

医用物理学

医用物理学

张玥明 陈志道 编



2012/35:4

高等医药院校教材

医用物理学

主编 张珏明 陈志道 梁中庆

出版发行, 江苏科学技术出版社

经 销, 江苏省新华书店

印 刷, 河南兰考印刷厂

开本 787×1092毫米 1/16 印张 16.25 字数 389,000

1989年10月第1版 1989年10月第1次印刷

印数1—11,000册

ISBN 7—5345—0772—3

R·112

定价: 4.80元

责任编辑

王永发

前 言

本教材是以卫生部颁布的高等医学院校物理教学大纲为依据，并在我们原来多次联合编写教材的基础上，结合我们多年的教学实践经验以及现在教改的要求编写的。这本教材可供高等医药院校医学、卫生、儿科、口腔等专业使用，教学时数为64~82学时，也可作为医务工作者物理学方面的参考书。

本教材以中学物理为起点，以物理学的基本知识、基本理论和基本实验技能为主线，针对医学科学的特点，适当地增加了物理学在医学中的实际应用。在编写过程中，我们力求文字通顺、说理清楚，对重点内容或较难的叙述做到循序渐进、深入浅出；对基本公式的推导做到定量分析。为了便于教和学，书中选有较多的典型例题，每章后都有一定数量的思考题和练习题，书后附有答案。全书的物理量基本上采用国家标准符号和国际单位制。

参加本书编写工作的单位有：南京医学院、南京铁道医学院、浙江医科大学、苏州医学院和温州医学院。

我们恳切希望兄弟院校在使用本书过程中提出宝贵意见，以便我们总结经验，再版时加以订正。

编 者

目 录

绪 论	1
第一章 转动与振动	2
§ 1-1 刚体的转动	2
一、角速度和角加速度	2
二、转动动能和转动惯量	4
§ 1-2 转动定律 角动量守恒定律	7
一、转动定律	7
二、角动量守恒定律	9
§ 1-3 简谐振动	12
一、简谐振动的基本特征	12
二、简谐振动方程	13
三、简谐振动的振幅、周期、频率和位相	14
四、简谐振动的能量	16
§ 1-4 简谐振动的合成	18
一、同方向同频率简谐振动的合成	19
二、同方向不同频率简谐振动的合成	19
三、拍	20
四、互相垂直的同频率简谐振动的合成	21
第二章 波 声波	25
§ 2-1 波 波动方程	25
一、波的形成与几何描述	25
二、波速、波长、波的周期和频率	26
三、波动方程	26
§ 2-2 波的能量 能流密度	28
一、波的能量	28
二、能流和能流密度	29
§ 2-3 波的叠加	30
一、惠更斯原理	30
二、波的叠加原理	31
三、波的干涉	31
四、驻波	34
§ 2-4 声波	35
一、声压、声阻和声强	36
二、声波的反射、折射和吸收	37

§ 2-5 听觉域 声强级 响度级	38
§ 2-6 多普勒效应	41
§ 2-7 超声波及其在医学中的应用	43
一、超声波的产生和接收	43
二、超声波的特性与作用	44
三、超声在医学中的应用	44
第三章 液体的流动	50
§ 3-1 理想液体的流动	50
一、理想液体	50
二、稳定流动 流线 流管	50
三、液体连续性原理	51
§ 3-2 柏努利方程及其应用	51
一、柏努利方程	51
二、柏努利方程的应用	53
§ 3-3 实际液体的流动	55
一、液体的粘滞性 粘滞系数	55
二、实际液体的柏努利方程	56
三、泊肃叶公式、流量与流阻压力差的关系	57
四、片流 湍流 雷诺数	59
五、血细胞的轴流现象	60
§ 3-4 粘滞系数的测定	60
一、奥氏粘度计	60
二、斯托克斯定律	61
§ 3-5 血液在循环系统中的流动	62
一、血液循环	62
二、心脏做功	63
三、血液的流速和血压	63
第四章 分子物理	67
§ 4-1 物质的微观结构 理想气体状态方程	67
一、物质微观结构的一些基本概念	67
二、理想气体状态方程	68
§ 4-2 理想气体的压力公式和能量公式	70
一、理想气体的微观模型	70
二、压力公式的推导	70
三、理想气体的能量公式	72
四、气体分子的方均根速率	73
§ 4-3 能量按自由度均分原理	73
一、自由度	73
二、能量按自由度均分原理	75
三、理想气体的内能	75

