KELIEMAERKEFU
GUOCHENGGOUZAOLUN

可列马尔科夫过程构造论

杨向群

KELIEMAERKEFU
GUOCHENGGOUZAOLUN

可列马尔科夫过程构造论

杨 向 群 著

湖 南 科 学 技 术 出 版 社

可列马尔科夫过程构造论
杨向群 著
责任编辑：胡海清
*
湖南科学技术出版社出版
（长沙市展览馆路14号）
湖南省新华书店发行 湖南省新华印刷二厂印刷
*
1981年6月第1版 1986年11月第2版第2次印刷
开本：850×1168毫米 1/32 印张：12.5 插页：5 字数：323,000
印数：3,001——4,300
统一书号：13204·35 定价：5.00元
征订期号：湖南新书目 86——7(25)

内 容 简 介

构造论是可列马尔科夫过程理论中的一个核心课题。本书是作者在构造论方面研究成果的总结。

全书共六篇：第一、二、三篇阐述构造论的分析方法和结果；第四、五篇阐述构造论的概率方法和结果，以及两种方法的联系；第六篇阐述与构造论相联系的马尔科夫过程的某些性质。书中对双边生灭过程和单边生灭过程给予了较高的重视。

本书可供科技工作者、高等院校理工科师生，特别是概率论专门化的师生和数学工作者阅读和参考。

第二版序

第二版在以下几方面对第一版作了较大的补充和修改：第一，给出了唯一性准则的简洁证明；第二，充实了马亭边界理论，对该理论作了详细的叙述和证明；第三，改写了双有限（有限非保守和有限流出）Q 过程的构造；第四，增加了逼近马氏链和逼近最小过程，以及 DV 型和 $(DV)^*$ 型延拓过程，广义DV型和广义$(DV)^*$型延拓过程．此外，还有许多小的改动．

本书第一版于1981年出版后，获得许多同志的热情关心、欢迎和鼓励．特别令人激动的是，不少同志提出了宝贵的修改意见．对此，我深表感谢．我还衷心感谢湖南科学术技出版社，给本书提供第二版的机会．

杨向群

1984年4月5日于湘潭大学

序

马尔科夫过程在随机过程中占有十分重要的地位。可列马尔科夫过程是马尔科夫过程的一个非常活跃而且理论比较完整的分支，它在科学技术的许多领域中都具有广泛的应用。不少著名的概率论学者，例如柯尔莫果洛夫（A.H.Колмогоров），杜勃(J. L. Doob)，费勒（W. Feller)，钟开莱等，都长期在这一分支上开展工作，并作出了重要的贡献。二十多年来，我国的概率论工作者对这一领域进行了广泛深入的研究，目前已有《生灭过程和马尔科夫链》、《齐次可列马尔可夫过程》、《可逆马尔可夫过程》等三部专著出版。

1958年，南开大学王梓坤教授开始发表他在这一领域的研究成果，随后他和他的学生以及同事们深入并开拓了这方面的工作。由于长期不懈的努力，他们在这一学科的几个主要课题上都取得了很好的成绩。本书是杨向群教授的一部专著，总结了他二十年来对可列马尔科夫过程构造论的研究成果，其中有些成果还是首次发表的。

可列马尔科夫过程的一个核心课题是构造问题。杨向群的研究主要集中在构造论中生灭过程的构造，有限边界的 Q过程的构造，以及构造论中的概率方法及其与分析方法的联系等三个方面，并在这些方面取得了达到国际先进水平的成果。

生灭过程在国际上有不少人研究。卡林（S. Karlin）等给出了最小解的积分表现。费勒（W. Feller）用分析方法构造了同时满足向后和向前方程组的全部生灭过程。王梓坤用概率方法构造了全部不中断的生灭过程。杨向群用两种方法构造了全部生灭过

程并细致地考察了这些生灭过程的性质。因此，生灭过程的构造问题得以圆满解决。

可列马尔科夫过程的一般构造是十分困难的问题。1957年费勒在Q保守、有限流出、有限流入条件下，构造了满足向前方程组的全部Q过程，后来杨向群在同样条件下构造了全部Q过程。威利姆斯（D. Williams），钟开莱分别在Q保守、有限流出情形下求出了全部Q过程。最近，杨向群对这一问题又有了新的发展。他在更广泛的条件——Q的非保守状态和流出边界都有限——下求出了全部Q过程。

构造论中的两种方法，即概率方法和分析方法，各有其优点和不足，均取得一定的成果。两种方法的结果在形式上相差很远。杨向群就生灭过程找到了这两种方法的联系，把这两种不同形式的结果统一起来，既使分析结果赋以明确的概率意义，又使概率结果表达到同样简洁的形式。由杨向群开始的这个方面的工作还有待深入，它是一个发展前途广阔的领域。

本书不是作者成果的简单汇编，而是经过精心整理和编排的一本著作。我想，读者在阅读了王梓坤的专著《生灭过程和马尔科夫链》第一、二、三章后，就可以比较顺利地阅读完本书而达到这一领域的研究前沿。因此，本书的出版一定会对我国概率论的发展起促进作用。

