

城市控制测量平差法

(上册)

會广樑 沈祖初 著

黃世綸 校訂

建筑工程出版社

4

8

廣州府志卷之四

職官

廣州府志卷之四

職官

廣州府志卷之四

城市控制測量平差法

(上 册)

會廣樑 沈祖初 著

黃世綸 校訂

建筑工程出版社出版

內 容 提 要

本书主要内容是叙述城市控制测量平差计算所依据的原理及常用的方法。所有例题及计算表式大部分是目前我国城市测量工作实践中采用的。

为便于读者的需要，本书分上下两册出版，上册包括1~6章，下册包括7~11章；上册为理论部分，下册为实用部分。

本书可供城市测量工作者的参考，亦可作为城市建设中等技术学校测量专业教科书。

本书由曾广樑、沈祖祜两同志编写，黄世綸同志校订，蔡儒祖、曾紹萱两位同志也参加了校订工作。

城市控制测量平差法

(上册)

曾广樑 沈祖祜 著

黄世綸 校订

1959年2月第1版

1959年2月第1次印刷

2,860册

850×1168· $1/32$ ·150千字·印张 $5\frac{3}{4}$ ·插页1·定价(10)1.00元

建筑工程出版社印刷厂印刷 · 新华书店发行 · 书号: 1192

建筑工程出版社出版(北京市西郊百万庄)

(北京市书刊出版业营业许可证出字第052号)

目 录

序 言	5
第一章 观测误差	8
§ 1 观测及其分类	8
§ 2 观测误差及其分类	9
§ 3 偶然误差之特性	10
§ 4 以算术平均值为最或是值来计算最或是误差	12
§ 5 以算术平均值为最或是值之力学说明	16
第二章 观测误差的衡量	17
§ 6 用真误差来计算观测误差的衡量	17
§ 7 平均误差与中误差之比较	20
§ 8 相对误差	21
§ 9 最大误差	22
§ 10 用最或是误差来计算中误差	23
§ 11 误差传播定律	27
§ 12 误差传播之例	31
§ 13 算术平均值之中误差	38
§ 14 权的意义、权与观测次数之关系	40
§ 15 权与中误差之关系、权之决定	44
§ 16 以广义算术平均值为最或是值来计算最或是误差	49
§ 17 以广义算术平均值为最或是值的力学说明	52
§ 18 用不等权观测的最或是误差来计算观测中误差	54
§ 19 广义算术平均值之中误差	55
§ 20 用同类量的双次观测值差来计算中误差	57
§ 21 偶然误差与系统误差合并之影响	62
§ 22 基线长度中误差之计算	63
第三章 测量平差之任务及施行平差计算的基本原理	68
§ 23 测量平差的任务	68

城市控制測量平差法

(上 册)

會廣樑 沈祖初 著

黃世綸 校訂

建筑工程出版社出版

內 容 提 要

本书主要内容是叙述城市控制测量平差计算所依据的原理及常用的方法。所有例题及计算表式大部分是目前我国城市测量工作实践中采用的。

为便于读者的需要，本书分上下两册出版，上册包括1~6章，下册包括7~11章；上册为理论部分，下册为实用部分。

本书可供城市测量工作者的参考，亦可作为城市建设中等技术学校测量专业教科书。

本书由曾广樑、沈祖祜两同志编写，黄世纶同志校订，蔡儒祖、曾绍萱两位同志也参加了校订工作。

城市控制测量平差法

(上册)

曾广樑 沈祖祜 著

黄世纶 校订

1959年2月第1版

1959年2月第1次印刷

2,860册

850×1168· $1/32$ ·150千字·印张 $5\frac{3}{4}$ ·插页1·定价(10)1.00元

建筑工程出版社印刷厂印刷

·新华书店发行

·书号: 1192

建筑工程出版社出版(北京市西郊百万庄)

(北京市书刊出版业营业许可证出字第052号)