§ 4-4 气体分子的速率分布 平均自由程	76
一、麦克斯韦气体分子速率分布定律	76
二、分子的平均自由程和碰撞频率	78
§ 4-5 气体中的输运过程	79
一、粘滞现象	79
二、热传导现象	80
三、扩散现象	80
§ 4-6 液体的表面现象	81
一、表面张力和表面能	81
二、弯曲液面下的附加压力	83
三、毛细现象 气体栓塞	84
四、表面活性物质 表面吸附	86
第五章 热力学基础	89
§ 5-1 热力学第一定律	89
一、内能、功和热量	89
二、热力学第一定律	90
§ 5-2 热力学第一定律在理想气体的四种等值过程中的应用	91
一、等容过程	91
二、等压过程	92
三、等温过程	94
四、绝热过程	95
§ 5-3 卡诺循环与热机效率	98
一、循环过程与热机效率	98
二、卡诺循环	98
§ 5-4 热力学第二定律 熵	101
一、可逆过程和不可逆过程	101
二、热力学第二定律	102
三、熵	103
四、生物生长过程中的熵变	107
第六章 静电场	110
§ 6-1 电场强度	110
一、电场强度	110
二、场强叠加原理	111
三、高斯定理	115
§ 6-2 静电场的电势	119
一、电势	119
二、电偶极子电场的电势	124
三、等势面 静电场强与电势的关系	126
§ 6-3 静电场中的电介质	128
一、电介质及其极化	128
二、电介质对电容器电容的影响	130

三、电介质对电场的影响	131
四、介质损耗	131
§ 6-4 静电场的能量	132
一、带电电容器贮藏的能量	132
二、静电场的能量 能量密度	132
第七章 直流电	137
§ 7-1 电流密度	137
一、电流的形成及电流密度	137
二、欧姆定律的微分形式	139
§ 7-2 非均匀电路的欧姆定律	140
一、一段含源电路的欧姆定律	140
二、基尔霍夫定律	141
§ 7-3 电容器的充电和放电	143
一、电容器的充电过程	143
二、电容器的放电过程	145
§ 7-4 带电粒子输运过程中的电动势	147
一、电子的逸出功	147
二、接触电势差	147
三、温差电动势	149
四、浓差电动势	149
§ 7-5 直流电在医学上的应用	150
一、直流电对机体的作用	150
二、离子透入法和电泳	151
第八章 光的波动性	154
§ 8-1 光的干涉	154
一、相干光	154
二、杨氏双缝实验	155
三、菲涅耳双镜实验 洛埃镜实验	157
四、光程 光程差	158
§ 8-2 光的衍射	160
一、单缝衍射	161
二、双缝衍射 衍射光栅	163
三、圆孔衍射	165
§ 8-3 光的偏振	166
一、自然光与偏振光	166
二、起偏和检偏 马吕斯定律	167
三、反射产生偏振 布儒斯特角	169
四、双折射 二向色性	170
五、旋光性	171

第九章 光的量子性	174
§ 9-1 热辐射	174
一、基尔霍夫定律	174
二、黑体辐射定律	175
三、普朗克的量子假设 黑体辐射公式	177
§ 9-2 光电效应	178
一、光电效应	178
二、爱因斯坦光电效应方程	179
§ 9-3 康普顿效应	181
一、康普顿散射效应	181
二、康普顿效应的理论探讨	181
§ 9-4 波粒二象性 德布罗意波	183
一、波粒二象性	183
二、德布罗意波方程	183
三、波动与微粒间关系的简单讨论	184
§ 9-5 光的吸收	185
一、物质对光的吸收	185
二、朗伯—比尔定律	186
三、比色法原理	186
第十章 几何光学	190
§ 10-1 球面折射	190
一、单球面折射	190
二、共轴球面系统	193
§ 10-2 透镜	195
一、薄透镜	195
二、薄透镜组	197
三、圆柱透镜	198
四、透镜的像差	199
§ 10-3 眼睛	200
一、人眼的结构及其光学性质	200
二、眼的调节 视力	201
三、眼的屈光不正及其矫正	202
§ 10-4 几种医用光学仪器	204
一、纤维镜	204
二、放大镜	204
三、显微镜	205
§ 10-5 电子显微镜	207
第十一章 X射线和激光	212
§ 11-1 X射线	212

