现 代 数 学 基 础 丛 书

公理集合论导引

张锦文 著

学 出 版 社

现代数学基础丛书

公理集合论导引

张锦文 著

科学出版社
1997

内 容 简 介

与通常的公理集合论著作不同，本书在引入形式系统之前首先直观而又严谨地阐述了类、集合、序数、基数以及势的概念，为没有受过逻辑训练的读者掌握集合论的基本概念提供了方便。第六章引进了集合论形式语言和ZF形式公理系统，对直观集合论中的概念和公理进行了形式化处理，并在此基础上建立了若干逻辑定理．以后各章介绍了公理集合论中的主要方法和结果，以及作者本人的研究成果．

本书可供大专院校数学系学生、教师以及有关研究人员阅读。

现代数学基础丛书
公理集合论导引
张锦文 著
责任编辑 梅 霖
科学出版社出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
中国科学院印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售
*
1991年1月第一版　开本：850×1168 1/32
1997年8月第二次印刷　印张：11 3/8
印数：1 501—3 500　字数：295 000
ISBN 7-03-001849-4/O·360
定价：18.00元

序

公理集合论是康托尔朴素集合论与初等逻辑相汇合的结果．它既是一门纯数学（数理逻辑的主要分支之一），又是现代数学（包括连续数学与离散数学）的基础，是各门数学的精确、严谨而又简便的语言．它在计算机科学、人工智能学、逻辑学、经济学、语言学和心理学等方面有着重要的应用．

公理集合论也是一门正在深入发展的数学理论．连续统问题、大基数问题、选择公理、决定性公理等都是人们所关注的研究课题，新的问题也在不断产生，这说明它仍然是方兴未艾的学科．人们正是通过研究与解决这一学科的问题来锻炼自己的意志和能力．连续统问题已有一百多年的历史，虽然取得了重大进展，但还没有最后解决．我们相信，人类终归要解决它的．在解决它和其它问题的过程中，人们必将发现新方法和新观点，从而达到更广阔更自由的境界．

本书的目的是系统地阐述公理集合论的基本概念、基本方法和主要成果．前五章是从严谨而又直观的角度阐述了类、集合、序数、基数以及势的概念与性质．在康托尔时代，这些概念都含有某种未被澄清的含糊性，从而出现了若干悖论．近几十年，人们弄清了这些概念的本质，消除了它们的含糊性，避免了各种悖论，并通过形式化方法，把有关概念建立在严谨的基础上．因此，在通常的著作中，人们都是在形式系统内陈述这些概念并论证它们的性质的．本书采用了不同的叙述方法，在引入形式系统之前直观地阐述了这些内容，这为没有逻辑训练的读者提供了方便．前五章虽然没有专门讨论逻辑概念，但是由于对每一重要概念都是严谨地逻辑地展开的，因此读者也可以从中得到较好的逻辑训练．第六章引进了集合论形式语言和 ZF（蔡梅罗-弗兰克尔）形式公理系

统，建立了若干逻辑定理。第七章直观地阐述选择公理的形式与应用，讨论了与它相矛盾的决定性公理。第八章建立了公式的层次概念，并对重要的元数学概念进行了形式化处理。第九、十两章分别阐述了哥德尔和科恩的结果与方法。可构成方法、力迫方法是现代集合论中最主要的方法。连续统假设、选择公理的相对协调性与独立性定理是这一领域中的中心结果。第十一章阐述了涉及类、超类与聚合的公理系统，一方面是为了引入与形式化相应的概念，论述ZF系统的协调性；另一方面是为了开拓公理集合论的内容，研究包括范畴论在内的数学基础。

本书力求易读，对于某些深奥的、难理解的概念、方法和结果，我们尽力作出直观解释，配以图形显示，有时也采用举例与注记的方式给以说明。

作者十分感谢程民德老师、胡世华老师的谆谆教导。

近十几年内，作者曾多次同吴允曾、胡国定、杨东屏、徐书润、周治章、张宏裕、陆尚强、王雪生、廖祖纬等先生探讨集合论的各种概念、方法、问题、结果与进展。他们都以不同的方式从不同的角度给作者以帮助。这对于作者组织本书的章节，澄清和提炼若干概念都起了重要作用。