目 录

序 言	5
第一章 观测误差	8
§ 1 观测及其分类	8
§ 2 观测误差及其分类	9
§ 3 偶然误差之特性	10
§ 4 以算术平均值为最或是值来计算最或是误差	12
§ 5 以算术平均值为最或是值之力学说明	16
第二章 观测误差的衡量	17
§ 6 用真误差来计算观测误差的衡量	17
§ 7 平均误差与中误差之比较	20
§ 8 相对误差	21
§ 9 最大误差	22
§ 10 用最或是误差来计算中误差	23
§ 11 误差传播定律	27
§ 12 误差传播之例	31
§ 13 算术平均值之中误差	38
§ 14 权的意义、权与观测次数之关系	40
§ 15 权与中误差之关系、权之决定	44
§ 16 以广义算术平均值为最或是值来计算最或是误差	49
§ 17 以广义算术平均值为最或是值的力学说明	52
§ 18 用不等权观测的最或是误差来计算观测中误差	54
§ 19 广义算术平均值之中误差	55
§ 20 用同类量的双次观测值差来计算中误差	57
§ 21 偶然误差与系统误差合并之影响	62
§ 22 基线长度中误差之计算	63
第三章 测量平差之任务及施行平差计算的基本原理	68
§ 23 测量平差的任务	68

§ 24	測量平差之分類	69
§ 25	施行平差計算之基本原理	70
§ 26	最小二乘法之力学說明	72
第四章	直接觀測平差	73
§ 27	等精度直接觀測平差	73
§ 28	不等精度直接觀測平差	76
第五章	間接觀測平差	84
§ 29	間接觀測平差之原理	84
§ 30	導入未知數之近似值	87
§ 31	權單位中誤差和未知數中誤差	91
§ 32	法方程式係數之計算	97
§ 33	法方程式之解算	98
§ 34	權係數方程式之解算	114
§ 35	間接觀測平差实例	119
§ 36	非一次函數之間接觀測平差	130
§ 37	誤差方程式內消去一個未知數及約化誤差方程式	134
第六章	條件觀測平差	140
§ 38	條件觀測平差之原理	140
§ 39	權單位中誤差、平差值中誤差和平差值函數中誤差	146
§ 40	聯係數法方程式和轉換方程式係數之計算	154
§ 41	聯係數法方程式及轉換方程式之解算	158
§ 42	條件觀測平差实例	159
§ 43	非一次函數式之條件觀測平差	171
§ 44	分組平差法	175
§ 45	間接觀測平差與條件觀測平差之相互關係以及平差方法 之選擇	179

序 言

旧中国的測量事业是非常落后的，城市控制測量的技术水平在解放初期同其他測量工程一样是很低的，能够独立掌握和从事于測量平差作业的人员为数不多；为了提高这方面的理論和技术水平，我們从1951年起就曾經几次編写过城市控制測量平差方面的讲义，曾为上海、成都等市的城市測量技术人员进行讲解；但当时仅为了解决工作上所急需应用的問題，因此缺乏系統与完整的材料。1957年春，前城市建設部測量公司在南京举办城市控制測量短期訓練班，由全国各省市及自治区抽調城市測量技术人员进行学习，我們写了一本比較完整和系統的讲义“实用城市控制測量平差法”，供当时教学之用。这次学习所获得的效果尚良好，参加学习的人员在短短三个月時間內，基本上都掌握了城市控制測量平差工作；但由于学习時間短促，和限于当时学员的程度不同，因此理論方面还不够全面与系統。訓練班结束后，各省市有关单位急需該項讲义，作为业务参考及学习之用，于是于1957年秋稍加修訂后，由前城市建設部測量公司重新用油印翻印后分送給各省市；因鉴于这个油印本系机关內部刊物，供应范围受到限制，而且国内还没有有关这方面的参考书出版，因此我們又将它补充和改写一次，务使其在理論上能够更系統与完整一些。

本书分上下两册出版，上册共分六章，其内容为測量平差所依据的原理——最小二乘法理論；下册共分五章，内容为实用部分，即測站平差，城市三角网平差、典型图形平差及多边形平差。一～四章由曾廣樑編写，五～七章由曾廣樑、沈祖祜合写；八～十一章由沈祖祜編写。

