高等学校试用教材

实变函数与泛函分析概要

第二册

郑维行 王声望 编

高等教育出版社

高等学校试用教材

实变函数
与泛函分析概要

第二册

郑维行 王声望 编

高等教育出版社

内 容 提 要

全书共有八章，分两册出版。

本书为第二篇，系后三章的内容，讲述泛函分析的一些基本内容，如距离空间、赋范线性空间、希尔伯特空间等概念，线性分析的几条基本定理，全连续算子的黎斯-邵德尔理论，完备内积空间中有界自伴算子的谱论初步等.

本书可作为综合大学数学、计算数学专业的教材，高等师范院校也可选用.

高等学校试用教材

实变函数与泛函分析概要

第 二 册

郑维行　王声望　编

*

高等教育出版社出版
新华书店上海发行所发行
青浦任屯印刷厂印装

*

开本 850×1168　1/32　印张 7　字数 168,000
1980 年 8 月第 1 版　1988 年 2 月第 9 次印刷
印数 91,981—96,780
ISBN7-04-001805-5/O·618
定价 1.25 元

目　　录

第　二　篇

第六章　距离空间

第七章　赋范线性空间及线性算子

第八章　希尔伯特空间及自伴算子

第二篇

第六章 距离空间

§1. 距离空间·可分性·完备性

在前面几章中，我们陆续学习了 n 维欧几里得空间 R^n，L^2 空间，L^p 空间等．以 R^n 为例，我们在其中定义了距离 ρ（见第一章15页），它满足下面三个条件：

（i）非负性：$\rho(x, y) \geqslant 0$；$\rho(x, y)=0$ 的充要条件 $x=y$，

（ii）对称性：$\rho(x, y)=\rho(y, x)$，

（iii）三点不等式：对任何 $z \in R^n$，有 $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z)+\rho(z, y)$．

如果我们仔细分析一下 R^n 中的许多重要概念（如收敛概念）与结论（如极限的唯一性），就可以发现，实质上它们仅与距离 ρ 的性质(i)—(iii)有关．又以第五章中介绍过的 L^2 空间、L^p 空间为例，虽然我们在其中只定义了范数，还没有明确地定义距离，但只要在 L^2 中令

$$\rho(x, y)=\left(\int_E |x(t)-y(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \quad (x(t)、y(t) \in L^2), \qquad (*)$$

则由第五章§1可知 $\rho(x, y)$ 仍然满足上面的性质(i)—(iii)．同样地，在 L^p 中令

$$\rho(x, y)=\left(\int_E |x(t)-y(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \quad (x(t), y(t) \in L^p), \qquad (**)$$

则由第五章§1可知它也满足上面的性质(i)—(iii)．我们称(*)、

(**)分别为 L^2、L^p 上的距离．通过第五章的学习，读者不难发现，L^2、L^p 中的收敛概念以及其他与之有关的概念和结论，实质上也与它们中的距离(*)、(**)能够满足性质(i)—(iii)有关．因此，为了在一般的非空集合上引进距离，应当以性质(i)—(iii)为基础．大家将会看到，在一般的距离空间中，有很多与 R^n 相似的性质．但由于距离空间是一些具体空间如 R^n 等的进一步提高与抽象，故也有很多本质的不同．

1.1 距离空间的定义及例

定义 1.1 设 X 是由某些元素组成的非空集合，对于其中任意两个元素 x、y，按照一定的法则对应于一个实数 $\rho(x, y)$，满足

（i）非负性：$\rho(x, y)\geqslant 0$；$\rho(x, y)=0$ 的充要条件是 $x=y$，

（ii）对称性：$\rho(x, y)=\rho(y, x)$，

（iii）三点不等式：$\rho(x, y)\leqslant\rho(x, z)+\rho(z, y)$．

则称 $\rho(x, y)$ 为 x、y 的距离，而称 X 是以 ρ 为距离的距离空间．距离空间中的元素又叫做点．X 中的非空子集 A 按照距离 ρ 显然也是一个距离空间，叫做 X 的子空间．