在1974年以后的几年内，作者曾向王驹等同志讲述本书的主要内容，与他合作的《脱殊集合的若干注记》一文中的结果已在本书第十章§16中出现。

近几年内，作者曾在不同的场合多次讲述本书的主要内容，不少青年朋友，如秦克云、胡洪德和赵希顺等，在学习过程中都曾提出过宝贵的建议。

作者对以上各位谨致谢意。

限于水平，错误与不妥当之处，敬请读者指正。

作者

一九八九年于北京

目　录

第一章　集合与类

§1　外延原则与概括原则

每个人都知道许多集合，但是，值得注意的是集合这一重要的概念，没有一个严谨的数学定义，只是有一个描述性的说明．我国出版的第一本集合论著作——肖文灿的《集合论初步》[1]中，转述了集合论创始人康托尔（Cantor）对集合的刻划："吾人直观或思维之对象，如为相异而确定之物，其总括之全体即谓之集合，其组成此集合之物谓之集合之*元素*．通常用大写字母表示集合，如A,B,C等，用小写字母表示元素，如a，b，c等．若集合A系由a，b，c，…诸元素所组成，则表如$A=\{a, b, c, \cdots\}$，而a为A之元素，亦常用$a\in A$之记号表之者，a非A之元素，则记如$a\notin A$．"肖文灿对康托尔的上述概念还作了一个有价值的注解，他说："上之定义中，其所用之'相异'与'确定'之二语，殊有说明之必要，所谓相异者取二物于此，其为同一，其为相异，而得而决定．而集合所含之元素乃有彼此不同之意味．所谓确定者，此物是否属于此集合，一望而知，至少其概念上可以断定其是否为该集合之元素．盖于某某条件之集合，须其界限分明，不容有模糊不清之弊．如1，2，3三元素可组成一集合，单位长直线上之一切点可组成一集合；反之，如甚大之数或与点P接近之点，则不能为集合，因其界限不清．"

直观或思维之对象，总括之全体即谓之集合．如何"总括"呢？"总括之全体"意味着什么呢？这里有两条重要的原则，一是外延原则，一是概括原则．

外延原则：一集合是由它的元素完全决定的．

换句话说，任给两个集合，当我们知道它们的元素相同时，由外延原则，我们可知它们是同一集合．

概括原则：对于描述或刻划人们直观的或思维的对象x的任一性质或条件$p(x)$，都存在一集合S，它的元素恰好是具有性质p的那些对象，亦即

$$S=\{x \mid p(x)\},$$

其中$p(x)$是指"x具有性质p"，或说$p(x)$为真的，这样，就有

$$\forall x(x \in S \longleftrightarrow p(x)),$$

其中$\forall x$表示"对于所有的对象x，"$\longleftrightarrow$表示"当且仅当"。任意的对象都可以作为集合的元素，特别地，集合也是人们思维的对象，所以集合也可以作集合的元素。

对象的性质或条件这一概念是广泛的。例如，当我们用$p_1(x)$表示x是一自然数时，性质p_1就是刻划自然数的，2具有性质p_1，所以$p_1(2)$成立，1/2不是一自然数，它不具有性质p_1，所以$p_1(1/2)$不成立。

令N表示自然数集合，我们有$2\in N$，$1/2 \notin N$，并且还有$N \notin N$。这样，对于任意的集合x, y，$x \in y$是x的一性质*，$x \notin y$也是一性质，特别地，$x \in x$与$x \notin x$都是x的性质。这样，由概括原则，我们有集合：

$$\boldsymbol{T}=\{x \mid x \notin x\}. \tag{1.1}$$

在式(1.1)中，x是任意的对象。由概括原则，$\boldsymbol{T}$是一集合，所以它也是一对象，这样我们可以问，$\boldsymbol{T}$是否在$\boldsymbol{T}$中呢？