一、X射线的产生	212
二、X射线谱	213
三、X射线的强度和硬度	214
四、X射线的吸收	215
五、X射线在医学上的应用	217
§ 11-2 激光	220
一、激光的产生	220
二、激光的特性	224
三、激光在医学上的应用	225

第十二章 原子核和放射性..... 228

§ 12-1 原子核的结构	228
一、原子核的组成	228
二、核的大小	229
三、核力 核模型	229
§ 12-2 原子核衰变	230
一、核衰变类型	230
二、核衰变规律	234
§ 12-3 射线与物质的相互作用	237
一、带电粒子与物质的相互作用	237
二、光子与物质的相互作用	240
三、中子与物质的相互作用	241
四、辐射剂量及其单位	242
§ 12-4 放射性同位素在医学上的应用	243

绪 论

物理学的研究对象 物理学的研究对象是物质的基本性质和物质运动的基本规律。什么是物质？大至天体、日月星辰，小至分子、原子、电子都是物质。这些实物是物质，电场、磁场、引力场以及其他的物质场也是物质。一切物质都在不断地运动、变化，绝对不动的物质是不存在的，没有物质的运动也是不可能的。从简单的位置变化直到复杂的思维过程都是物质的运动。物质的运动形式是多种多样的，它们既服从共同的普遍规律，又各有其独特的规律，对各种不同的物质运动形式的研究形成了自然科学的各个分支学科。

物理学研究的运动形式是最基本、最普遍的形式，包括机械运动、分子热运动、电磁运动、原子和原子核内的运动等等。它普遍地存在于其他高级的、复杂的物质运动形式（如化学过程、生命过程等）之中。因此物理学所研究的规律具有极大的普遍性，成为研究其他自然科学不可缺少的基础。当然，高级的、复杂的运动形式不能简单地都归结为基本的运动形式。例如不论是有生命或无生命的过程都需遵从万有引力定律、能量守恒定律等，但生命过程还有它自己特有的内在规律，这些规律通过生物学和医学的有关课程来认识和掌握。

物理学和医学的关系 医学是以人体为对象的生命科学。生命现象属于物质的高级运动形态。但它离不开物理学的基本运动形式。如研究人体骨骼结构和受力需要有力学知识；研究肌肉收缩、物质和能量的传输需要有热力学知识；研究血液流动、心脏的液泵作用需要有流体力学的知识；研究脑组织的思维过程需要有电磁学的知识等等。并且随着现代科学的发展，人类对生命现象的认识逐步深入，生命科学也已逐渐从宏观形态的研究进入到微观机制的探讨，从细胞水平的研究上升到分子水平的研究，如分子生物学。这样，就更需要深入的物理学知识，如原子物理、核物理的知识。因此学习物理学是学习生命科学和医学的不可缺少的基础。

同时，随着近代物理学的迅速发展，提供了大量物理学的新技术和新方法，并广泛应用于医学研究和临床实践。例如电子显微镜为研究细胞的超微结构提供了有效工具。X射线的晶体衍射方法为研究DNA的双螺旋分子结构提供了方法。应用于测定人体各部位的电波、电阻抗等电信号的采集、处理及分析的各种仪器为研究心电、脑电、肌电等特性以及临床应用发挥了作用。另外，各种物理疗法如热疗、电疗、光疗、放射线治疗以及低温冷冻、激光等各种手段都愈来愈多地引用到医学领域。因此物理学的技术和方法也是医学院校学生所必需学习的一个方面。当然，医学的发展也不断地向物理学提出了新的问题，推动了物理科学的发展。

医学院校的物理学是一门基础课，它的主要任务是给学生系统的物理学知识、必要的物理实验技能和方法，为学习医学其他基础课、医学专业课以及临床实践等提供必要的基础。但是它的内容并不直接讨论和解决医学中的具体问题。因此，在学习物理学的过程中，正确认识物理学和医学的关系是学好这门课的首要条件。