值得注意的是，在任何一个非空集合 X 上，我们都可以定义距离．例如对任一 $x\in X$，规定 $\rho(x, x)=0$，对任何 $y\in X$，只要 $y\neq x$，规定 $\rho(x, y)=1$，显然这样定义的 ρ 满足距离的全部条件，因此 X 按照距离 ρ 成为一个距离空间，我们称这种距离空间是离散的．

例 1(见第一章) **n 维欧氏空间 R^n**．R^n 是由所有 n 维矢量

$$(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$$

组成的集合，此处 ξ_k $(k=1, 2, \cdots, n)$ 都是实数．我们已经指出在 R^n 中可以定义点 $x=(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$ 与点 $y=(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$ 的距离如下：

$$\rho(x, y)=\left(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k-\eta_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{1}$$

则 ρ 满足定义 1.1 中的全部条件. 在第一章中, 我们没有逐一验证这些条件, 为清楚起见今以三点不等式为例进行验证. 为此先证明哥西 (Cauchy) 不等式:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} b_k^2. \tag{2}$$

其中 a_k, b_k $(k=1, 2, \cdots, n)$ 为实数. 任取实数 λ, 则

$$0 \leqslant \sum_{k=1}^{n}(a_k+\lambda b_k)^2=\sum_{k=1}^{n} a_k^2+2\lambda \sum_{k=1}^{n} a_k b_k+\lambda^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2,$$

右端是 λ 的二次三项式, 它对 λ 的一切实数值都是非负的, 故其判别式不会大于零, 即:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} b_k^2,$$

所以哥西不等式成立. 由哥西不等式可得

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2&=\sum_{k=1}^{n} a_k^2+2\sum_{k=1}^{n} a_k b_k+\sum_{k=1}^{n} b_k^2\\&\leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k^2+2\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)^{\frac{1}{2}}+\sum_{k=1}^{n} b_k^2\\&=\left[\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2.\end{aligned} \tag{2'}$$

在 R^n 中任取 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $y=(y_1, y_2, \cdots, y_n)$, $z=(z_1, z_2, \cdots, z_n)$, 并在(2')中令 $a_k=x_k-z_k$, $b_k=z_k-y_k$ $(k=1, 2, \cdots, n)$, 立即得到三点不等式:

$$\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z)+\rho(z, y).$$

因此 R^n 按距离(1)是一个距离空间.

如果 R^n 中每个点的坐标是复数, 距离仍由(1)定义, 则 R^n 仍

是一个距离空间. 今后我们称 R^n 赋以距离 (1) 且 R^n 中点的坐标均为实数的情形为 n 维实欧几里得空间, 称 R^n 赋以距离(1)且 R^n 中点的坐标可以是复数的情形为 n 维复欧几里得空间, 而称(1)为欧几里得距离.

在集合 R^n 中, 我们还可以引入如下的距离:

$$\rho_1(x,\ y)=\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\xi_k-\eta_k|, \tag{1'}$$

则 ρ_1 也满足距离的全部条件, 故 R^n 按照 ρ_1 也是一个距离空间(见习题 1).

上述例 1 告诉我们, 在一个集合中, 定义距离的方式不是唯一的. 一般地说, 如果在一个非空集合 X 中定义了距离 ρ 与 ρ_1, 当 $\rho(x,\ y)\neq\rho_1(x,\ y)$ 时, 那么 X 按照距离 ρ 与按照距离 ρ_1 所成的距离空间必须看成是不同的. 因此在例 1 中, R^n 按照 (1) 定义的距离与按照(1′)定义的距离是两个不同的距离空间.

例 2　空间 $C[a,\ b]$　考虑定义在 $[a, b]$ 上所有连续函数 $x(t)$ 组成的集合, 这个集合记为 $C[a,\ b]$. 对于 $C[a,\ b]$ 中任意两个元素 $x(t)$, $y(t)$, 定义它们的距离为

$$\rho(x,\ y)=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-y(t)|, \tag{3}$$

则 $C[a,\ b]$ 按照距离(3)成为一个距离空间. 事实上, 距离的条件(i)与(ii)都是明显的. 我们仅验证三点不等式. 设 $x(t)$, $y(t)$, $z(t)\in C[a,\ b]$, 则

$$\begin{aligned}|x(t)-y(t)|&\leqslant|x(t)-z(t)|+|z(t)-y(t)|\\&\leqslant\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-z(t)|+\max_{a\leqslant t\leqslant b}|z(t)-y(t)|\\&=\rho(x,\ z)+\rho(z,\ y),\end{aligned}$$

因 $\rho(x,\ z)$, $\rho(z,\ y)$ 都是与 t 无关的实数, 故

$$\rho(x,\ y)=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-y(t)|\leqslant\rho(x,\ z)+\rho(z,\ y),$$

三点不等式(iii)成立，因此 $C[a, b]$ 按照距离(3)确为距离空间.

