多项式一致逼近函数导论

B．K．嘉德克　著

沈燮昌　方企勤
娄元仁　邢富冲　译

北京大学出版社

多项式一致逼近函数导论

B.K. 嘉德克 著

沈燮昌 方企勤
娄元仁 邢富冲 译

北 京 大 学 出 版 社

多项式一致逼近函数导论

B.K.嘉德克　著

沈燮昌　等　译

责任编辑　徐信之

●

北京大学出版社出版

（北京大学校内）

北京大学印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

●

850×1168毫米　32开本　17.625　印张　400千字

1989年1月第一版　　1989年1月第一次印刷

印数：0001—3,000册

ISBN 7-301-00345-5／O·061

定价：6.50元

内 容 提 要

本书主要介绍多项式一致逼近的理论、方法和成果.除了系统地阐明多项式一致逼近的经典理论外,还充实了六十年代以来的大量重要成果及有关文献。此外,本书还用了近三分之一的篇幅讨论了复变函数的逼近问题,另外还详细地论述并解决了 C.M. Никольский 问题。

本书可供数学专业、计算数学专业高年级学生、研究生及教师作为教学及科研的参考书,也可供纯粹数学及应用数学研究人员参考。

В.К.Дзядык

Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами

Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», 1977

译 者 的 话

函数逼近论的起源很早。1752年 Euler 在制图学中，1776 年 Laplace 在研究地球的几何形状时，1789年 Fourier 在制造天文表时，1826年 Poncelet 在研究机械运动时，都遇到了逼近具体函数的最佳逼近问题。1852年俄罗斯著名数学家 Чебышев 在研究 Watt 平行四边形理论时，提出了函数逼近论中的一般问题，并提出了解决问题的方法，为近代函数逼近论奠定了基础。目前这个学科已经发展成为数学中的一个强有力的分支。它不仅与数学中的很多分支如函数论、泛函分析、计算数学、线性代数、统计学等有密切的关系，而且也与很多其他学科如无线电、遙测遙感、通讯、地震勘探石油、X光衍射等有密切的联系。国际上每年至少有一次逼近论专业会议，我国也已召开过三次全国性的逼近论会议，已有了一支较强的队伍及学科带头人，培养出了一批研究生。

目前国外出版了很多实变函数逼近论方面的书籍，国内也有不少译著；但是国外复变函数逼近论方面的著作很少，国内还沒有一本这方面的译著。

这是一本在一致度量意义下，研究实变量及复变量的函数逼近的书。其中前五章介绍了一些经典结果，但是有不少定理有新的提法并且给出了统一的、新的证明；后四章主要是讨论某些函数类的构造特征问题及 С.М.Никольский 问题的有关研究成果。特别是最后一章介绍了作者及其同事、学生们在复数区域上用多项式一致逼近的一些最新结果。读者读完本书之后，可以对函数逼近论有一个整体的了解，并能开始从事这方面的研究工作。因此，本书对于高年级大学生、研究生以及函数论工作者或函数逼近论的专家们都是有益的。函数逼近论的內容极其广泛，因此有

不少内容(如正交多项式理论、插值问题、其他空间中的逼近问题、指数函数的最佳逼近问题，等等)在本书中都沒有涉及，这些需要另外加以介绍。

在翻译过程中，我们分工负责，由沈燮昌同志负责第一、二章，方企勤同志负责第三、四、五章，邢富冲同志负责第六、七、八章，娄元仁同志负责第九章。全部内容在我们举办的讨论班上系统地作了报告和讨论，在此基础上进行翻译，这个过程花了一年多的时间。然后约用五个月的时间进行互校，对在翻译中遇到的一些问题作了充分讨论，交换意见，各人根据多次讨论的意见对原译稿作了修改，最后由一个同志进行统一，力求做到翻译准确，文字通顺易懂，术语统一，格调一致。

对原著的一些错误，我们作了认真的修正，但仅在必要之处作了说明，一般不一一列举。译文中所有人名都采用原文。引用的文献按俄文及西文作者分别编排，编排方法与原书类似(参看关于引证的附注)。由于我们水平有限，缺点和错误在所难免，敬请读者批评指正。

