理工科代数基础

俞正光 李永乐 吕 志 编

清华大学出版社
http://www.tup.tsinghua.edu.cn

理工科代数基础

俞正光　李永乐　吕　志　编

清华大学出版社

(京)新登字 158 号

内容提要

本书系统地介绍了高等代数中线性空间和线性变换的理论和方法，并简要地介绍了近世代数中的基本内容、基本方法及有关矩阵分析的基本知识，目的是为学过线性代数初步知识的读者提供进一步学习代数知识的素材，同时也为读者提高抽象思维能力和严谨的逻辑推理能力创造条件. 本书共分 8 章，它们是代数系统、一元多项式、线性空间、线性变换、欧几里得空间、酉空间、矩阵分析和群环域初步. 全书采用模块式结构，读者可以根据需要按照提示选择其中部分章节进行学习.

本书可作为高等院校理、工、经管等专业本科生及研究生教材或教学参考书，亦可供自学读者及有关科技人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

理工科代数基础/俞正光等编 . —北京:清华大学出版社，1998.9

ISBN 7-302-02977-6

Ⅰ. 理… Ⅱ. 俞… Ⅲ. 高等代数 Ⅳ. O15

中国版本图书馆 CIP 数据核字(98)第 12241 号

出版者：清华大学出版社(北京清华大学校内，邮编 100084)

因特网地址：www.tup.tsinghua.edu.cn

印刷者：北京人民文学印刷厂

发行者：新华书店总店北京科技发行所

开　本：850×1168 1/32　**印张**：11　**字数**：285 千字

版　次：1998 年 7 月第 1 版　1998 年 7 月第 1 次印刷

书　号：ISBN 7-302-02977-6/O・193

印　数：0001～5000

定　价：11.50 元

前　言

由于自然科学和工程技术的迅速发展,特别是计算机的普遍推广和应用,要求科学工作者和工程技术人员掌握更深入、更广泛的离散数学的知识和方法.代数的概念和方法是其中最重要的组成部分之一.一般高等院校受到学时的限制在线性代数课程中,只能介绍线性代数的最基本知识,这与21世纪对人材素质的要求有相当距离.为此,作为《线性代数与解析几何》的续篇,我们编写了这本教材,其目的是为学过线性代数初步知识的读者提供进一步学习代数知识的素材,同时也为加强读者抽象思维能力和严谨的逻辑推理能力的训练创造一定条件.根据理工科大学的特点及提高学生数学修养的要求,在内容选择上,注意到加强基础理论又照顾了理论的应用,并考虑了知识的系统性和先进性;在能力培养方面,加强了严谨的逻辑推理能力的训练,又强调了线性代数的几何背景,把代数和几何方法有机地结合起来.

本书大体分成三个部分.第一部分是介绍代数的基本知识(第1章)和近世代数的基本概念和方法(第8章).第二部分是通常称为高等代数的基本内容,包括多项式代数(第2章)及线性空间与线性变换的理论与方法(第3章至第6章),这一部分是课程的重点内容.首先把在线性代数中研究过的实数域上的向量空间推广到一般数域上的线性空间,着重研究线性空间的子空间的性质(第3章).为了进一步深刻揭示线性空间的向量之间的内在联系,重点研究了线性空间的线性变换的性质及其与矩阵的联系,从几何角度详细研究空间分解的理论,讨论矩阵的化简,最后给出矩阵的若当(Jordan)标准形(第4章).之后,在实数域上的线性空间引入

度量性质，建立了欧几里得(Euclid)空间，并研究其上的线性变换，进一步揭示正交矩阵与对称矩阵的性质与几何背景(第5章)。与欧几里得空间对应的有复数域上的酉空间，着重介绍了非常有用的埃尔米特(Hermite)矩阵和埃尔米特二次型的性质(第6章)。在这一部分还介绍了商空间(3.6)、线性函数与对偶空间(4.7)、双线性函数(5.6)等概念和性质。第三部分介绍了一些在其它学科及工程技术中有实用意义的概念、方法与原理，其中包括最小二乘法、广义逆矩阵(5.5)及矩阵分析的基本概念和方法，最后还介绍了微分方程组的矩阵分析解法(第7章)。