例3　空间 $L^2[a, b]$、$L^p[a, b]$　在 $L^2[a, b]$，$L^p[a, b]$ 中分别定义距离

$$\rho(x, y)=\left(\int_a^b |x(t)-y(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \quad (x(t), y(t)\in L^2[a, b]), \tag{4}$$

$$\rho(x, y)=\left(\int_a^b |x(t)-y(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \quad (x(t), y(t)\in L^p[a, b]), \tag{4'}$$

在本节的引言中已指出，它们满足距离的全部条件，故 $L^2[a, b]$、$L^p[a, b]$ 都是距离空间，详细证明实质上在第五章§1中已经给出.

例4　空间 $L^\infty[a, b]$　我们称定义在可测集 E 上的可测函数是本性有界的，是指除去 E 中的某个零测度集外，在它的补集上是有界的. 令 $L^\infty[a, b]$ 表示在 $[a, b]$ 上本性有界可测函数的全体，凡是几乎处处相等的函数看作同一元素. 在 $L^\infty[a, b]$ 中定义距离如下：

$$\begin{aligned}\rho(x, y)&=\inf_{\substack{mE_0=0\\ E_0\subset[a,b]}}\left\{\sup_{t\in[a,b]-E_0}|x(t)-y(t)|\right\}\\ &=\operatorname*{varisup}_{t\in[a,b]}|x(t)-y(t)|.\end{aligned}$$

需要验证 ρ 确实满足距离的三个条件. 我们只验证三点不等式. 设 $x, y, z\in L^\infty[a, b]$，任给 $\varepsilon>0$，存在 $E_0, E_1\subset[a, b]$，$mE_0=mE_1=0$，使

$$\sup_{t\in[a,b]-E_0}|x(t)-z(t)|\leqslant\rho(x, z)+\frac{\varepsilon}{2},$$

$$\sup_{t\in[a,b]-E_1}|z(t)-y(t)|\leqslant\rho(z, y)+\frac{\varepsilon}{2},$$

于是

$$\begin{aligned}\rho(x, y) &\leqslant \sup_{t\in[a,b]-(E_0\cup E_1)} |x(t)-y(t)| \\ &\leqslant \sup_{t\in[a,b]-(E_0\cup E_1)} |x(t)-z(t)| \\ &\quad + \sup_{t\in[a,b]-(E_0\cup E_1)} |z(t)-y(t)| \\ &\leqslant \sup_{t\in[a,b]-E_0} |x(t)-z(t)| + \sup_{t\in[a,b]-E_1} |z(t)-y(t)| \\ &\leqslant \rho(x, z)+\rho(z, y)+\varepsilon,\end{aligned}$$

令 $\varepsilon\to0$，得到

$$\rho(x, y)\leqslant\rho(x, z)+\rho(z, y),$$

即三点不等式成立. 因此 $L^\infty[a, b]$ 按照所定义的距离确为距离空间.

有了距离空间的概念，就可以象数学分析一样定义点列的收敛概念.

定义 1.2 设 $\{x_n\}$ 为距离空间 X 中的一个点列，这里 $n=1, 2, 3, \cdots$，以后如无特别声明，均假定 n 取一切自然数. 如果当 $n\to\infty$ 时，$\rho(x_n, x_0)\to0$，就称点列 $\{x_n\}$ 收敛于 x_0，记为

$$x_n\to x_0 \quad (n\to\infty) \quad 或 \quad \lim_{n\to\infty} x_n=x_0.$$

定理 1.1 距离空间 X 中的点列 $\{x_n\}$ 最多只能收敛于一个点，因此收敛点列的极限是唯一的. 又若 $\{x_n\}$ 收敛于 x_0，那么对任一自然数列 $n_1<n_2<\cdots<n_k<\cdots$，点列 $\{x_{n_k}\}$（叫做 $\{x_n\}$ 的子列）也收敛于 x_0.