假定$\boldsymbol{T}\in\boldsymbol{T}$，由式(1.1)，$\boldsymbol{T}$具有性质$\boldsymbol{T}\notin\boldsymbol{T}$。这与假定$\boldsymbol{T}\in\boldsymbol{T}$相矛盾。

假定$\boldsymbol{T}\notin\boldsymbol{T}$，由式(1.1)，$\boldsymbol{T}$就是集合$\boldsymbol{T}$的一个元素，所以有$\boldsymbol{T}\in\boldsymbol{T}$，这与假定$\boldsymbol{T}\notin\boldsymbol{T}$相矛盾。

在逻辑学中，所谓悖论，是指这样一个命题A，由A出发，可以找到一个命题B，然后，若假定B，就可推得$\neg B$；若假定$\neg B$，就可推得B。由上论证，$\boldsymbol{T}$为集合可引出一悖论（并且相应的命题B就是$\boldsymbol{T}\in\boldsymbol{T}$，$\neg B$就是$\boldsymbol{T}\notin\boldsymbol{T}$）。它就是1902年罗素(Russell)发现的著名的集合论悖论。

---

* 前面提到，集合也可作为集合的元素，"$X\in Y$"即是这一含义。

罗素悖论说明应当修改概括原则，需要把其中的“存在一集合S”改为“存在一类S”.它作为对类的一种直观的刻划.换句话说，康托尔对集合的刻划仅仅是对类的一种刻划.类是比集合的概念更广泛的概念.任一集合都是一类，反之不然.有些类是集合，另一些类不是集合.如上陈述的，T就是一个类，而不是一个集合(不是集合的类我们称之为*真类*).集合可以作为对象属于某一集合，真类不具有这一性质.不是集合的真类不仅不能是一集合的元素，而且也不能是一个类的元素.真类不能作为我们形成集合的对象.

集合与类都必须满足外延原则.集合与类都是由它的元素完全决定的.由概括原则决定的都是类，不一定都是集合.当然，每一集合都可以经过一性质，由概括原则所决定.但是，一性质却不一定能决定集合，例如$x\notin x$就不能决定集合，而决定一真类.为了研究集合，就要修改概括原则，用下述原则1—6来取代概括原则.这些原则对集合是封闭的，它们不会导出真类来.

§2 空集合与对集合的存在原则

原则1 存在着一个空集合.这里**空集合**是不含有任何元素的集合，并记做$\varnothing$.

我们知道，任一对象x总是与它自身是相同的，即$x=x$.满足$x\neq x$的对象x是不存在的.所以由条件$x\neq x$，经概括原则决定的类就是空类，空类可以做为一对象形成一集合，所以，空类是一集合，即空集合.

原则2 对于任意的集合x，y，都存在着一集合S，它恰有元素x与y，这一集合S称为x与y的**无序对集合**，并记做$\{x,y\}$，当对象x与y相等时，就记做$\{x\}$，并称$\{x\}$为对象x的**单元集合**，也就是说，它仅有一个元素x.

例1.1 由原则1—2，我们可以有集合：$\varnothing,\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$，$\{\varnothing,\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\},\{\{\varnothing\}\},\{\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\}\}$，等等.

应当注意，在原则2中不能取真类为x或y，真类不能作为我们的对象.

上述集合中的元素是无序的，例如集合 $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$ 等于集合 $\{\{\varnothing\},\varnothing\}$. 有时，我们常常需要有序对集合，它是可以定义的.

定义1.1 对于任意的对象 a 与 b，我们称集合 $\{\{a\},\{a,b\}\}$ 为 a 与 b 的**有序对集合**，并记做 $\langle a,b\rangle$. 亦即

$$\langle a,b\rangle=\{\{a\},\{a,b\}\}.$$

定理1.1 对于任意的对象 a，b，u，v，我们有

$\langle a,b\rangle=\langle u,v\rangle$ 当且仅当 $a=u$ 且 $b=v$.