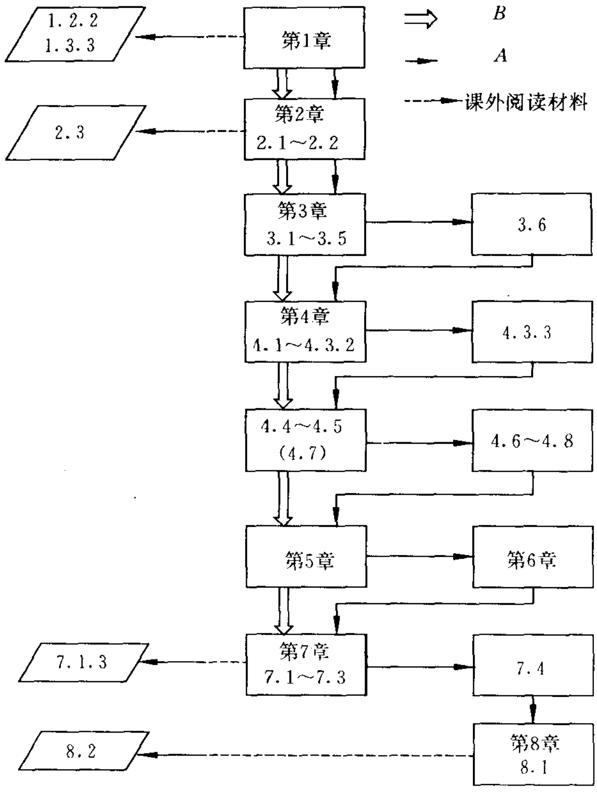
考虑到不同要求的读者的需要，保证都能系统地阅读这本书，我们采取了模块式的编写原则。读者如果对某些内容及理论不感兴趣，或由于时间限制不允许按顺序读完全书，可以按进程表跳过一些章节。我们按 A 和 B 两种要求在进程图中画了不同的学习路径(见下页图)，供读者学习时参考。另外编写了一些章节(1.2.2，1.3.3，2.3，7.1.3，8.2 等)供希望学习更多知识及学习有余力的同学阅读参考。

本书初稿第1章和第8章由吕志编写，第3、5两章由李永乐编写，其余各章由俞正光编写。全书修改和定稿由俞正光完成。

本书初稿曾在清华大学本科生中使用，清华大学应用数学系汪国柄、何坚勇、周耀耀、章纪民、李栓虎等老师在使用过程中提出许多宝贵意见，清华大学出版社对本书的编辑出版给予热情支持和帮助，在此表示感谢。

由于时间仓促和水平所限，书中一定存在不少缺点和错误，恳请批评指正。

进 程 图


B
A
课外阅读材料
第1章
1.2.2
1.3.3
第2章
2.1～2.2
2.3
第3章
3.1～3.5
3.6
第4章
4.1～4.3.2
4.3.3
4.4～4.5
(4.7)
4.6～4.8
第5章
第6章
第7章
7.1～7.3
7.1.3
7.4
第8章
8.1
8.2

目　　录

第1章 代数系统

从事物的总体上和事物的变化与相互关联中把握事物是现代数学的普遍特点.换言之,现代数学的研究既要着眼于用数学语言来表述各种事物所组成的集合,又要着眼于集合内部中元素间以及集合间的各种数学关系(等价关系、序关系、映射或运算等),进而通过对各种数学关系的进一步研究,达到揭示事物本质之目的.

作为区别于其它数学学科的代数学,尤其是近世代数,一个显著特征就是以代数系统(具有运算的集合)为主要研究对象.故此,了解和掌握关于代数系统方面的基本概念和方法是极为重要的.这不仅对系统掌握以及深入理解已学过的微积分和线性代数之内容和方法是大有裨益的,而且也为进一步学习代数学以及其它数学学科做好必要的前提准备.