证 先证定理的第一部分. 设 $\{x_n\}$ 收敛于两个点 x_0、y_0，则对于任给的 $\varepsilon>0$，存在自然数 N，使得当 $n>N$ 时，

$$\rho(x_n, x_0)<\varepsilon, \quad \rho(x_n, y_0)<\varepsilon,$$

由三点不等式得

$$\rho(x_0, y_0)\leqslant\rho(x_0, x_n)+\rho(x_n, y_0)<2\varepsilon \quad (n>N).$$

因 ε 是任给的，故 $\rho(x_0, y_0)=0$，于是 $x_0=y_0$，这表明 $\{x_n\}$ 最多只能

收敛于一个点. 由此可知收敛点列的极限是唯一的.

其次证明定理的第二部分. 设$\{x_n\}$收敛于x_0, 于是对任给的$\varepsilon>0$, 存在N, 当$n>N$时, $\rho(x_n, x_0)<\varepsilon$. 对于$n_k>N$, 显然也有$\rho(x_{n_k}, x_0)<\varepsilon$, 故$\{x_{n_k}\}$收敛于$x_0$.

现在考察例1、例2的空间R^n及$C[a, b]$中的收敛概念究竟意味着什么?

对于R^n来说, 其中的点列$\{x^{(m)}\}=\{(\xi_1^{(m)}, \xi_2^{(m)}, \cdots, \xi_n^{(m)})\}$按照(1)式定义的距离与按照(1′)式定义的距离收敛于$x^{(0)}=(\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}, \cdots, \xi_n^{(0)})$的充要条件都是$x^{(m)}$的每个坐标收敛于$x^{(0)}$的相应坐标.

我们只证第一种情形. 假定R^n上按照(1)式定义了距离, 由

$$|\xi_i^{(m)}-\xi_i|\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k^{(m)}-\xi_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}=\rho(x^{(m)}, x),$$

其中$i=1, 2, \cdots, n$, 容易看出当$\rho(x^{(m)}, x)\to 0$时, $|\xi_i^{(m)}-\xi_i|\to 0$对$i=1, 2, \cdots, n$都成立.

反之, 由

$$\begin{aligned}\rho(x^{(m)}, x)&=\left(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k^{(m)}-\xi_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}\\&\leqslant|\xi_1^{(m)}-\xi_1|+\cdots+|\xi_n^{(m)}-\xi_n|,\end{aligned}$$

并注意到n是一个固定的自然数, 容易看出, 当$|\xi_i^{(m)}-\xi_i|\to 0$对$i=1, 2, \cdots, n$都成立时, 必定有$\rho(x^{(m)}, x)\to 0$.

至于R^n按照(1′)定义距离的情形, 留给读者作为练习.

由此可见, R^n按照(1)及(1′)定义的距离所导出的收敛性是一致的.

对于$C[a, b]$(距离由(3)定义)来说, $\{x_n(t)\}$收敛于$x_0(t)$的充要条件是: 作为函数列的$\{x_n(t)\}$在$[a, b]$上一致收敛于$x_0(t)$. 事实上, 设$\{x_n(t)\}$按照距离(3)收敛于$x_0(t)$, 即$\rho(x_n, x_0)\to 0$, 也

就是当 $n\to\infty$ 时，

$$\max_{a<t<b}|x_n(t)-x_0(t)|\to 0.$$

这意味着对任给的 $\varepsilon>0$，存在 N，当 $n>N$ 时，

$$\max_{a<t<b}|x_n(t)-x_0(t)|<\varepsilon,$$

因此对所有的 $t\in[a,b]$，只要 $n>N$（N 与 t 无关而仅与 ε 有关），就有

$$|x_n(t)-x_0(t)|<\varepsilon,$$

即 $\{x_n(t)\}$ 一致收敛于 $x_0(t)$.

