

现代数学基础丛书

公理集合论导引

● 张锦文 著



学

学 出 版 社

U166
216-2

409363

现代数学基础丛书

公理集合论导引

张锦文 著



科学出版社

1997

DU98/09

内 容 简 介

与通常的公理集合论著作不同,本书在引入形式系统之前首先直观而又严谨地阐述了类、集合、序数、基数以及势的概念,为没有受过逻辑训练的读者掌握集合论的基本概念提供了方便。第六章引进了集合论形式语言和ZF形式公理系统,对直观集合论中的概念和公理进行了形式化处理,并在此基础上建立了若干逻辑定理,以后各章介绍了公理集合论中的主要方法和结果,以及作者本人的研究成果。

本书可供大专院校数学系学生、教师以及有关研究人员阅读。

现代数学基础丛书 公理集合论导引

张锦文 著

责任编辑 梅霖

科学出版社出版

北京东黄城根北街10号

邮政编码:100717

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1991年1月第一版

开本:860×1168 1/32

1997年8月第二次印刷

印张:11.3/8

印数:1501-3500

字数:295 000

ISBN 7-03-001849-4/O·360

定价:18.00元

序

公理集合论是康托尔朴素集合论与初等逻辑相汇合的结果。它既是一门纯数学（数理逻辑的主要分支之一），又是现代数学（包括连续数学与离散数学）的基础，是各门数学的精确、严谨而又简便的语言。它在计算机科学、人工智能学、逻辑学、经济学、语言学 and 心理学等方面有着重要的应用。

公理集合论也是一门正在深入发展的数学理论。连续统问题、大基数问题、选择公理、决定性公理等都是人们所关注的研究课题，新的问题也在不断产生，这说明它仍然是方兴未艾的学科。人们正是通过研究与解决这一学科的问题来锻炼自己的意志和能力。连续统问题已有一百多年的历史，虽然取得了重大进展，但还没有最后解决。我们相信，人类终究要解决它的。在解决它和其它问题的过程中，人们必将发现新方法和新观点，从而达到更广阔更自由的境界。

本书的目的是系统地阐述公理集合论的基本概念、基本方法和主要成果。前五章是从严谨而又直观的角度阐述了类、集合、序数、基数以及势的概念与性质。在康托尔时代，这些概念都含有某种未被澄清的含糊性，从而出现了若干悖论。近几十年，人们弄清了这些概念的本质，消除了它们的含糊性，避免了各种悖论，并通过形式化方法，把有关概念建立在严谨的基础上。因此，在通常的著作中，人们都是在形式系统内陈述这些概念并论证它们的性质的。本书采用了不同的叙述方法，在引入形式系统之前直观地阐述了这些内容，这为没有逻辑训练的读者提供了方便。前五章虽然没有专门讨论逻辑概念，但是由于对每一重要概念都是严谨地逻辑地展开的，因此读者也可以从中得到较好的逻辑训练。第六章引进了集合论形式语言和 ZF（蔡梅罗-弗兰克尔）形式公理系

统，建立了若干逻辑定理。第七章直观地阐述选择公理的形式与应用，讨论了与它相矛盾的决定性公理。第八章建立了公式的层次概念，并对重要的元数学概念进行了形式化处理。第九、十两章分别阐述了哥德尔和科恩的结果与方法。可构成方法、力迫方法是现代集合论中最主要的方法。连续统假设、选择公理的相对协调性与独立性定理是这一领域中的中心结果。第十一章阐述了涉及类、超类与聚合的公理系统，一方面是为了引入与形式化相应的概念，论述ZF系统的协调性；另一方面是为了开拓公理集合论的内容，研究包括范畴论在内的数学基础。

本书力求易读，对于某些深奥的、难理解的概念、方法和结果，我们尽力作出直观解释，配以图形显示，有时也采用举例与注记的方式给以说明。

作者十分感谢程民德老师、胡世华老师的谆谆教导。

近十几年内，作者曾多次同 吴允曾、胡国定、杨东屏、徐书润、周治章、张宏裕、陆尚强、王雪生、廖祖纬等先生探讨集合论的各种概念、方法、问题、结果与进展。他们都以不同的方式从不同的角度给作者以帮助。这对于作者组织本书的章节，澄清和提炼若干概念都起了重要作用。