第一章 转动与振动

自然界一切物质都处在永恒的运动之中。最简单而又最基本的运动形态，是物体间之或物体内部各个部分之间的相对位置的变化。我们把这种相对位置变化称为机械运动 (*mechanical motion*)。各种交通工具的运行，机器的运转，大气和河水的流动，天体的运动，以及人体内血液的流动、心脏的跳动、肌肉的伸缩等，都是机械运动。平动、转动和振动是机械运动的三种基本形式。在这一章里，我们将在掌握质点平动规律的基础上，对刚体的转动和质点振动的基本概念和规律进行一些讨论。

§ 1-1 刚体的转动

在中学里大家已经学过了质点运动的若干重要规律，现在我们简要地说明有一定形状大小的物体的运动规律。一般固体在外力作用下运动时，它们的大小和形状并无显著变化。所以研究物体运动的初步方法，是将物体看成在外力作用下，其大小和形状保持不变，即物体的任何两质点间的距离不因外力作用而改变。这样的物体称为刚体 (*rigidbody*)。

刚体的运动可归纳为平动 (*translation*) 和转动 (*rotation*)。在刚体运动时，如果刚体内任何一条固定的直线在运动中始终保持它的方向不变，这种运动称为平动。显然刚体平动时，刚体中所有质点的位移、速度和加速度都是相同的，所以刚体内任何一点的运动都可代表整个刚体的运动。如果刚体运动时，刚体内部的质点都绕同一直线作圆周运动，这种运动称为转动。该直线称为转轴。刚体绕固定轴转动时，各质点的位移、速度和加速度都不相同，可是各质点绕轴线转过的角度是一样的。因此，我们用角度来描述转动是较为方便的。如果转轴不固定，则物体既有平动又有转动，运动比较复杂。下面我们主要讨论刚体绕一固定轴的转动。

一、角速度和角加速度

1. 角速度 在图1-1中，一质点原来的位置在P点，经过时间 Δt ，到达Q点，它的半径 r 所转过的角度 $\Delta\theta$ 称为刚体在这段时间内对转轴 O_1O_2 的角位移。显然，在同一时间间隔内，刚体内所有质点的半径都有同样大小的角位移。它的单位用弧度 (rad) 表示。在定轴转动时，可用右手螺旋法则来判断角位移的正负。在规定的轴的正方向后，将右手大拇指与其余四个手指垂直，使四个手指按角位移的转动方向回转，这时大拇指的方向若与轴的正方向一致，则角位移为正；反之，角位移则为负。

如果刚体转动时，在任意一段相等时间内的角位移相等，则此刚体的转动称为匀速转动。在匀速转动时，角位移 $\Delta\theta$ 与时间 Δt 的比值是一恒量，它就是刚体对转轴的转动角速度，以 ω 表示为

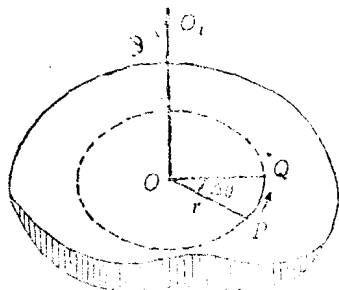


图1-1 刚体的转动

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}.$$

如果刚体作变速转动时, 在某一段时间内的角位移和时间的比值, 称为刚体在这段时间内对转轴的平均角速度, 即

$$\bar{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}.$$

如果 Δt 趋近于零时, 则比值 $\Delta\theta/\Delta t$ 趋近于某一极限值, 即

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}. \quad (1-1)$$

此极限值称为刚体在某一时刻对转轴的瞬时角速度, 简称角速度. 其单位是 $\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$.

2. 角加速度 刚体作变速转动时, 如果在任意一段相等的时间内的角速度的增量相等, 则此刚体的转动称为匀变速转动. 刚体作匀变速转动时, 角速度增量和时间的比值为恒量, 称为刚体对转轴的角加速度, 以 α 表示, 即

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}.$$

如果刚体作变速转动时, 在某一段时间内的角速度增量和时间的比值, 称为刚体在这段时间内的平均角加速度, 即

$$\bar{\alpha} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}.$$

如果 Δt 趋近于零时, 则比值 $\Delta\omega/\Delta t$ 趋近于某一极限值, 即

$$\alpha = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}. \quad (1-2)$$

这个极限值称为刚体在某一时刻对转轴的瞬时角加速度. 其单位是 $\text{rad}\cdot\text{s}^{-2}$.