反之，设 $\{x_n(t)\}$ 作为函数列一致收敛于 $x_0(t)$，则对于任给的 $\varepsilon>0$，存在 N（N 与 t 无关仅与 ε 有关）使得当 $n>N$ 时，不等式

$$|x_n(t)-x_0(t)|<\varepsilon$$

对于所有的 $t\in[a,b]$ 一致地成立，于是

$$\max_{a<t<b}|x_n(t)-x_0(t)|\leqslant\varepsilon\quad(n>N),$$

即 $\rho(x_n,x_0)\leqslant\varepsilon$，因此 $\rho(x_n,x_0)\to 0$，这表明 $\{x_n(t)\}$ 作为空间 $C[a,b]$ 中的点列收敛于 $x_0(t)$.

在 $C[a,b]$ 中还可以定义其他的距离. 例如在 $C[a,b]$ 中定义 ρ_1 如下：

$$\rho_1(x,y)=\left(\int_a^b|x(t)-y(t)|^2dt\right)^{\frac{1}{2}}\quad(x(t),\ y(t)\in C[a,b]).\tag{5}$$

容易看出，$C[a,b]$ 按照 ρ_1 是 $L^2[a,b]$ 的一个子空间. 在 $C[a,b]$ 中取函数列

$$x_n(t)=\frac{1}{(b-a)^n}(t-a)^n\quad(t\in[a,b],\ n=1,2,\cdots,n),$$

由勒贝格控制收敛定理（第 4 章定理 3.4）不难证明，$\{x_n(t)\}$ 按照距离 ρ_1 收敛于 $C[a,b]$ 中的元 $x_0(t)\equiv 0$，但 $\{x_n(t)\}$ 显然不一致收

敛于 $x_0(t)$，因此在 $C[a, b]$ 中按照 ρ_1 导出的收敛概念不等价于一致收敛.

以上关于 R^n、$C[a, b]$ 的讨论表明了：如果在一个非空集合 X 上定义了两个距离 ρ 和 ρ_1，那么按照 ρ 和 ρ_1 在 X 中导出的收敛概念，可以是一致的也可以是不一致的.

综上所述，对于距离空间，我们应当注意：

1° 对于任何一个非空集合，我们总可以定义距离．但是，一般说来，我们应当根据该集合的特点适当地引进距离以充分反映这些特点(例如对 $C[a, b]$，我们常常用(3)式定义距离，对于 $L^2[a, b]$、$L^p[a, b]$，我们常常用(4)及(4′)式定义距离)，只有这样在理论上或实践上才有较大的意义.

2° 定义距离的方式一般说不是唯一的.

3° 如果一个非空集合上定义了两个距离，那么由它们导出的收敛概念可以是一致的也可以是不一致的.

1.2 距离空间中的点集 类似于欧几里得空间的情形，在一般的距离空间中也可以引进邻域、开集、闭集等一系列基本概念．关于欧几里得空间中的邻域、开集、闭集等概念，在第一章中已作了详细讨论．这里将根据一般距离空间的特点引进这些概念，因此在叙述的方式上将略有不同，但实质上并无区别，有的性质的证明也从略了.

距离空间 X 中的点集

$$\{x: \rho(x, x_0)<r\} \quad (r>0) \tag{6}$$

叫做以 x_0 为中心、以 r 为半径的开球，这里 x_0 是 X 中一给定的点．如果在(6)式中将“$<$”换成“$\leqslant$”，则相应的点集叫做以 x_0 为中心、以 r 为半径的闭球．上述开球与闭球分别用 $S(x_0, r)$、$\bar{S}(x_0, r)$ 表示．以 x_0 为中心、以正数 r 为半径的开球又称为 x_0 的

一个球形邻域，简称为邻域.

有了邻域的概念，便可以引进开集、闭包、闭集等概念.

设 X 是一个距离空间，$G\subset X$, $x\in X$. 如果存在 x 的一个球形邻域 $S(x, r)\subset G$, 则称 x 是 G 的内点. 显然 G 的内点都属于 G. 如果 G 中的一切点都是它的内点，则称 G 为开集.

设 G 是包含点 x 的开集，我们也称 G 为 x 的一个邻域.