译　者

一九八二年十月

目　录

序　言

用比较简单的对象来逼近比较复杂的对象的问题，几乎在数学的各个领域中都起着重要的作用。在许多情况下，函数逼近论中的一些问题、结果以及基本方法都是很有用的。目前逼近论主要是研究用一些已知的子空间中的函数来逼近一些个别的函数及函数类，而这些子空间中的函数在某种意义下比被逼近的函数简单。n阶代数多项式的集合或(在周期情况下)n阶三角多项式的集合就经常起这些子空间的作用。

本书在一致度量意义下，研究实变量及复变量的函数逼近问题。一般地说，许多问题只有当所论的结果在一致度量意义下同时也在更一般的观点下进行研究时能被得到，才可以在其他线性赋范空间中进行研究。

为了方便读者，本书前五章主要叙述经典的结果，其中新的结果占不到全部材料的三分之一。而第六章到第九章，是根据笔者感兴趣的问题而写的，所叙述的内容基本上是笔者的一些研究成果。因此，本书几乎沒有多变量函数逼近问题、无界集合上的函数逼近问题、非C空间或L空间上的逼近问题、插值问题、求积公式、样条理论、集合的宽度等等问题。关于这些问题及其他一系列重要问题，建议读者参阅下列书籍(见文献目录)：Vallée-Poussin(1919)，С.Н.Бернштейн(1937)，D.Jackson(1930,1948)，J.L.Walsh(1961)，Л.В.Гончаров(1954)，Н.И.Ахиезер(1965)，И.П.Натансон (1949)，С.М.Никольский (1969及1974)，В.И.Крылов(1959)，G.Szegö(1962)，П.П.Коровкин(1959)，А.Ф.Тиман (1960)，В.И.Смирнов与Н.А.Лебедев (1964)，J.R.Rice(1964及1969)，E.W.Cheney(1966)，G.G.Lorentz (1966)，Ph.J.Davis(1964)，Е.Я.Ремез(1969)，P.L.Butzer与

R.J.Nessel(1971)， И.И.Ибрагимов (1971)， J.H.Ahlberg 及 E.N.Nilson 与 J.L.Walsh(1972)，М.Г.Крейн 与 А.А.Нудельман (1973)，P.-J.Laurent(1975)，В.М.Тихомиров(1976)，Н.П.Корнейчук (1976)，С.Б.Стечкин 与 Ю.Н.Субботин (1976)，S.Karlin 与 W.J.Studden(1976)等等。

作者感到遗憾的是，由于篇幅有限，本书沒有包含函数逼近论的方法及结果与常微分方程及计算数学中的一些方法及与结果相联系的一些问题(参看文献中笔者的文章 (1970,1973a,1974 及 1976)以及П.Н.Денисенко，В.В.Крочук，Ю.К.Подлипенко，В.К.Столярчук 等人的文章)。由于同样的原因，本书也沒有包括正准备发表的有关绝对单调函数的最佳逼近问题及在 r 次可微函数类上最佳逼近的精确上界问题(参看 H.Weyl(1917)，H.Bohr (1935)，G.H.Hardy 与 J.E.Littlewood (1928—1932)，J.Favard (1936 及 1937)，Н.И.Ахиезер 与 М.Г.Крейн(1937)，B.Nagy (1938)，笔者(1953,1955,1959a,1961,1974b及1975a)，С.М.Никольский(1946)，С.Б.Стечкин(1956)，孙永生(Сунь Юн-шен 1958,1959及1961)，Н.П.Корнейчук(1961及1971)，К.И.Бабенко (1958)，Л.В.Тайков(1963)，М.М.Джрбашян (1966)，А.В.Бушанский(1974及1974a)等文章)。

