L$值很好拟合。对于$n\geqslant40$，重复程序所得近似值$L_i$和附表12-2中$L$值之差最大为0.005；对于$n=100$，最大差是0.02。所以用重复程序不但可以求大子样下$R(t)$的近似下置信限，亦可用来求子样容量在40以上的$R(t)$的下置信限，当然计算稍为麻烦一些。