由定义立刻知道，X 中的任何开集一定是某些开球（可能是无穷多个）的并. 而任何一个开球本身也是开集.

定理1.2 设 X 是距离空间，则 X 中的开集具有下列性质：

(i) 空间 X 与空集 $\emptyset$, 都是开集；

(ii) 任意多个开集的并是开集；

(iii) 有限个开集的交是开集.

由于几乎可以逐字逐句重复第一章定理 3.1 的证明，故本定理的证明从略.

设 X 是距离空间. $A\subset X$, 点 x_0 叫做 A 的接触点，是指对任给的 $\varepsilon>0$, x_0 的球形邻域 $S(x_0, \varepsilon)$ 中含有 A 中的点，即

$$S(x_0, \varepsilon)\cap A\neq\emptyset.$$

集 A 的全部接触点组成的集叫做 A 的闭包，记为 $\overline{A}$. 如果点 x_0 的任一球形邻域中必含有 $A-\{x_0\}$ 中的点，则称 x_0 为 A 的聚点或极限点. 若 $x_0\in A$ 但不是 A 的聚点，则称 x_0 为 A 的孤立点.

容易看出，集合 A 的闭包 $\overline{A}$ 刚好由 A 的全部聚点（可能属于 A 也可能不属于 A）与 A 的全部孤立点（必属于 A）所组成.

例5 设 X 是一维欧几里得空间 R^1. $A=\left\{1, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\right\}$, 则对于每个 $n(n=1, 2, 3, \cdots)$, $\frac{1}{n}$ 都是 A 的孤立点，0 是 A 的聚点，但不属于 A. 若 A 是区间 $(0, 1]$, 则闭区间 $[0, 1]$ 中的一切点都是 A 的聚点，其中 0 不属于 A, A 没有孤立点. $(0, 1)$

中的一切点都是 A 的内点.

下面的定理阐述了闭包的性质.

定理 1.3 设 X 是距离空间, A、B 都是 X 的子集,则有:

(i) $A\subset\overline{A}$;

(ii) $\overline{\overline{A}}=\overline{A}$;

(iii) $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$;

(iv) $\overline{\emptyset}=\emptyset$.

证 (i)与(iv)是明显的,只需证明(ii)与(iii).

(ii)的证明. 由(i)显然有 $\overline{A}\subset\overline{\overline{A}}$. 今设 $x_0\in\overline{\overline{A}}$, 那末对任给的 $\varepsilon>0$, $S(x_0, \varepsilon)$中必含有 $\overline{A}$ 中的点, 任取一个这样的点, 记为 y_0, 令 $\delta=\varepsilon-\rho(x_0, y_0)$, 则 $\delta>0$, 因 $y_0\in\overline{A}$, 故 $S(y_0, \delta)$中含有 A 的点. 由于

$$S(x_0, \varepsilon)\supset S(y_0, \delta),$$

故 $S(x_0, \varepsilon)$中含有 A 的点,这正好说明 $x_0\in\overline{A}$, 故 $\overline{A}=\overline{\overline{A}}$.

(iii) 由于 $A\subset A\cup B$, 故 $\overline{A}\subset\overline{A\cup B}$, 同理 $\overline{B}\subset\overline{A\cup B}$, 于是

$$\overline{A}\cup\overline{B}\subset\overline{A\cup B}.$$

现在证明 $\overline{A\cup B}\subset\overline{A}\cup\overline{B}$. 设 $x_0\in\overline{A\cup B}$, 于是对于任给的 $\varepsilon>0$,

$$S(x_0, \varepsilon)\cap(A\cup B)\neq\emptyset. \tag{7}$$

假定 x_0 既不是 A 的接触点也不是 B 的接触点, 那末由定义, 必存在正数 ε_1、ε_2 使

$$S(x_0, \varepsilon_1)\cap A=\emptyset, \quad S(x_0, \varepsilon_2)\cap B=\emptyset,$$

取 $\varepsilon=\min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, 则

$$S(x_0, \varepsilon)\cap(A\cup B)=\emptyset,$$

与(7)矛盾, 故必然有 x_0 或者是 A 的接触点或者是 B 的接触点, 这表明 $\overline{A\cup B}\subset\overline{A}\cup\overline{B}$, 因此 $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$. 证毕.