笔者从1961年起在以 Т.Г.Шевченко 的名字命名的国立基辅大学中曾多次系统地开设专门化课程，而在这些课程中不止一次地讲述了本书的绝大多数结果。在本书的叙述及证明中，我们对于材料的系统性及问题提法的简单明了性始终给予了很大的注意。特别注意了下列各问题：

1. 函数的 Чебышев 一致逼近理论及其发展(第一章)；

2. 实变量及复变量函数的构造特征 (第四章到第七章，以及第九章)；

3. Fourier 级数的线性求和方法及其推广(第二章以及第四章到第九章)。

从1961年开始，本书的一些新结果在乌克兰社会主义共和国科学院数学研究所函数论室由笔者所领导的函数逼近论讨论班上系统地报告过。这些年来，该室的工作人员以及其他研究所的一些数学家及笔者的学生都积极地参加了这个讨论班（参加者名单从略）。他们中的大多数人在不同程度上促进了本书的改进，因此我向他们致以谢意(以下致谢部分从略)。

B.K.Дзядык

关于引证的附注

1. 在引用前面几章的公式时，我们将在括弧中指出章数、节数及公式的编号。如果引用的是本章中前几节的公式，则我们只在括弧中指出节数及公式的编号。如果引用的是本节中的公式，则只指出公式的号码。这种原则在引用定理时也适用。

2. 在引述结果的来源时，我们给出该结果所属的作者的姓及名字以及出版的年代，必要时在年代后附加一个字母，它在字母表中的位置表示是该作者在这一年中的工作编号。在引述笔者的结果时，我们只在括弧中给出出版的年代必要时附加一个字母。

3. 在大多数情况下，我们在书的正文及各章的附注中指出哪一位数学家得到的哪一成果时，是在相应的地方用数字及其后半个括弧表示，这里数字表示的是附注的号码。

在引述共同的工作时，笔者随时指出参与共同工作的每一位作者在文章中作出了什么贡献，因而，与此相应地，在引用这些结果时，我们也指出这些结果(或其中的一部分)是属于参与共同工作的哪一位作者的。

第一章 Чебышев 理论及其发展

如果在某个线性赋范空间 L 中给定了两个元素 x 与 y，则称 $\|x-y\|_L$ 为这两个元素之间的距离，即 $\rho(x,y)\overset{\text{def}}{=\!=}\|x-y\|_L$。$\|x-y\|_L$ 也称为这两个元素中一个元素对另一个元素的偏差。在很多情况下，如果所涉及的空间 L 是很明确的，则可以将 $\|x-y\|_L$ 简写为 $\|x-y\|$。如果 M 是 L 的子空间，则元素 $y\in L$ 到 M 之间的距离可以象在通常的度量空间中那样定义，并记作 $\rho(y,M)$。作为 M，经常取作有限维线性子空间 M_n，它是一个由有限多个(依赖于 n)线性无关的元素 $x_i\in L$ 所组成的集合在实数域或复数域 P 上所张成的空间：$M_n=\{x:x=\sum c_ix_i,c_i\in P\}$。通常子空间 M_n 是由某个集合 $\{x_i\}_0^n$ 所张成的 $n+1$ 维空间。但是，当空间 L 由周期函数组成时，为了方便起见，我们将选择 $2n+1$ 个线性无关的元素组成函数系 $\{x_i\}$，把它所张成的子空间记作 $\widetilde{M}_n$。在这两种情况下，我们都用 $E_n(y)_L$(或简单地用 $E_n(y)$)表示量 $\rho(y;M_n)$ 或相应的量 $\rho(y;\widetilde{M}_n)$，并称之为元素 y 对于子空间 M_n 或相应的 $\widetilde{M}_n$ 的**最佳逼近值**。如果存在元素 $x^*\in M_n$(或 $x^*\in\widetilde{M}_n$)，使 $\rho(y,x^*)=\rho(y;M_n)$(或 $\rho(y,x^*)=\rho(y;\widetilde{M}_n)$)，则称 x^* 为元素 y 在 M_n(或 $\widetilde{M}_n$)中的**最佳逼近元素**或**最小偏差于 y 的元素**。今后，起 M_n 的作用的几乎到处都是 n 次代数多项式的集合，而起 $\widetilde{M}_n$ 的作用的是 n 阶三角多项式的集合。