在1974年以后的几年内，作者曾向王驹等同志讲述本书的主要内容，与他合作的《脱殊集合的若干注记》一文中的结果已在本书第十章 § 16 中出现。

近几年内，作者曾在不同的场合多次讲述本书的主要内容，不少青年朋友，如秦克云、胡洪德和赵希顺等，在学习过程中都曾提出过宝贵的建议。

作者对以上各位谨致谢意。

限于水平，错误与不妥当之处，敬请读者指正。

作者

一九八九年于北京

目 录

序

第一章 集合与类	1
§ 1 外延原则与概括原则.....	1
§ 2 空集合与对集合的存在原则.....	3
§ 3 幂集合的存在原则.....	5
§ 4 并集合存在原则.....	5
§ 5 子集合分离原则.....	6
§ 6 关系.....	9
§ 7 函数.....	12
§ 8 单值化原则.....	16
§ 9 替换原则.....	18
§ 10 类与集合的封闭性运算.....	19
§ 11 存在极小元原则.....	20
习题	23
第二章 序数	28
§ 1 自然数集合.....	28
§ 2 传递集合.....	32
§ 3 自然数集合的三歧性.....	35
§ 4 序数的定义.....	37
§ 5 序数的传递性与三歧性.....	38
§ 6 序数的性质.....	41
§ 7 超穷归纳法.....	47
§ 8 序数算术.....	50
§ 9 良序关系与良序集合.....	55
习题	61
第三章 基数	62
§ 1 可数序数.....	62

§ 2	基数的定义	66
§ 3	基数 ω_1	67
§ 4	大于 ω_1 的基数	69
§ 5	基数的三歧性	71
§ 6	共尾性	71
§ 7	正则基数与奇异基数	76
§ 8	弱不可达基数	77
§ 9	序数的划分与良序集合的划分	78
§ 10	\mathbf{O}_n 与 \mathbf{Ca} 的同构性	80
	习题	82
第四章 秩、递归定理与良基关系		83
§ 1	传递闭包	83
§ 2	集合的秩与良基集合	85
§ 3	外延集合	88
§ 4	集合的分层	89
§ 5	函数的相容性	92
§ 6	递归定理	93
§ 7	超穷递归	97
§ 8	良基关系	99
§ 9	树	102
§ 10	良基的类关系	104
§ 11	同构	109
	习题	113
第五章 集合的势		115
§ 1	势的概念	115
§ 2	类 \mathbf{Po} 的偏序性	117
§ 3	康托尔定理	120
§ 4	连续统假设	121
§ 5	基数的初等运算	127
§ 6	莱文海姆-斯科伦定理	129
§ 7	寇尼定理	130
§ 8	不可达基数	138
	习题	140

第六章 公理与逻辑	142
§ 1 公理方法.....	142
§ 2 ZF 形式语言.....	144
§ 3 ZF 公理系统.....	145
§ 4 逻辑演算.....	149
§ 5 证明与定理.....	152
§ 6 协调性与可满足性.....	153
§ 7 完全性定理.....	156
§ 8 系统Z与替换公理.....	159
§ 9 正则公理.....	161
§ 10 ZFC的有穷子系统.....	163
§ 11 形式推演.....	165
§ 12 ZF 可定义类.....	168
习题	170
第七章 选择公理	172
§ 1 乘积定理.....	172
§ 2 良序定理.....	173
§ 3 佐恩引理.....	175
§ 4 七条等价性定理.....	177
§ 5 AC的三项推论.....	181
§ 6 决定性公理.....	184
§ 7 ZF + AD的两条定理.....	185
§ 8 选择公理的几种弱形式.....	186
习题	188
第八章 ZF语言中公式的层次	189
§ 1 公式集合 Σ_0	189
§ 2 公式集合 Σ_n 与 Π_n	192
§ 3 公式集合 Δ^{ZF}_n	197
§ 4 可允许运算.....	199
§ 5 Σ^{ZF}_0 中公式的补充.....	202
§ 6 元数学概念的形式化.....	203
习题	211