在定轴转动中, ω 与 α 的正、负也和 θ 一样, 可用右手螺旋法则判断. 当右手的四个手指沿着转动方向回转, 大拇指的方向即 ω 的方向, 与轴的正方向一致时, 角速度 ω 为正值; 反之为负值. 当 ω 的数值逐渐增大时, α 取正值; 逐渐减小时, α 取负值. 角位移、角速度和角加速度既有量值又有方向, 所以是矢量. 但绕定轴转动时, 由于轴的方向已给定, 这三个量都只有正或负取向, 所以可把它们当作标量.

3. 匀变速转动 角加速度恒定的转动是变速转动的最简单情况. 其角速度方程可用积分求得. 因为 $\frac{d\omega}{dt} = \alpha = \text{恒量}$, 有 $\int d\omega = \int \alpha dt$, 所以

$$\omega = \alpha t + C_1.$$

令 $t=0$ 时, 角速度为 ω_0 , 则积分常数 $C_1 = \omega_0$. 因而

$$\omega = \omega_0 + \alpha t. \quad (1-3)$$

又因 $\omega = \frac{d\theta}{dt}$, 代入上式取积分 $\int d\theta = \int \omega_0 dt + \int \alpha t dt$, 得

$$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2 + C_2.$$

当 $t=0$ 时, 角位移为 θ_0 . 则积分常数 $C_2 = \theta_0$. 所以

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2. \quad (1-4)$$

因为角加速度 $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \frac{d\omega}{d\theta} = \omega \frac{d\omega}{d\theta}$, 取积分 $\int \alpha d\theta = \int \omega d\omega$, 得

$$\alpha\theta = \frac{1}{2} \omega^2 + C_s.$$

如果 $t=0$ 时角 θ 的值为 θ_0 , 并且初角速度为 ω_0 , 于是 $C_s = \alpha\theta_0 - \frac{1}{2} \omega_0^2$, 因此便有

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0). \quad (1-5)$$

4. 角量与线量的关系 在平动中的位移、速度和加速度统称为线量, 转动中的角位移、角速度和角加速度统称为角量. 当刚体绕定轴转动时, 其线量和角量之间存在着一定的关系. 图 1-2 表示一刚体绕垂直于纸面的定轴 O 转动. r 是由轴到刚体中某点 P 的距离, 因此 P 点便在半径为 r 的圆周上运动. 当半径与参考轴之间的夹角为 θ 时, P 点沿着圆周所走的距离 s 为

$$s = r\theta.$$

把上式两边对时间 t 求导, 并注意 r 为恒量, 则得

$$\frac{ds}{dt} = r \frac{d\theta}{dt}.$$

由于 $ds/dt = v$, $d\theta/dt = \omega$, 所以有

$$v = r\omega. \quad (1-6)$$

这就是绕定轴转动时, 刚体上一点的线速度与角速度之间的关系. 由式 (1-6) 可见, 因刚体上各点的 ω 相同, 所以各点的线速度与它们离轴的垂直距离 r 成正比, 离轴越远, 线速度越大.

把式 (1-6) 两边对 t 求导, 由于 r 为恒量, 得

$$\frac{dv}{dt} = r \frac{d\omega}{dt}.$$

式中 dv/dt 是 P 点加速度的切线分量 a_t 的大小, $d\omega/dt$ 是刚体的角加速度 α , 因此

$$a_t = r\alpha. \quad (1-7)$$

由于刚体各点的 α 相同, 所以各点的切向加速度也与它们离轴的垂直距离 r 成正比.

把式 (1-6) 代入向心加速度公式 $a_n = \frac{v^2}{r}$, 得

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{(r\omega)^2}{r},$$

$$a_n = r\omega^2. \quad (1-8)$$

即法向加速度也与 r 成正比.