为了适应于实用的原則，以及考虑到本书主要讀者是目前从

事城市测量的技术人員及中等技术学校的测量专业学生，他們只具备中等数学的程度，我們尽量避免用高等数学来推导，因此略去了一部分公式的推导；例如采用偶然观测誤差的或是率理論来导出最小二乘法的原理 $[pvv] = \text{最小值}$ 、誤差橢圓公式只写出了它的应用方法。但对于初学测量平差的某些不易理解的部份，采用了浅易方法加以說明，例如用力学的力矩定律來說明权的意义及广义算术平均值公式，又如推导按高斯約化法解法方程式及权系数方程式所用的表格采用了更簡易的方法加以証明，这些对于初学者都能接受的。下册的城市控制测量实用部分，为了使理論与实践能进一步联系起来，因此我們所列举的例子是比較完整而全面，这些例子都是从我国目前城市测量的实例中摘录下来的。

編写的过程中我們参閱了下列书籍：

- [1] 測量誤差理論基础，H.C. 彼得罗夫著
高教出版社 1954年中譯本
- [2] 最小二乘法 П.И. 希洛夫著
地質出版社 1955年中譯本
- [3] 城市建設測量学第一册 H.H. 斯杰潘諾夫主編
城市建設出版社 1957年中譯本
- [4] 大地測量学上卷第三分册 Ф.Н. 克拉索夫斯基等著
測繪出版社 1956年中譯本
- [5] 測量平差法 叶雪安著
龍門书局 1950年初版
- [6] 測量平差法 陈永齡等著 商务印书館 1956年修訂本
- [7] 大地測量学上卷第一分册 陈永齡著
測繪出版社 1957年版
- [8] P. Werkmeister: Einführung in die
Ausgleichung 1934年版
- [9] Jordan-Eggert: Handbuch der Vermessungskunde
BdI. 1920版

- [10] 大地測量控制网的建立原理 Б.Н.拉賓諾維奇著
高教出版社 1957年中譯本
- [11] 大地測量實習(計算部份) Б.Н.拉賓諾維奇著
測繪出版社 1956年中譯本
- [12] 多邊形平差 В.В.波波夫著
人民交通出版社 1955年中譯本
- [13] 測量學下卷第一分冊 А.С.契巴塔廖夫著
高教出版社 1957年中譯本
- [14] Городская Полигонометрия Руководство по
Вычислительным Работам 1952年版
- [15] 大比例尺測量規範 Н.Н.列別杰夫著
人民交通出版社 1954年中譯本
- [16] 實用二三四等三角測量計算手冊 И.М.格拉西莫夫等
著 測繪出版社 1957年中譯本

由于我們學識淺薄，而且是第一次從事編寫，因此錯誤在所難免，惠請國內測量專家和讀者提出批評和指正。

本書承北京市規劃局總工程師黃世綸及該局地形地質測量處蔡儒祖及曾紹萱兩位工程師擔任校訂，并增加了一些資料作為實例，因而提高了本書的實用價值，謹致以親切的感謝！

曾廣樑 沈祖初 1958年9月

第一章 观测误差

§1 观测及其分类

欲确定一个量的大小，必须将这个量进行测量，在测量学内称为观测。根据确定未知量方法的不同，在平差内将观测区分为三种。观测一个量，将该量与采取作为单位的量相比较，直接就可以得到该量的大小，这样的观测称为直接观测。例如，用卷尺丈量一段距离的长度，这就是直接观测。如果所求的量不能直接量得，而以其它的直接观测的量为基础，再用计算方法来确定的，这样的观测称为间接观测。例如，直接测得一个三角形的底边的长度和它的高，然后经过计算来确定三角形的面积，这就是间接观测。有时当我们已经知道了多个观测的量，必须严格地满足于一定的有理论根据的条件，那末在这种场合下的观测，就称为条件观测。例如，已经知道平面三角形的三个内角的和应等于 180° ，因而该三角形直接观测的各个角度，即称为条件观测。