第九章 AC, GCH相对ZF的协调性	213
§ 1 序数平面及配对函数	213
§ 2 序数平面上的九层楼	221
§ 3 基本运算	225
§ 4 L 的构造与性质	227
§ 5 可构成类	232
§ 6 ZF的可构成模型 L	236
§ 7 L 中的序数与可构成公理	238
§ 8 相对性与绝对性	240
§ 9 可构成公理在 L 中成立的证明	243
§ 10 序数集合与关系的同构性	244
§ 11 $ZF \vdash V = L \rightarrow AC \wedge GCH$	248
§ 12 L 的另一定义	258
习题	260
第十章 AC, GCH相对于ZF的独立性	261
§ 1 ZF的协调性问题	261
§ 2 扩充的ZF语言	267
§ 3 可数模型	269
§ 4 $ZF + V = L$ 的可数标准构成性模型	271
§ 5 内模型方法	273
§ 6 不可数模型	275
§ 7 加宽模型与力迫条件	276
§ 8 标号空间及相应的形式语言	279
§ 9 力迫概念	281
§ 10 力迫关系的基本性质	285
§ 11 力迫关系的绝对性	290
§ 12 模型 N_1 : $ZF \vdash GCH + AC \rightarrow V = L$	293
§ 13 力迫概念 (续)	299
§ 14 连续统假设	301
§ 15 选择公理	309
§ 16 脱殊集合	312
习题	315
第十一章 类公理与聚合公理	317

§ 1 类的形式语言.....	317
§ 2 NBG公理系统.....	318
§ 3 GB系统中类的概括原则	320
§ 4 NBG的协调性.....	321
§ 5 QM公理系 统.....	323
§ 6 超类及其公理系统.....	324
§ 7 聚合公理系统ACG.....	325
§ 8 二型序数.....	328
§ 9 二型序数的性质.....	329
§ 10 二型基数.....	331
§ 11 三项注记.....	332
习题	334
参考文献.....	335
符号说明表	342
中外文人名对照表.....	345
中英文名词对照表	346

第一章 集合与类

§ 1 外延原则与概括原则

每个人都知道许多集合，但是，值得注意的是集合这一重要的概念，没有一个严谨的数学定义，只是有一个描述性的说明。我国出版的第一本集合论著作——肖文灿的《集合论初步》^{〔1〕}中，转述了集合论创始人康托尔（Cantor）对集合的刻划：“吾人直观或思维之对象，如为相异而确定之物，其总括之全体即谓之集合，其组成此集合之物谓之集合之元素。通常用大写字母表示集合，如 A, B, C 等，用小写字母表示元素，如 a, b, c 等。若集合 A 系由 a, b, c, \dots 诸元素所组成，则表如 $A = \{a, b, c, \dots\}$ ，而 a 为 A 之元素，亦常用 $a \in A$ 之记号表之者， a 非 A 之元素，则记如 $a \notin A$ 。”肖文灿对康托尔的上述概念还作了一个有价值的注解，他说：“上之定义中，其所用之‘相异’与‘确定’之二语，殊有说明之必要，所谓相异者取二物于此，其为同一，其为相异，而得而决定。而集合所含之元素乃有彼此不同之意味。所谓确定者，此物是否属于此集合，一望而知，至少其概念上可以断定其是否为该集合之元素。盖于某某条件之集合，须其界限分明，不容有模糊不清之弊。如1, 2, 3三元素可组成一集合，单位长直线上之一切点可组成一集合；反之，如甚大之数或与点 P 接近之点，则不能为集合，因其界限不清。”

直观或思维之对象，总括之全体即谓之集合。如何“总括”呢？“总括之全体”意味着什么呢？这里有两条重要的原则，一是外延原则，一是概括原则。

外延原则：一集合是由它的元素完全决定的。

换句话说，任给两个集合，当我们知道它们的元素相同时，由外延原则，我们可知它们是同一集合。

概括原则：对于描述或刻划人们直观的或思维的对象 x 的任一性质或条件 $p(x)$ ，都存在一集合 S ，它的元素恰好是具有性质 p 的那些对象，亦即

$$S = \{x | p(x)\},$$

其中 $p(x)$ 是指“ x 具有性质 p ”，或说 $p(x)$ 为真的，这样，就有

$$\forall x(x \in S \leftrightarrow p(x)),$$

其中 $\forall x$ 表示“对于所有的对象 x ”， \leftrightarrow 表示“当且仅当”。任意的对象都可以作为集合的元素，特别地，集合也是人们思维的对象，所以集合也可以作集合的元素。