我们用 C_D 表示在某个集合 D 上一切实的或复的连续函数 $f(x)$ 所组成的函数类，用 $\|f\|_{C_D}$ 或简单地用 $\|f\|_C$ 表示这个函数类中的函数 $f(x)$ 的一致范数：$\|f\|_C=\|f\|_{C_D}\overset{\text{def}}{=\!=}\sup\limits_{x\in D}|f(x)|$ ①。

① 这里 def 表示定义，本书其他地方的 def 也是如此。

在第一章，我们将在一系列非常重要的情况下研究由П.Л. Чебышев提出的关于最佳逼近元素的存在性、唯一性及其特征性质等问题。

§1 Чебышев 定理

这一节将叙述我们认为最重要的Чебышев逼近定理以及一些其他数学家的补充结果。

首先回答最佳逼近元素的存在性问题。

定理1（存在性定理；E.Borel(1905)） 对于任意一个在区间$[a,b]$上连续的函数$f(x)$以及任何$n=0,1,2,\cdots$，在由形如

$$P_n(x)=\sum_{j=0}^{n}a_jx^{n-j}$$

的n次多项式$P_n(x)$构成的子空间M_n中，必存在最佳逼近多项式。

证明 显然，只要证明依赖于多项式$P_n(x)$的系数a_j的函数

$$\varphi(a_0,a_1,\cdots,a_n)\xlongequal{\text{def}}\|f(x)-(a_0x^n+\cdots+a_n)\|_c\quad(R^{n+1}\to R^1)\tag{1}$$

能够在$n+1$维空间R^{n+1}中的某个点$(a_0^*,a_1^*,\cdots,a_n^*)$上达到其最小值，即对任意的$(a_0,a_1,\cdots,a_n)\in R^{n+1}$，不等式

$$\varphi(a_0^*,a_1^*,\cdots,a_n^*)=\left\|f(x)-\sum_{j=0}^{n}a_j^*x^{n-j}\right\|_c\leqslant\|f(x)-P_n(x)\|_c$$

$$=\left\|f(x)-\sum_{j=0}^{n}a_jx^{n-j}\right\|_c=\varphi(a_0,a_1,\cdots,a_n)$$

成立。为了证明这个结论，我们指出，从不等式

$$|\Delta\varphi|\xlongequal{\text{def}}|\varphi(a_0+\Delta a_0,a_1+\Delta a_1,\cdots,a_n+\Delta a_n)-\varphi(a_0,a_1,\cdots,a_n)|$$
$$\leqslant\|\Delta a_0x^n+\Delta a_1x^{n-1}+\cdots+\Delta a_n\|_c$$

$$\leqslant \max_{0\leqslant j\leqslant n}\max_{x\in[a,b]}|x^j|(|\Delta a_0|+|\Delta a_1|+\cdots+|\Delta a_n|)$$

可以推知，当 $\max\limits_{0\leqslant j\leqslant n}|\Delta a_j|\to 0$ 时，就有 $|\Delta\varphi|\to 0$，即函数 $\varphi(a_0, a_1,\cdots,a_n)$ 是 R^{n+1} 中的连续函数。

类似地可以证明，函数

$$\psi(a_0,a_1,\cdots,a_n)=\|a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n\|_c \qquad (2)$$

也是 R^{n+1} 中的连续函数。这个函数在 R^{n+1} 中，在由所有满足条件

$$|a_0|+|a_1|+\cdots+|a_n|=1 \qquad (3)$$

的点 $(a_0,a_1,\cdots,a_n)$ 构成的有界闭集 Q 中的某个点 $(\bar{a}_0,\bar{a}_1,\cdots,\bar{a}_n)$ 上达到其最小值 μ：

$$\mu=\|\bar{a}_0x^n+\bar{a}_1x^{n-1}+\cdots+\bar{a}_n\|_c\leqslant\|a_0x^n+\cdots+a_n\|_c. \qquad (4)$$