证明 当 $a=u$ 且 $b=v$ 时，由定义1.1，显然有 $\langle a,b\rangle=\langle u,v\rangle$. 反之，假定 $\langle a,b\rangle=\langle u,v\rangle$，亦即

$$\{\{a\},\{a,b\}\}=\{\{u\},\{u,v\}\},\tag{1.2}$$

因此必有

$$\{a\}\in\{\{u\},\{u,v\}\}\tag{1.3}$$

$$\{a,b\}\in\{\{u\},\{u,v\}\}\tag{1.4}$$

同时成立. 由式（1.3），可得

$$\{a\}=\{u\}\tag{1.5}$$

$$\{a\}=\{u,v\}\tag{1.6}$$

中必有一个成立. 由式（1.4）我们获得

$$\{a,b\}=\{u\}\tag{1.7}$$

$$\{a,b\}=\{u,v\}\tag{1.8}$$

中必有一个成立.

若式（1.5）成立，即得到 $a=u$. 此时当（1.7）成立时，就获得 $a=b=u$. 这时，由式（1.2）必有 $\{u,v\}=\{a\}$，故 $v=a$. 所以 $a=u$，$b=v$. 此时当式（1.8）成立时，必有 $a=u$ 且 $b=v$ 或者 $a=v$ 且 $b=u$，（这时，由已知 $a=u$，故有 $a=b=u=v$ 成立）. 不管怎样，这时都有欲求结果.

若式（1.6）成立. 因此有 $a=u=v$，此时，若式（1.7）成立，即得 $a=b=u=v$ 成立. 此时若式（1.8）成立. 也有 $a=b=u=b$. 综上所述，不管怎样，都证明了定理1.1的结论成立.

§3 幂集合的存在原则

定义1.2 对于任意的两个集合 S_1，S_2，如果 S_1 的每一元素都是S_2的元素，我们就称集合S_1是S_2的**子集合**，并记做$S_1 \subset S_2$。

定理1.2 空集合是任一集合的子集合．

证明 假定不然，亦即有一集合S，使得 $\varnothing \not\subset S$（表示$\varnothing$不是$S$的子集合）．由定义1.2，就意味着有一元素 a，使得 $a \in \varnothing$ 且 $a \notin S$．由于$a \in \varnothing$与空集合的定义相矛盾．故假定不成立．所以有$\varnothing \subset S$。

定理1.3 对于任意的集合S，都有$S \subset S$。

从定义1.2，定理1.3是显然的，从略．

定理1.4 对于任意的集合 S_1，S_2 与 S_3，如果$S_1 \subset S_2$且$S_2 \subset S_3$，则$S_1 \subset S_3$。

证明 对于任意的对象a，若$a \in S_1$，由$S_1 \subset S_2$及定义1.2，就有$a \in S_2$，再依据 $S_2 \subset S_3$，就有 $a \in S_3$．所以，由定义1.2，有$S_1 \subset S_3$。

定义1.3 对于任意给定的集合S，由S的每一子集合作为元素所形成的集合叫做S的**幂集合**，并记做$\mathscr{P}(S)$．即

$$\mathscr{P}(S)=\{x \mid x \subset S\}.$$

原则3 对于任意的集合S，都存在S的幂集合$\mathscr{P}(S)$。

定理1.5 对于任意的集合 S，当 S 中元素数目为 n 时，则$\mathscr{P}(S)$ 中的元素数目为2^n。

施归纳于S中元素的数目，使用数学归纳法可获得定理1.5的证明．这里从略．

应当注意，原则3中S必须是一集合，而不能是真类．

§4 并集合存在原则

定义1.4 对于任意的集合S，由 S 的所有元素的元素所组成的集合，叫做S的**并集合**，并记做$\bigcup S$．即

$$\bigcup S=\{x \mid \exists y(x \in y \wedge y \in S)\},$$

其中$\exists y$表示"存在一对象y"。

例1.2 令S为集合$\{\{a,b\},\ \{b,c\}\}$，这时，S的元素为$\{a,b\}$与$\{b,c\}$，并集合$\bigcup S$由此二集合的元素组成，故