对象的性质或条件这一概念是广泛的。例如，当我们用 $p_1(x)$ 表示 x 是一自然数时，性质 p_1 就是刻划自然数的，2具有性质 p_1 ，所以 $p_1(2)$ 成立， $1/2$ 不是一自然数，它不具有性质 p_1 ，所以 $p_1(1/2)$ 不成立。

令 N 表示自然数集合，我们有 $2 \in N$ ， $1/2 \notin N$ ，并且还有 $N \notin N$ 。这样，对于任意的集合 $x, y, x \in y$ 是 x 的一性质*， $x \notin y$ 也是一性质，特别地， $x \in x$ 与 $x \notin x$ 都是 x 的性质。这样，由概括原则，我们有集合：

$$T = \{x | x \notin x\}. \quad (1.1)$$

在式(1.1)中， x 是任意的对象。由概括原则， T 是一集合，所以它也是一对象，这样我们可以问， T 是否在 T 中呢？

假定 $T \in T$ ，由式(1.1)， T 具有性质 $T \notin T$ 。这与假定 $T \in T$ 相矛盾。

假定 $T \notin T$ ，由式(1.1)， T 就是集合 T 的一个元素，所以有 $T \in T$ ，这与假定 $T \notin T$ 相矛盾。

在逻辑学中，所谓悖论，是指这样一个命题 A ，由 A 出发，可以找到一个命题 B ，然后，若假定 B ，就可推得 $\neg B$ ；若假定 $\neg B$ ，就可推得 B 。由上论证， T 为集合可引出一悖论（并且相应的命题 B 就是 $T \in T$ ， $\neg B$ 就是 $T \notin T$ ）。它就是1902年罗素(Russell)发现的著名的集合论悖论。

* 前面提到，集合也可作为集合的元素，“ $X \in Y$ ”即是这一含义。

罗素悖论说明应当修改概括原则，需要把其中的“存在一集合 S ”改为“存在一类 S ”。它作为对类的一种直观的刻划。换句话说，康托尔对集合的刻划仅仅是对类的一种刻划。类是比集合的概念更广泛的概念。任一集合都是一类，反之不然。有些类是集合，另一些类不是集合。如上陈述的， T 就是一个类，而不是一个集合（不是集合的类我们称之为真类）。集合可以作为对象属于某一集合，真类不具有这一性质。不是集合的真类不仅不能是一集合的元素，而且也不能是一个类的元素。真类不能作为我们形成集合的对象。

集合与类都必须满足外延原则。集合与类都是由它的元素完全决定的。由概括原则决定的都是类，不一定是集合。当然，每一集合都可以经过一性质，由概括原则所决定。但是，一性质却不一定能决定集合，例如 $x \in x$ 就不能决定集合，而决定一真类。为了研究集合，就要修改概括原则，用下述原则1—6来取代概括原则。这些原则对集合是封闭的，它们不会导出真类来。

§ 2 空集合与对集合的存在原则

原则1 存在着一个空集合。这里空集合是不含有任何元素的集合，并记做 \emptyset 。

我们知道，任一对象 x 总是与它自身是相同的，即 $x=x$ 。满足 $x \neq x$ 的对象 x 是不存在的。所以由条件 $x \neq x$ ，经概括原则决定的类就是空类，空类可以做为一对象形成一集合，所以，空类是一集合，即空集合。

原则2 对于任意的集合 x, y ，都存在着一集合 S ，它恰有元素 x 与 y ，这一集合 S 称为 x 与 y 的**无序对集合**，并记做 $\{x, y\}$ ，当对象 x 与 y 相等时，就记做 $\{x\}$ ，并称 $\{x\}$ 为对象 x 的**单元集合**，也就是说，它仅有一个元素 x 。

例1.1 由原则1—2，我们可以有集合： $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$ ，等等。

应当注意，在原则2中不能取真类为 x 或 y ，真类不能作为我们的对象。

上述集合中的元素是无序的, 例如集合 $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ 等于集合 $\{\{\emptyset\}, \emptyset\}$. 有时, 我们常常需要有序对集合, 它是可以定义的.