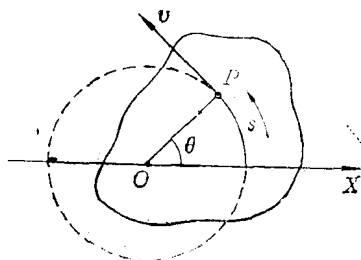


图 1-2 P 点移动的距离

二、转动动能和转动惯量

在讨论刚体的定轴转动时, 把刚体可看成是由许多质点所组成, 这些质点的质量分别为 $\Delta m_1, \Delta m_2, \dots$, 各质点与转轴的距离分别为 $r_1, r_2, \dots$. 当刚体绕定轴转动时, 各质点的角速度 ω 相等, 但线速度各不相同. 设第 i 个质点的线速度为 v_i , 其大小为 $v_i = r_i \omega$, 则相应的动能是

$$\frac{1}{2} \Delta m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \Delta m_i r_i^2 \omega^2.$$

整个刚体的动能是所有各质点的动能之和，即

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2} \Delta m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} \Delta m_2 v_2^2 + \dots \\ &= \frac{1}{2} \Delta m_1 r_1^2 \omega^2 + \frac{1}{2} \Delta m_2 r_2^2 \omega^2 + \dots \\ &= \sum \frac{1}{2} \Delta m_i r_i^2 \omega^2. \end{aligned}$$

刚体绕定轴转动时的动能，称为转动动能。因为 $\omega^2/2$ 对各质点都相同，可从总和号内提出，所以转动动能为

$$E_k = (\sum \Delta m_i r_i^2) \frac{\omega^2}{2}.$$

上式中括号内的量用 I 来表示，称为刚体对给定轴的转动惯量 (moment of inertia) 即

$$I = \sum \Delta m_i r_i^2. \quad (1-9)$$

上式表明，转动惯量 I 等于刚体中每个质点的质量与这一质点到转轴的距离的平方的乘积的总和。因此，刚体的转动动能为

$$E_k = \frac{1}{2} I \omega^2. \quad (1-10)$$

表1-1 转 动 惯 量

物 体	转 轴	转 动 惯 量
细 棒 (质量 m , 长 l)	通过中心与棒垂直	$\frac{1}{12} m l^2$
	通过一端与棒垂直	$\frac{1}{3} m l^2$
细 圆 环 (质量 m , 半径 r)	通过中心与环面垂直	$m r^2$
	沿 直 径	$\frac{1}{2} m r^2$
薄 圆 盘 (质量 m , 半径 r)	通过中心与盘面垂直	$\frac{1}{2} m r^2$
	沿 直 径	$\frac{1}{4} m r^2$
球 体 (质量 m , 半径 r)	沿 直 径	$\frac{2}{5} m r^2$
	沿 切 线	$\frac{7}{5} m r^2$
矩 形 薄 板 (质量 m , 长 a , 宽 b)	通过中心与板面垂直	$\frac{1}{12} m (a^2 + b^2)$

可见, 刚体的转动动能等于转动惯量和角速度平方乘积的一半. 若将刚体的转动动能 $\frac{1}{2} I \omega^2$ 与平动动能 $\frac{1}{2} m v^2$ 相比较, I 相当于 m , 可见在刚体转动中, 转动惯量起着平动中质量的作用. 它量度刚体转动时惯性的大小.

对质量连续分布的刚体, 转动惯量可用积分形式表示为

$$I = \int r^2 dm = \int r^2 \rho dV. \quad (1-11)$$

式中 dV 表示相应于 dm 的体积元, ρ 表示体积元处的密度, r 是体积元与转轴之间的距离. 转动惯量的单位在SI制中是 $\text{kg} \cdot \text{m}^2$.

由式(1-9)或式(1-11)可以看出, 刚体的转动惯量决定于刚体各部分的质量对给定转轴的分布情况. 具体的说, 刚体的转动惯量由上列三个因素决定: (1) 与刚体的质量有关. (2) 在质量一定的情况下, 还与质量的分布有关. (3) 与转轴的位置有关, 所以只有指出刚体对某一转轴的转动惯量才有明确的意义.

几何形状简单的、密度均匀的几种物体对不同转轴的转动惯量如表1-1所示.

例1 求质量为 m , 长为 l 的均匀细棒的转动惯量. (1) 假定转轴通过棒的中心并与棒垂直; (2) 假定转轴通过棒的一端并与棒垂直.