$$\bigcup S=\{a,b,c\}.$$

例1.3 令$S=\{\{a,b,c\},\ \{a,cd\},\ \{c,e\}\}$，由定义，可知

$$\bigcup S=\{a,b,c,d,e\}.$$

例1.4 令$S_1=\{a,b,c\}$，这时

$$\mathscr{P}(S_1)=\{\varnothing,\ \{a\},\ \{b\},\ \{c\},\ \{a,b\},\ \{a,c\},\ \{b,c\},\ \{a,b,c\}\}.$$

取S为$\mathscr{P}(S_1)$，我们有

$$\bigcup S=\bigcup\mathscr{P}(S_1)=\{a,b,c\}=S_1.$$

原则4 对于任意的集合S，都存在S的并集合$\bigcup S$。

通常，人们把任意两个集合S_1与S_2的元素搜集在一起，组成一新的集合叫做集合S_1与S_2的并集合，并记做$S_1\cup S_2$.现在，使用无序对集合和并集合，我们有

$$S_1\cup S_2=\bigcup\{S_1,\ S_2\}.$$

在定义1.4中把S推广为任一类，$\bigcup S$还是一类，也可能是一真类，原则4是说，当S为一集合时，$\bigcup S$就不仅是一类，而且是一集合。

§5 子集合分离原则

我们已经指出，对于任意给定的性质$p(x)$，由概括原则，都决定一类

$$C=\{x\mid p(x)\}. \tag{1.9}$$

C是一类，仅从式（1.9），我们不能保证C是一集合.如果我们能找到一集合S，使得$C\subset S$时，这时由下述原则5，我们可以断定C是一集合（图1.1）。另一方面，虽然C不一定是一集合，但是它同任一集合S的交，即

$$C\cap S=\{x\mid x\in C\wedge x\in S\} \tag{1.10}$$

总是一集合（图1.2）。

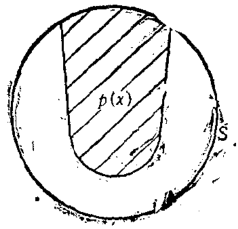

图 1.1　一类C被某一集合S所包含时，C为一集合

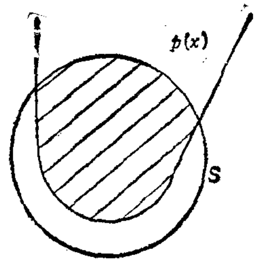

图 1.2　一类C与任一集合相交的部分是一集合

由式（1.9）和$C\subset S$，我们有

$$C=\{x\mid p(x)\wedge x\in S\},\tag{1.11}$$

而由式（1.10），我们有

$$C\cap S=\{x\mid p(x)\wedge x\in S\}.\tag{1.12}$$

因此，由式（1.11）与（1.12），我们都有

原则5　对于任意给定的性质$p(x)$和集合S，都有集合

$$S_1=\{x\mid p(x)\wedge x\in S\}$$

存在。

不管怎样，集合

$$S_1=\{x\mid p(x)\wedge x\in S\}$$

都是S的子集合，并且把集合S_1看做是从集合S中使用性质$p(x)$提取（或分离）出来的。因此，人们把原则5称为**子集合分离原则**。由这一原则我们立即可以获得二集合S_1与S_2的交集合$S_1\cap S_2$的合理性定义

$$S_1\cap S_2=\{x\mid x\in S_1\wedge x\in S_2\},\tag{1.13}$$

其中性质$p(x)$为$x\in S_2$。当令性质$p(x)$为$x\notin S_2$时，我们就获得集合S_1与S_2的**相对补**（或称集合S_2相对于集合S_1之补）的合理性定义：

$$S_1\dot{-}S_2=\{x\mid x\in S_1\wedge x\notin S_2\}.\tag{1.14}$$