定义1.1 对于任意的对象 a 与 b , 我们称集合 $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ 为 a 与 b 的有序对集合, 并记做 $\langle a, b \rangle$. 亦即

$$\langle a, b \rangle = \{\{a\}, \{a, b\}\}.$$

定理1.1 对于任意的对象 a, b, u, v , 我们有

$$\langle a, b \rangle = \langle u, v \rangle \text{ 当且仅当 } a=u \text{ 且 } b=v.$$

证明 当 $a=u$ 且 $b=v$ 时, 由定义1.1, 显然有 $\langle a, b \rangle = \langle u, v \rangle$.

反之, 假定 $\langle a, b \rangle = \langle u, v \rangle$, 亦即

$$\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{u\}, \{u, v\}\}, \quad (1.2)$$

因此必有

$$\{a\} \in \{\{u\}, \{u, v\}\} \quad (1.3)$$

$$\{a, b\} \in \{\{u\}, \{u, v\}\} \quad (1.4)$$

同时成立. 由式 (1.3), 可得

$$\{a\} = \{u\} \quad (1.5)$$

$$\{a\} = \{u, v\} \quad (1.6)$$

中必有一个成立. 由式 (1.4) 我们获得

$$\{a, b\} = \{u\} \quad (1.7)$$

$$\{a, b\} = \{u, v\} \quad (1.8)$$

中必有一个成立.

若式 (1.5) 成立, 即得到 $a=u$. 此时当 (1.7) 成立时, 就获得 $a=b=u$. 这时, 由式 (1.2) 必有 $\{u, v\} = \{a\}$, 故 $v=a$. 所以 $a=u, b=v$. 此时当式 (1.8) 成立时, 必有 $a=u$ 且 $b=v$ 或者 $a=v$ 且 $b=u$, (这时, 由已知 $a=u$, 故有 $a=b=u=v$ 成立). 不管怎样, 这时都有欲求结果.

若式 (1.6) 成立. 因此有 $a=u=v$, 此时, 若式 (1.7) 成立, 即得 $a=b=u=v$ 成立. 此时若式 (1.8) 成立. 也有 $a=b=u=v$. 综上所述, 不管怎样, 都证明了定理1.1的结论成立.

§ 3 幂集合的存在原则

定义1.2 对于任意的两个集合 S_1, S_2 , 如果 S_1 的每一元素都是 S_2 的元素, 我们就称集合 S_1 是 S_2 的子集合, 并记做 $S_1 \subset S_2$.

定理1.2 空集合是任一集合的子集合.

证明 假定不然, 亦即有一集合 S , 使得 $\emptyset \not\subset S$ (表示 \emptyset 不是 S 的子集合). 由定义1.2, 就意味着有一元素 a , 使得 $a \in \emptyset$ 且 $a \notin S$. 由于 $a \in \emptyset$ 与空集合的定义相矛盾. 故假定不成立. 所以有 $\emptyset \subset S$.

定理1.3 对于任意的集合 S , 都有 $S \subset S$.

从定义1.2, 定理1.3是显然的, 从略.

定理 1.4 对于任意的集合 S_1, S_2 与 S_3 , 如果 $S_1 \subset S_2$ 且 $S_2 \subset S_3$, 则 $S_1 \subset S_3$.

证明 对于任意的对象 a , 若 $a \in S_1$, 由 $S_1 \subset S_2$ 及定义1.2, 就有 $a \in S_2$, 再依据 $S_2 \subset S_3$, 就有 $a \in S_3$. 所以, 由定义1.2, 有 $S_1 \subset S_3$.

定义1.3 对于任意给定的集合 S , 由 S 的每一子集合作为元素所形成的集合叫做 S 的幂集合, 并记做 $\mathscr{P}(S)$. 即

$$\mathscr{P}(S) = \{x \mid x \subset S\}.$$

原则3 对于任意的集合 S , 都存在 S 的幂集合 $\mathscr{P}(S)$.

定理1.5 对于任意的集合 S , 当 S 中元素数目为 n 时, 则 $\mathscr{P}(S)$ 中的元素数目为 2^n .

施归纳于 S 中元素的数目, 使用数学归纳法可获得定理1.5的证明. 这里从略.

应当注意, 原则3中 S 必须是一集合, 而不能是真类.