1.1 集合与关系

1.1.1 集合及其运算

集合是现代数学最基本的概念之一.数学研究总是离不开各种各样的集合,不仅如此,集合的概念也已深入到各种科学和技术领域之中.当我们把一组确定的事物(或对象)作为整体来考察时,这一整体就叫做**集合**(set),简称**集**.通常用大写字母 A,B,C 等表示集合.集合中的每一事物称为**元素**(element),用小写字母 a,b,c 等来表示.不含任何元素的集合称为**空集**(empty set),用 $\varnothing$ 表示.若 a 是集合 A 里的元素,就说 a 属于 A,记作 $a\in A$;否则就说 a 不

属于 A,记作 $a\in A$ 或 $a\notin A$.

集合的表述方法通常有两种:一种是**列举法**,即把集合中所有元素一一列举出来表示集合的方法.例如,小于7的所有自然数构成的集合 $A=\{1,2,3,4,5,6\}$.另一种是**特征法**,即用描述集合中元素所具有的特征来表示集合的方法.例如,

$A=\{x\mid |x|\leqslant 6$ 且 x 为整数$\}$;

$C[a,b]=\{f\mid f$ 为$[a,b]$上的连续函数$\}$;

$M_{m,n}(\mathbf{R})=\{(a_{ij})_{m\times n}\mid (a_{ij})_{m\times n}$为 $m\times n$ 阶实矩阵$\}$等等.

从集合中所含元素个数的角度观察集合,可有有限集和无限集之分.若用$|A|$表示集合 A 中所含元素的个数,当$|A|$为有限数时,称 A 为**有限集**;否则称之为**无限集**.当然,$|\varnothing|=0$ 说明$\varnothing$为有限集,而$|C[a,b]|\neq$有限数,即 $C[a,b]$为无限集.衡量无限集中元素的个数不是件易事,通常的"个数"概念已失效,需要用映射的观点和引入"势"的概念来进行.这里我们不做进一步的讨论,只简介一下基本情况.无限集可有两种类型:可数集与不可数集.**可数集**是指可与自然数集 $\mathbf{N}$ 建立一一对应的集合,不是可数集的其它无限集为**不可数集**.例如,自然数集 $\mathbf{N}$,整数集 $\mathbf{Z}$,有理数集 $\mathbf{Q}$ 等均为可数集,而无理数集,实数集 $\mathbf{R}$,复数集 $\mathbf{C}$ 等均为不可数集.

设任意两集合 A 与 B,若 $x\in A\Leftrightarrow x\in B$,即 A 与 B 含有完全相同的元素,则称 A 与 B **相等**(equality),记作 $A=B$;若对$\forall\ x\in A\Rightarrow x\in B$,即 A 中的元素都属于 B,则称 A 是 B 的**子集**(subset),记作 $A\subseteq B$.

注:(1) 本书用记号"$\Leftrightarrow$"表示"充分必要条件"、"当且仅当"等;记号"$\Rightarrow$"表示"蕴含"、"则"等.

(2) "$\in$"与"$\subseteq$"是两个不同的概念.前者是指集合的元素与集合本身的关系,后者指的是两个集合之间的一种关系.

易知,"对任意的集合 A,均有$\varnothing\subseteq A$,$A\subseteq A$"以及"$A=B\Leftrightarrow A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$".通常把$\varnothing$和 A 称为 A 的**平凡子集**,除去$\varnothing$以及 A

本身的其它子集称为 A 的**真子集**. 把由集合 A 的全体子集所组成的集合称为 A 的**幂集**(power set),记为 $P(A)$. 例如,若 $A=\{a,b,c\}$,则

$$P(A)=\{\varnothing,A,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\}\}.$$

另外,读者不难验证,若 $|A|=n$,则有 $|P(A)|=2^n$.

如果所研究的一切集合都是某个固定集合的子集,则这个固定集合叫做**全集**,通常用 E 来表示. 显然,全集的选取与所研究的问题密切相关. 例如,在一元微积分中,由于以实数集 $\mathbf{R}$ 作为论域,故取全集 $E=\mathbf{R}$,此时函数的定义域、值域均为 $\mathbf{R}$ 的子集.

同数、向量、矩阵等一样,在 $P(E)$ 上也可定义多种集合运算. 例如交"$\cap$",并"$\cup$",差"$-$",补"$^-$",对称差"$\oplus$"等等. 不加说明,以下出现的集合均为 $P(E)$ 中的元素.