由于函数系 $1,x,x^2,\cdots,x^n$ 线性无关，因此 $\mu>0$。

对于任意的多项式 $P_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}a_kx^{n-k}$，当其系数满足不等式

$$|a_0|+|a_1|+\cdots+|a_n|\overset{\text{def}}{=\!=}a>\frac{2}{\mu}\|f(x)\|_c$$

时，由于（1）与（4），就有

$$\begin{aligned}\|f(x)-P_n(x)\|_c&\geqslant\|a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n\|_c-\|f(x)\|_c\\&\geqslant a\cdot\mu-\|f(x)\|_c>2\|f\|_c-\|f\|_c=\|f\|_c.\end{aligned}$$

由此看出，函数 $\varphi(a_0,a_1,\cdots,a_n)$ 的最小值只能在满足条件

$$|a_0|+|a_1|+\cdots+|a_n|\leqslant\frac{2}{\mu}\|f(x)\|_c \qquad (5)$$

的点 $(a_0,a_1,\cdots,a_n)$ 上取到，即在有界闭集上取到。因为函数 $\varphi(a_0,a_1,\cdots,a_n)$ 连续，所以根据 Weierstrass 定理（对于通常的 $n+1$ 维欧几里得空间），这个函数能在某个点 $(a_0^*,a_1^*,\cdots,a_n^*)\in R^{n+1}$ 上达到最小值。因此，对给定的 n 及函数 $f(x)$，存在多项式 $P_n^*(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}a_k^*x^{n-k}$ 能达到其最佳逼近。定理证毕。

定理1′ 对于任意一个以 2π 为周期的连续函数 $f(t)$ 以及每一个 $n=0,1,2,\cdots$，存在最佳逼近三角多项式 $T_n^*(t)$。

定理1′的证明与定理1是一样的，只要考虑到函数1，$\cos t$，$\sin t,\cdots,\cos nt,\sin nt$ 是线性无关的就行了（参看第五章§1推论2）。

可以完全类似地在任何一个线性赋范空间中证明下面的一般性结果（例如可参看 Н.И.Ахиезер(1965) 第17页）：

定理1″ 若在任意一个线性赋范空间 E 中选择了 $n+1$ 个线性无关的元素 $g_0,g_1,\cdots,g_n$，则对任何 $x\in E$，在所有形如

$$P_n(c;g)=\sum_0^n c_k g_k$$

的广义多项式 $P_n(c;g)$ 中，其中 c_k 是任意实数（或复数），至少存在一个广义多项式 $P_n^*(c^*;g)=\sum\limits_0^n c_k^* g_k$，它是元素 x 的最佳逼近元素，即

$$\inf_{c_k}\left\|x-\sum_0^n c_k g_k\right\|=\left\|x-\sum_0^n c_k^* g_k\right\|.$$

现在来研究这一节中的基本定理。对于在 $[a,b]$ 上任意给定的连续函数 $f(x)$，这个定理给出了使得某个多项式 $P_n^*(x)$ 是 $f(x)$ 的 n 次最佳逼近多项式的充要条件。П.Л.Чебышев 在1854年证明了这个定理，函数逼近论也正起源于这个定理。

定理2（П.Л.Чебышев(1854)）若在区间 $[a,b]$ 上给定了连续函数 $f(x)$，则要使某个次数不超过 n 的多项式 $P_n^*(x)$ 是最小偏差于 $f(x)$ 的多项式，其充要条件是，在 $[a,b]$ 上至少可以找到一个由 $n+2$ 个点 x_j $(a\leqslant x_1<x_2<\cdots<x_{n+2}\leqslant b)$ 所组成的集合，使得差 $f(x)-P_n^*(x)\overset{\text{def}}{=\!=}r_n(x)$ 在这些点上满足

1）依次地取到有不同符号的数值；

2）其绝对值取到在 $[a,b]$ 上的最大值，即在点 x_j 上满足条件