考虑到观测的质量时，观测又可以分为等精度的和不等精度的两种。观测的精度取决于进行观测时所处的条件；这些条件包括观测者的技术水平，所采用的仪器和观测方法，以及进行观测时的外界环境；所谓外界环境如空气的变动，观测目标的通视情况、风向及照明度等等。当可以认为全部结果都在同样可靠的条件下所进行的观测称为等精度观测。当不能认为全部结果都在同样可靠的条件下，所进行的观测，称为不等精度观测。

观测还可以分为必需的和多余的两种。欲确定 u 个所求量必须进行 u 次观测就可以。可是为了使测量得到检核，提高测量结果的精度，以及求算精度起见，通常都要进行比 u 次较多的 n 次观测，那末其中 u 次称为必需观测，而所余的 $n-u$ 次称为多余观

測。

§ 2 觀測誤差及其分類

如果將同一個量進行多次觀測，除了一次必需觀測之外，還進行若干次多余觀測，則我們將得到一系列不相同的結果。這是由於測量儀器的缺點，人類感覺器官的不完善和進行測量時外界環境的變化等不可能得到所求量的真值。因此觀測的結果內不可避免地產生了誤差；誤差的大小是根據所採用儀器的精度，觀測者的技術熟練程度，實施測量時的周密程度以及進行這些測量時的外界環境的恒定性等而變化的。

觀測誤差分為錯誤、系統誤差和偶然誤差。

錯誤也稱為粗差。這種誤差是由於讀錯或算錯而發生的，有時是由於工作時疏忽或用不正確的測量方法所引起的。例如，當丈量一段距離時，將卷尺尺段數目弄錯或算錯；當觀測角度時，將度盤分劃綫的刻度讀錯或弄錯等。錯誤會使測量結果歪曲，對於今後工作不能適用，因此在測量時應正確組織，使錯誤不致出現。為了要避免錯誤，最好對於同一量進行彼此獨立的重複（校核）測量。例如，進行導綫測量時，每條邊必須往測及返測一次。

測量平差不計及錯誤。

系統誤差也稱為規則性的誤差。這項誤差主要是由於觀測時所採用的儀器製造上不完善而發生的；在一定條件下，這些誤差無論其大小或正負號，一般都是不變的，因此就可以很容易地計算出作為觀測結果的改正數。例如，用不準確的卷尺丈量距離，由於卷尺長度與其所代表的單位長度不同，而產生的誤差為系統誤差，將卷尺長度與標準長度相比較後，就能求得改正數。為了要消除因卷尺大於或小於標準長度而產生的系統誤差，應將該項改正數加入到觀測的結果內。系統誤差有時亦可採用適當的測量方法的組合來消除之。例如，用正倒鏡進行測角，經緯儀的視准差即能消除；度盤的偏心差可以取兩游標讀數的平均值來消

除。又如，进行水准测量时，仪器设置在两水准标尺中央，就可以消除由于照准轴与水准管轴不平行而引起的两点之间高差的误差。

系统误差与错误同样地不在测量平差范围内考虑的。

偶然误差亦称为不规则的误差，它的符号和大小都没有系统性，而且事先也不能确定。偶然误差的来源：由于人类感觉器官首先是眼睛的不完善，仪器构造上的限制，观测时所采用的仪器的装置不能绝对准确，以及外界环境的变化等。在一切的观测中不可避免地要产生偶然误差，并且在观测结果中也无法消除它，因此偶然误差主要地决定了观测结果的精度。

测量平差仅考虑到偶然误差。

§ 3 偶然误差之特性

等精度观测时所产生的偶然误差具有以下四个特性：

(1) 偶然误差之发生，绝对值相等的正误差与负误差出现的机会往往是相同的；

(2) 绝对值较小的误差，比绝对值较大的误差出现的次数较多；

(3) 在规定的观测条件下，偶然误差的绝对值不超过一定的限度；

(4) 对同一个量或同一种量观测的次数无穷增加时，偶然误差的算术平均值趋近于零。

第一个特性说明偶然误差出现的规律性；第二个特性说明偶然误差大小的规律性；第三个特性说明在一定条件下，偶然误差产生于每一次观测中所容许的范围；第四个特性说明次数较多的一系列观测中，偶然误差有相互抵消的可能性。