定义 1.1 $A\cap B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\in B\}$,

$A\cup B=\{x\mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}$,

$A-B=\{x\mid x\in A \text{ 但 } x\notin B\}$,

$\overline{A}=E-A=\{x\mid x\notin A\}$,

$A\oplus B=(A-B)\cup(B-A)$.

$A-B$ 有时也记作 $A\backslash B$.

定理 1.1 定义 1.1 中所定义的各种运算满足以下规律:

(1) 交换律: $A\cap B=B\cap A$, $A\cup B=B\cup A$, $A\oplus B=B\oplus A$;

(2) 结合律: $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$;

$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$;

$(A\oplus B)\oplus C=A\oplus(B\oplus C)$.

(3) 分配律: $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$;

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$;

$A\cap(B-C)=(A\cap B)-(A\cap C)$;

$A\cap(B\oplus C)=(A\cap B)\oplus(A\cap C)$.

(4) 0-1 律: $A\cup\varnothing=A$, $A\cap E=A$, $A\cup E=E$, $A\cap\varnothing=\varnothing$,

$A \oplus \varnothing = A$

(5) 等幂律：$A \cup A = A$，$A \cap A = A$；

(6) 吸收律：$A \cup (A \cap B) = A$，$A \cap (A \cup B) = A$；

(7) 补　律：$A \cup \overline{A} = E$，$A \cap \overline{A} = \varnothing$；

(8) 德摩根(De Morgen)律：$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$，$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$；

(9) 二次否定律：$\overline{\overline{A}} = A$.

证　只证德摩根律，其余留给读者验证.

$a \in \overline{A \cup B} \Leftrightarrow a \notin A \cup B \Leftrightarrow a \notin A$ 且 $a \notin B \Leftrightarrow a \in \overline{A}$ 且 $a \in \overline{B} \Leftrightarrow a \in \overline{A} \cap \overline{B}$.

故 $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$. 同理可证另一条. □

根据结合律，可有

推论 1　$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \xlongequal{\text{去掉括号}} A \cup B \cup C$；

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \xlongequal{\text{去掉括号}} A \cap B \cap C$；

$(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C) \xlongequal{\text{去掉括号}} A \oplus B \oplus C$.

推论 1 中省略括号的做法可以推广到任意多个集合的情形上去. 这正是结合律的本质意义.

推论 2　$A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap B = A$.

证　首先，由子集和并的定义易得 $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$.

其次，由 $A \cup B = B \Rightarrow A \cap B = A \cap (A \cup B) \xlongequal{\text{吸收律}} A$；反之，由 $A \cap B = A \Rightarrow A \cup B = (A \cap B) \cup B \xlongequal{\text{交换律}} B \cup (B \cap A) \xlongequal{\text{吸收律}} B$. 因此，有 $A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap B = A$. □

推论 2 表明可用 $A \cup B = B$(或 $A \cap B = A$)来给出 $A \subseteq B$ 的定义，故而可用“$\cap$”，“$\cup$”的运算规律来研究集合之间的包含关系. 这类似于在一元微积分中可用导数来研究函数的单调性.

例 1.1(单调性)　若 $A \subseteq B$，则 $A \cap C \subseteq B \cap C$ 以及 $A \cup C \subseteq B \cup C$.

证 由 $A\subseteq B\xrightarrow{\text{推论2}}A\cup B=B\Rightarrow(A\cap C)\cup(B\cap C)$

$\xlongequal{\text{交换律,分配律}}(A\cup B)\cap C=B\cap C\xrightarrow{\text{推论2}}A\cap C\subseteq B\cap C.$

同理可证并的单调性. □

值得注意,并"$\cup$"对差"$-$"以及对称差"$\oplus$"均不满足分配律. 例如,若取 $E=\{a,b,c,d\}$, $A=\{a\}$, $B=\{a,b\}$, $C=\{c,d\}$,则有

$$A\cup(B-C)=\{a,b\}\neq\{b\}=(A\cup B)-(A\cup C);$$

$$A\cup(B\oplus C)=E\neq\{b,c,d\}=(A\cup B)\oplus(A\cup C).$$

此时,若把"$\cup$"看做数的乘法,把"$-$"以及"$\oplus$"看做数的加法或减法,从中看到集合的运算与数的运算有很大的不同. 因此,在进行集合运算时,需要特别注意.