解 在细棒上任取一长度元 dx , 离转轴距离为 x , 如图1-3所示, 其质量为 $dm = \lambda dx$, λ 为细棒的质量线密度. 根据转动惯量定义 $I = \int r^2 dm$, 得

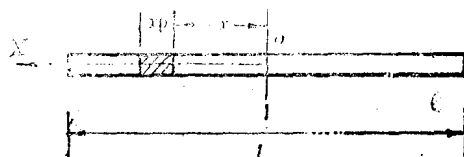


图1-3 均匀细棒的转动惯量

(1) 当转轴通过棒的中心并与棒垂直时

$$I = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} x^2 \lambda dx = \frac{\lambda}{3} x^3 \bigg|_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} = \frac{l^3}{12} \lambda.$$

将棒的质量线密度 $\lambda = \frac{m}{l}$ 代入, 即得

$$I = \frac{l^3}{12} \frac{m}{l} = \frac{1}{12} m l^2.$$

(2) 当转轴通过棒的一端并与棒垂直时

$$I = \int_0^l x^2 \lambda dx = \frac{1}{3} l^3 \lambda = \frac{1}{3} m l^2.$$

由此可以看出, 同一均匀细棒, 如果转轴的位置不同, 转动惯量也不相同.

例2 在边长为 a 的六边形顶点上, 分别固定有质量都是 m 的六个质点, 如图1-4所示. 试求此系统分别绕转轴 I、II 的转动惯量 (设转轴 I、II 在质点所在的平面内).

解 对转轴 I 的转动惯量

$$\begin{aligned} I_I &= \sum m_i r_i^2 \\ &= 2m (a \sin 30^\circ)^2 + 2m (a + a \sin 30^\circ)^2 \\ &\quad + m (a + 2a \sin 30^\circ)^2 \end{aligned}$$

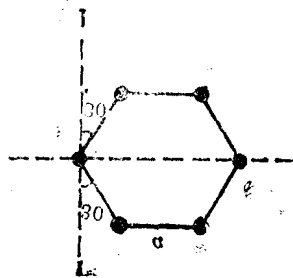


图1-4 质点系统的转动惯量

$$= \frac{1}{2}ma^2 + \frac{9}{2}ma^2 + 4ma^2 = 9ma^2.$$

对转轴Ⅱ的转动惯量

$$\begin{aligned} I_2 &= \sum m_i r_i^2 \\ &= 4m (a \sin 60^\circ)^2 = 4ma^2 \times \frac{3}{4} = 3ma^2. \end{aligned}$$

§ 1-2 转动定律 角动量守恒定律

一、转动定律

1. 力矩的功 一个具有固定轴的静止物体，在外力作用下可能发生转动，也可能不发生转动。物体的转动与否，不仅与力的大小有关，而且与力的作用点及作用力的方向有关。例如，当我们开关门窗时，如果作用力与转轴平行或通过转轴，那么不论多大的力也不能把门窗打开或关上。因此，在转动中必须研究力矩的作用。

设刚体所受外力 F 在垂直于转轴 O 的平面内，如图1-5 (a) 所示，力的作用线与转轴间的垂直距离 d 称为对转轴的力臂，力的大小和力臂的乘积称为力对转轴的力矩 (moment of force)。用 M 表示力矩，有

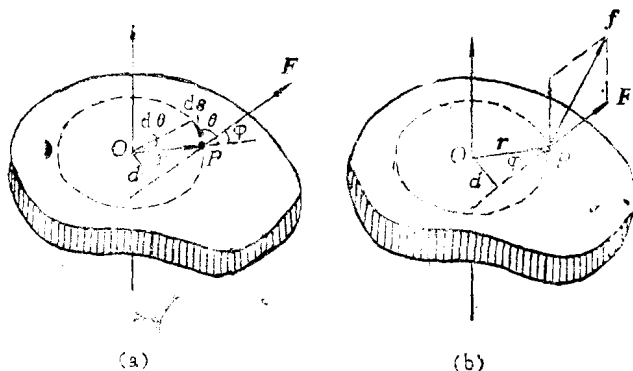


图1-5 力 矩

$$M = Fd. \quad (1-12)$$

设力的作用点为 P ， P 点离开转轴的垂直距离为 r (相应的矢径为 r)，从图中可以看出 $d = r \sin \varphi$ ， φ 是 F 与 r 之间的夹角，所以

$$M = Fr \sin \varphi \quad (1-13)$$

如果外力 f 不在垂直于转轴的平面内，那么必须把它分解成一个和转轴平行的分力和一个垂直于转轴的平面内的分力 F ，如图1-5 (b) 所示，使物体产生转动作用的就是垂直分力 F 。