一个量的观测值与真值之差，称为观测值的真误差，用下式表示：

$$\epsilon = X - l \dots\dots\dots(3.1)$$

式内 X 为一个量的真值， l 为其观测值， ϵ 为观测值的真误差

差。

茲举例說明真誤差：

[例 3.1] 設有两个数14.25 及 16.44之乘积 234.27 是为真值；茲用計算尺求得該两数之乘积为 234.4 是为观测值，則該观测值之真誤差为：

$$\epsilon = 234.27 - 234.4 = -0.13$$

再举例說明偶然誤差之特性：

[例 3.2] 用气压計測定十个点之高程列于表 1。

表 1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
223.7	234.3	246.8	254.1	265.5	280.4	267.6	258.7	241.2	227.7 (公尺)
224.72	235.04	244.78	254.93	264.57	279.24	269.20	258.03	240.08	229.44 (公尺)

表 1 內下面的結果用几何水准測量測定的，当然比用气压計所測定的結果为可靠，故可以作为这十个点高程之真值，相应二者之差，即表示用气压計作高程測量时所得观测值之真誤差。

观测次序： 1, 2, 3, 4, 5, 6,

真誤差 ϵ : +1.0, +0.7, -2.0, +0.8, -0.9, -1.2,

7, 8, 9, 10

+1.6, -0.7, -1.1, +1.7(公尺)

就这十个真誤差所发生之正負次数而言，五次为正，五次为負；再按其絕對值大小排列如下：

+0.7, -0.7, +0.8, -0.9, +1.0, -1.1, -1.2,

+1.6, +1.7, -2.0

可以看出絕對值相接近之真誤差，符号相反，这說明偶然誤差之第一个特性。

这十个真誤差，如以1.5为界，絕對值小于1.5的出现次数共七次，大于 1.5 的出现仅三次，这說明偶然誤差之第二个特性。

如果預先规定根据气压計測定高程之最大誤差不应超过

3.0公尺，則此十个高程真誤差沒有一个超过此限度，这說明偶然誤差之第三个特性。

将此十个真誤差总和之， $[\epsilon] = -0.1$ ，它的算术平均值

$\frac{[\epsilon]}{n} = -0.01$ 是趋近于零，这說明偶然誤差之第四个特性。

§ 4 以算术平均值为最或是值来计算最或是誤差

一个量由同一观测者用同一仪器与同样方法并在同一外界环境下观测 n 次。正如 § 1 中所說过的，进行这 n 个观测时所处的条件相同，故得到 n 个等精度观测值 l_1, l_2, \dots, l_n 。按照我們感觉，算术平均值可视为該量的最或是值，用 x 表示之，則其公式为：

$$x = \frac{l_1 + l_2 + \dots + l_n}{n} = \frac{[l]}{n} \dots \dots \dots (4.1)$$

如果观测次数 n 无限增加，則由此算出的算术平均值，趋近于真值，其証明如下：

由(3.1)式求得 n 个真誤差如下：

$$\epsilon_1 = X - l_1;$$

$$\epsilon_2 = X - l_2;$$

.....;

.....;

$$\frac{\epsilon_n = X - l_n}{[\epsilon] = nX - [l]}$$

式內 $[\epsilon] = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \dots + \epsilon_n$ ， $[l] = l_1 + l_2 + \dots + l_n$

由上式得到：
$$X = \frac{[l]}{n} + \frac{[\epsilon]}{n} \dots \dots \dots (4.2)$$

(4.2) 式中等式右边第一項 $\frac{[l]}{n}$ 按 (4.1) 式就是 x ，而第二項

$\frac{[\epsilon]}{n}$ 就是 x 的真誤差，茲命：

$$\epsilon_x = \frac{[\epsilon]}{n} \dots \dots \dots (4.3)$$