1.1.2 关系的概念及性质

为了达到解决问题的目的,人们往往从分析事物的相互关联入手. 这体现在数学上,就需要研究集合的元素之间所具有的各种各样的关系. 例如,在矩阵研究中,有相抵关系,相似关系,相合关系;在地球上所有人的集合中,有父子关系,朋友关系,师生关系等;在实数集 $\mathbf{R}$ 中,有大于关系,等于关系,小于关系等等. 那么"关系"一词上升到数学语言该如何定义呢?为此先做些准备工作.

设 A,B 为两集合,元素 a,b(其中 $a\in A,b\in B$)依一定次序组成一对,称之为**序偶**(ordered pair),记为(a,b). 规定

$$(a,b)=(c,d)\Leftrightarrow a=c\text{ 且 }b=d.$$

(a,b)也称为一个**有序二元组**,其中 a 为**第一分量**,b 为**第二分量**.

类似地可定义有序 n 元组. 下面定义由序偶所构成的集合.

定义 1.2 设 A 和 B 为两个集合,称集合

$$\{(a,b)\mid a\in A,b\in B\}.$$

为 A 与 B 的**笛卡尔积**(Descartes product),记作 $A\times B$.

若有 $n(n\geqslant 1)$个集合 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,也可定义相应的笛卡尔

积，即

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1,a_2,\cdots,a_n) | a_i \in A_i, i = 1,2,\cdots,n\}.$$

特别地，若 $A_1=A_2=\cdots=A_n=A$，记 $A^n=A\times A\times\cdots\times A$. 正如大家已经熟悉的，通常用 $\mathbf{R}^2=\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ 表示二维实向量空间，$\mathbf{R}^3=\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ 表示三维实向量空间，$\mathbf{R}^n=\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\cdots\times\mathbf{R}$ 表示 n 维实向量空间等.

这里，特别要提醒读者注意的是 A 与 B 的笛卡尔积中的元素是有序的对，一般来说 A 与 B 的笛卡尔积 $A\times B$ 及 B 与 A 的笛卡尔积 $B\times A$ 是两个不同的集合. 例如，设 $A=\{1\}$，$B=\{2,3\}$，则有

$$A \times B = \{(1,2),(1,3)\} \neq \{(2,1),(3,1)\} = B \times A.$$

例 1.2 $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ 是可数集.

证 将 $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ 的元素，排成如图 1.1 的形式：

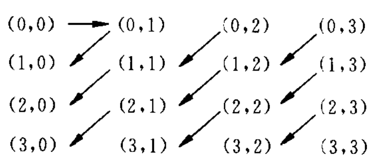


图 1.1

按对角线方法重新排列成一行：

$(0,0),(0,1),(1,0),(0,2),(1,1),(2,0),(0,3),(1,2),(2,1),(3,0),\cdots$.

令
$$(i,j)\to\frac{1}{2}(i+j)(i+j+1)+i,$$

这是 $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ 与 $\mathbf{N}$ 的一个一一对应，所以 $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ 是可数集. □

按例 1.2 的思路，请读者自行证明有理数集是可数集.

下面，通过分析一个例子来讨论如何给出“关系”的定义.

例 1.3 设 $A=\{1,3,5\}$，$B=\{2,4\}$，令

$$S = \{(a,b) | (a,b) \in A \times B \quad \text{且满足}\ a \leqslant b\},$$

则 $$S = \{(1,2),(1,4),(3,4)\}.$$

分析：易知 S 为 $A\times B$ 的一个子集，并且，对于 $(a,b)\in A\times B$ 来说，a 与 b 是否满足"$\leqslant$"完全等价于 (a,b) 是否属于 S. 这表明 S 可看作介于 A 与 B 的元素之间的一种联系和规则，即关系"$\leqslant$".

故此，可把"关系"的概念定义如下.