设 X 是距离空间. $A\subset X$, 如果 $A=\overline{A}$, 则称 A 是闭集. 由定理 1.3(ii), 对任何子集 $A\subset X$, 它的闭包 $\overline{A}$ 是闭集. 又 X 中的

任何闭球也是闭集.

容易证明, $A\subset X$ 为闭集的充要条件是 $X-A$ 是开集, 于是由定理 1.2, 立刻有

定理 1.4 设 X 为距离空间, 则

(i) 空间 X 及空集 $\emptyset$ 都是闭集;

(ii) 任意多个闭集的交是闭集;

(iii) 有限多个闭集的并是闭集.

证明从略.

由于集合 X 的任意性(只要非空)以及在 X 上定义距离的多样性, 在一般的距离空间 X 中的开集、闭集将出现不同于欧几里得空间的新情况.

例如当 X 是离散的距离空间时, 对任何 $x\in X$, 以 x 为中心、以 $\frac{1}{2}$ 为半径的开球只含 x, 因此 X 中的每一个单元素集都是开集, 再由开集的性质及开集与闭集的关系, 可知每个单元素集又都是闭集. 于是每个单元素集是既开且闭的集. 这种情况在欧几里得空间中不可能出现. 对于欧几里得空间来说, 其中的既开且闭的集只有空间本身与空集.

又如, 对集合 $X=(0,1]\cup[2,3)$, 在其中定义距离

$$\rho(x,y)=|x-y|\quad(x,y\in X),$$

则 $(0,1]$, $[2,3)$ 都是 X 中既开且闭的集, X 中以 1 为中心、以 $\frac{1}{2}$ 为半径的开球是区间 $\left(\frac{1}{2},1\right]$, 如此等等.

1.3 可分的距离空间 在第五章 § 2 中已定义了 L^p 空间的可分性, 现将这一概念加以推广, 在一般的距离空间中引入可分的概念. 现在先引入稠密的概念.

定义 1.3 设 A, B 均为距离空间 X 的子集. 如果 $\bar{B}\supset A$, 就

称 B 在 A 中稠密.

容易证明,稠密的概念可以换成下面几种等价的说法:

1° 对于任意 $x\in A$ 以及任意的 $\varepsilon>0$, 存在 B 中的点 y 使 $\rho(x, y)<\varepsilon$.

2° 对于任给的 $\varepsilon>0$, 以 B 中的每个点为中心、以 ε 为半径的全部开球的并包含 A, 这时我们也说这些开球组成的集类覆盖 A①.

3° 对于任意的 $x\in A$, 存在 B 中的点列 $\{x_n\}$ 收敛于 x. 在第五章中,对 L^p 空间引入稠密概念时,就是用的这一说法.

应当注意,在稠密的定义中,并不要求 $B\subset A$, 甚至 B 与 A 可以没有公共点.

利用稠密的概念可以定义距离空间的可分性.

定义 1.4 距离空间 X 叫做可分的,是指在 X 中存在一个稠密的可列子集. $A\subset X$ 叫做可分的, 是指存在 X 中的可列子集 B, 使 B 在 A 中稠密, 即 $\overline{B}=A$.

欧氏空间 R^n 是可分的, 因为坐标为有理数的点组成的集构成 R^n 的一个可列稠密子集.

空间 $C[a, b]$ 是可分的, 因为利用第五章中的伯恩斯坦定理可以证明: 具有有理系数的多项式的全体 P_0 在 $C[a, b]$ 中稠密, 而 P_0 是可列集.

空间 $L^p[a, b]$ $(p\geqslant 1)$ 是可分的, 这在第五章§2中已经证明.

存在着不可分的距离空间. 例如 $L^\infty[a, b]$就是不可分的距离空间. 考察 $L^\infty[a, b]$ 中如下的函数

$$x_s(t)=\begin{cases}1 & a\leqslant t\leqslant s\\ 0 & s<t\leqslant b\end{cases}\quad (s\in[a, b])$$

① 关于覆盖的一般定义将在后面定义 2.4 中给出.