§ 4 并集合存在原则

定义1.4 对于任意的集合 S , 由 S 的所有元素的元素所组成的集合, 叫做 S 的并集合, 并记做 $U S$. 即

$$U S = \{x \mid \exists y (x \in y \wedge y \in S)\},$$

其中 $\exists y$ 表示“存在一对象 y ”。

例1.2 令 S 为集合 $\{a, b\}, \{b, c\}$ ，这时， S 的元素为 $\{a, b\}$ 与 $\{b, c\}$ ，并集合 US 由此二集合的元素组成，故

$$US = \{a, b, c\}.$$

例1.3 令 $S = \{a, b, c\}, \{a, cd\}, \{c, e\}$ ，由定义，可知

$$US = \{a, b, c, d, e\}.$$

例1.4 令 $S_1 = \{a, b, c\}$ ，这时

$$\mathscr{P}(S_1) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \\ \{b, c\}, \{a, b, c\}\}.$$

取 S 为 $\mathscr{P}(S_1)$ ，我们有

$$US = U\mathscr{P}(S_1) = \{a, b, c\} = S_1.$$

原则4 对于任意的集合 S ，都存在 S 的并集合 US 。

通常，人们把任意两个集合 S_1 与 S_2 的元素搜集在一起，组成一新的集合叫做集合 S_1 与 S_2 的并集合，并记做 $S_1 \cup S_2$ 。现在，使用无序对集合和并集合，我们有

$$S_1 \cup S_2 = U\{S_1, S_2\}.$$

在定义1.4中把 S 推广为任一类， US 还是一类，也可能是一真类，原则4是说，当 S 为一集合时， US 就不仅是一类，而且是一集合。

§ 5 子集合分离原则

我们已经指出，对于任意给定的性质 $p(x)$ ，由概括原则，都决定一类

$$C = \{x \mid p(x)\}. \quad (1.9)$$

C 是一类，仅从式(1.9)，我们不能保证 C 是一集合。如果我们能找到一集合 S ，使得 $C \subset S$ 时，这时由下述原则5，我们可以断定 C 是一集合(图1.1)。另一方面，虽然 C 不一定是一集合，但是它同任一集合 S 的交，即

$$C \cap S = \{x \mid x \in C \wedge x \in S\} \quad (1.10)$$

总是一集合(图1.2)。

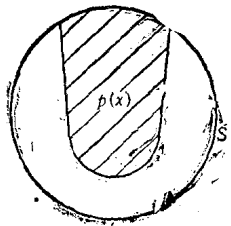


图 1.1 一类C被某一集合S所包含时，C为一集合

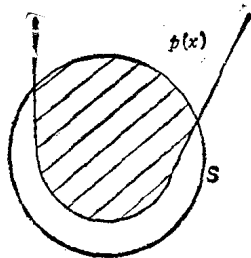


图 1.2 一类C与任一集合相交的部分是一集合

由式 (1.9) 和 $C \subset S$, 我们有

$$C = \{x | p(x) \wedge x \in S\}, \quad (1.11)$$

而由式 (1.10), 我们有

$$C \cap S = \{x | p(x) \wedge x \in S\}. \quad (1.12)$$

因此, 由式 (1.11) 与 (1.12), 我们都有

原则5 对于任意给定的性质 $p(x)$ 和集合 S , 都有集合

$$S_1 = \{x | p(x) \wedge x \in S\}$$

存在.

不管怎样, 集合

$$S_1 = \{x | p(x) \wedge x \in S\}$$

都是 S 的子集合, 并且把集合 S_1 看做是从集合 S 中使用性质 $p(x)$ 提取 (或分离) 出来的. 因此, 人们把原则5称为子集合分离原则. 由这一原则我们立即可以获得二集合 S_1 与 S_2 的交集集合 $S_1 \cap S_2$ 的合理性定义

$$S_1 \cap S_2 = \{x | x \in S_1 \wedge x \in S_2\}, \quad (1.13)$$

其中性质 $p(x)$ 为 $x \in S_2$. 当令性质 $p(x)$ 为 $x \notin S_2$ 时, 我们就获得集合 S_1 与 S_2 的相对补 (或称集合 S_2 相对于集合 S_1 之补) 的合理性定义:

$$S_1 \dot{-} S_2 = \{x | x \in S_1 \wedge x \notin S_2\}. \quad (1.14)$$