定义 1.3 设 A,B 为两个集合. $A\times B$ 的子集 R 称为从 A 到 B 的一个**二元关系**(binary relation)；$(a,b)\in R$ 称为 a 与 b **具有关系** R，也记为 aRb，否则，即 $(a,b)\overline{\in}R$ 称为 a 与 b **不具有关系** R，也记为 $a\overline{R}b$. 当 $R=\varnothing$ 以及 $A\times B$ 时，分别称为**空关系**和**全关系**. 特别地，当 $A=B$ 时，R 称为 A 上的一个二元关系.

类似地，可定义 n 个集合之间的 n 元关系和一个集合上的 n 元关系.

例如 A,B 是有限集. 设 $|A|=m,|B|=n$，A 到 B 的二元关系可以用一个 0－1 矩阵 $\boldsymbol{R}=(r_{ij})_{m\times n}$ 来表示，通常称为**关系矩阵**. 如 a_iRb_j，则 $r_{ij}=1$，否则 $r_{ij}=0$. 在例 1.3 中的$\leqslant$关系的关系矩阵是

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

为了直观，也可用图示法，写出 A,B 的元素后，当 aRb，自 a 到 b 画一箭头，表示 $(a,b)\in R$，例 1.3 的关系如图 1.2 表示.

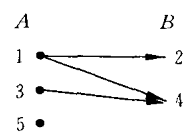


图 1.2

例 1.4 对整数集 **Z** 中任意两个元 a,b，规定 $aRb \Leftrightarrow 3|a-b$. 其中 $3|a-b$ 表示 $a-b$ 能被 3 整除. 对于整数集的子集，例如 $S=\{1,4,7,10,\cdots\}$，其中任意两个元素都有关系 R，$T=\{2,5,8,11,\cdots\}$ 中任意两个元素也有关系 R，但是 S 中任意一个元素和 T 中任意一个元素之间不存在关系 R. 这个关系 R 通常也记作 $a\equiv b(\mathrm{mod}\ 3)$，称 R 为模 3 同余关系. 此时

$$R = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbf{Z} \text{ 且 } a \equiv b(\mathrm{mod} 3)\}$$
$$= \{(1,4),(1,7),\cdots,(2,5),(2,8),\cdots,(3,6),(3,9),\cdots\}$$

为 $\mathbf{Z}$ 上的一个二元关系.

类似地，可以定义模 2 同余关系，模 4 同余关系，乃至模 n 同余关系，$a \equiv b(\mathrm{mod}\ n)$：

$$a \equiv b(\mathrm{mod}\ n),\ n \in \mathbf{N} \Leftrightarrow n \mid a - b.$$

二元关系是涉猎非常广的概念，除了常见的比如数中的"≥"、"="、"≤"等以及矩阵中的相抵关系、相似关系、相合关系等均为二元关系外，实际上，微积分中的"函数"以及已学过的各种运算，比如集合运算、矩阵运算、向量运算等等也都为二元关系.

例 1.5 $R_1 = \{(x,y) \mid x,y \in \mathbf{R} \text{ 且 } \sin x = y\}$ 为 $\mathbf{R}$ 上的二元关系.

$R_2 = \{((A,B),C) \mid A,B,C \in P(E) \text{ 且 } A \cap B = C\}$ 为 $P(E) \times P(E)$ 到 $P(E)$ 上的二元关系.

另外，从定义 1.3 中知，从 A 到 B（包含 $A=B$ 的情形）的一个二元关系就是 $A \times B$ 的一个子集. 因此，当 A,B 均为有限集时，我们很容易求出从 A 到 B 应有多少种二元关系. 当然，当 A 或 B 为无限集时，求从 A 到 B 有多少种二元关系就并非易事了.

总之，二元关系是涉及范围非常广的概念，为了达到揭示事物的本质和规律（体现在数学上就是"不变量"和"不变性"）之目的，就要对各种各样的二元关系进行研究. 自然地，我们要问，哪些二元关系是重要的？它们具有什么样的特性？一般地讲，一个集合上的"等价关系"和"序关系"以及不同集合（包括集合相等的情况）上的"映射或运算"等二元关系最为重要. 我们将在下面的章节中对这几种重要的二元关系逐个展开讨论. 这里先介绍一个集合上的二元关系可能具备的一些最基本性质，其目的是为后面刻画"等价关系"和"序关系"做准备工作.

定义 1.4 设 R 是集合 A 上的一个二元关系.