力矩是矢量，在定轴转动时，可用正负表示。规定了轴的正方向后，力矩的方向可用右手螺旋法则判断，即把右手大拇指伸直，将其余四指从 r 经过 r 与 F 所成的较小夹角转向 F ，若大拇指的指向与轴的正方向一致，则力矩为正；反之，力矩为负。

力矩和功都用力 和 距离的乘积来计算，但两者的意义完全不同。功是能量变化的量度，是标量。力矩是使物体改变转动状态的原因，也就是产生角加速度的原因，是矢量。功

的单位用J, 而力矩的单位不能用J, 只能用N·m来表示.

下面我们来计算力矩所作的功. 设刚体在力 F 作用下, 绕转轴 O 转过一极小的角位移 $d\theta$, 力 F 的作用点 P 的位移为 ds , 则 $ds=r d\theta$, 如图1-5(a)所示. 这位移 ds 和 OP 垂直, 和 F 的夹角为 θ . 因此, 力 F 在这段位移中所作的功为

$$dW = F \cos \theta ds = Fr \cos \theta d\theta.$$

因为 $F \cos \theta = F \sin \varphi$, 所以上式可写成

$$dW = M d\theta, \quad (1-14)$$

即力矩所作的功等于力矩与角位移的乘积.

当刚体在恒力矩 M 作用下转过 θ 角时, 则力矩在这一过程中所作的功为

$$W = M\theta. \quad (1-15)$$

而变力矩所作的功为

$$W = \int M d\theta. \quad (1-16)$$

2. 转动定律 刚体受外力矩作用, 它的能量就会发生变化, 这是力矩做功的结果. 根据功能原理, 合外力矩所作的功应等于刚体动能的增量, 所以

$$M d\theta = d \left(\frac{1}{2} I \omega^2 \right).$$

刚体作定轴转动时, I 为恒量, 于是 $M d\theta = I \omega d\omega$, 从而 $M \frac{d\theta}{dt} = I \omega \frac{d\omega}{dt}$, 即

$$M = I\alpha. \quad (1-17)$$

上式表明作用在刚体上的转动力矩, 等于刚体的转动惯量与其角加速度的乘积, 这关系称为**刚体的转动定律**.

如果和以前物体平动时的牛顿第二定律

$$F = ma$$

比较, 就知道转动中力矩相当于力, 转动惯量相当于质量, 角加速度相当于加速度.

例1 飞轮的质量为200kg, 在不变的力矩作用下由静止开始转动, 经过5秒钟后, 转速达每分钟120转. 飞轮的质量可以看作均匀地分布在半径为0.5m的圆周上, 转轴垂直于飞轮并通过其中心, 求作用的力矩.

解 飞轮的转动惯量为

$$I = mr^2 = 200 \times (0.5)^2 = 50 \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

5秒后的角速度 $\omega = \frac{120 \times 2\pi}{60} = 4\pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, 所以角加速度 $\alpha = \frac{\omega}{t} = \frac{4\pi}{5} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2}$,

根据转动定律, 作用的力矩为

$$M = I\alpha = 50 \times \frac{4\pi}{5} = 40\pi \text{ m} \cdot \text{N}.$$

例2 一飞轮半径为 R 、质量为 m_2 . 支于固定轴承, 对轴的转动惯量为 I , 如图1-6所示. 一条轻而柔软的绳子绕于轮的边缘, 绳的一端悬有质量 m_1 的重物. 如果轴承的摩擦力可以不计, 试求重物下降的加速度.

解 设绳的张力为 T , 轴承对轮轴向上的作用力为 P . 被

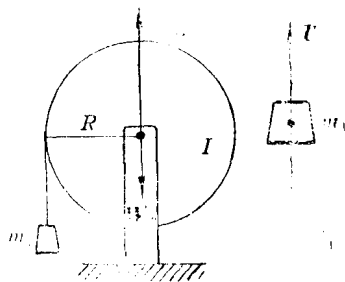


图1-6