在本书出版之际，我略抒所见，为学识所限，不免有不妥之处，请同志们批评指正。

侯振挺

1980年3月于长沙铁道学院

前言

本书是作者在可列马尔科夫过程构造论方面研究成果的一个总结。第一章介绍构造论的分析基础，然后逐步进入专题。

构造论是马尔科夫过程理论中一个核心课题。它着眼于根据某些已知条件，构造出马尔科夫过程；或者说，将马尔科夫过程一个一个地刻划出来。这样可以根据每个马尔科夫过程的共性和个性来研究其性质。例如，基于构造论，可以比较顺利地从构造出来的马尔科夫过程的类型中，挑选出具有可逆性的过程，如同专著《可逆马尔科夫过程》中做过的那样。

目前解决构造论的方法有两种，一种是分析方法，一种是概率方法（各有其优点和不足），均取得了一定成果。本书第一章第三节对此作了概括的叙述。

全书共六篇，基本上分三部分。第一、二、三篇阐述构造论的分析方法和结果。第四、五篇阐述构造论的概率方法和结果，以及两种方法的联系。第六篇阐述与构造论相联系的马尔科夫过程的某些性质。对生灭过程给以较高的重视，这不仅因为生灭过程有它本身的理论和应用价值，而且它是产生解决一般问题的思想和方法的源泉。

第一篇论述构造论的分析基础。首先研究作为转移概率的 Q 过程的分析性质，最小解的构造和性质，Q 过程的一般形式；然后，对简单情形的Q过程进行了直接构造；最后讨论了Q过程的唯一性问题。

第二篇专论生灭过程构造论。我们构造了全部双边生灭过程和全部单边生灭过程，结果完整而富有启发性。掌握生灭过程构

造论对于理解Q过程的一般构造，是十分有益的。

第三篇研究Q过程的马亭（Martin）边界及其在构造论中的应用。首先，我们将离散参数马尔科夫链的马亭边界理论应用于Q过程，展开了广泛和深入的讨论。其次，我们引进了最小Q过程的马亭流出边界，并借助流出边界对Q过程的一般形式作了进一步的刻划。最后，对有限非保守、有限流出的情况构造了全部Q过程。

第四篇着重分析概率的Q过程的轨道结构。首先，我们引进W变换和强极限概念。W变换可以把一般的Q过程变换成各种轨道结构较简单的过程，这样便于从各个侧面来研究过程的轨道。强极限定理表明，较复杂的Q过程的轨道可以用较简单的Q过程的轨道来逼近。其次，我们引进飞跃区间的概念来研究过程的流出和流入问题。讨论了飞跃区间、飞跃点和柯氏方程组之间的关系，导出了流入分解定理。最后，研究了过程的延拓，直接地构造出简单过程的样本轨道。我们主要考虑D型延拓。为了保证延拓过程保持Q矩阵不变，还考虑了D^*型延拓。

第五篇专论生灭过程的概率方法构造。由于过程特殊，因而结果也较深刻。每个生灭过程不仅是一列杜勃（Doob）过程的强极限，而且它还与一列特征数列相对应。我们建立了两种生灭过程构造论的联系，使分析方法构造出来的过程有了明确的概率结构，使概率方法构造出来的过程具有简洁的分析表达形式。这样，便可以发挥每种方法的长处。两种方法配合使用，效果更为显著。

第六篇考察了马尔科夫过程的某些性质，主要是常返性和遍历性。这些性质紧密地依赖于构造论。

作者衷心地感谢王梓坤老师的辛勤指导，没有他的指导，这些研究成果是不可能取得的。侯振挺教授常与作者讨论，使作者获益非浅。他还仔细地阅读了本书的底稿并提出许多宝贵的改进意见；郭青峰副教授、吴荣、墨文川、陈木法等同志常与作者讨论并给予很大的支持和鼓励。作者谨向以上诸位表示感谢。

杨向群

1980年3月于湘潭大学

目　　录

第一篇　构造论的一般理论

第一章　构造论引论

§1. 引　　言

本章中我们介绍构造论的基本结果．主要有：过程的分析性质，如连续性，Q矩阵的存在性，可微分性；过程满足柯氏方程组的条件；最小解的构造和性质；Q过程的一般形式等等．大部分内容取自 *Reuter*[1]．§4和§5以及定理6.2取自 *Chung*[1]．§8的结论来自 *Reuter*[2，3]和 *Feller*[3]．§§10—12来自杨向群[12]．

§2. 记号和定义

设E为一可列指标集，称为状态空间．定义在E上的有界列矢量（或称有界函数）组成的巴拿赫空间记为$\boldsymbol{m}$，$f\in\boldsymbol{m}$的范数记为$\|f\|=\sup\limits_{i\in E}|f_i|$．定义在$E$上的可和行矢量组成的巴拿赫空间记为$\boldsymbol{l}$，$g\in\boldsymbol{l}$的范数记为$\|g\|=\sum\limits_{j\in E}|g_j|$．如$f\in\boldsymbol{m}$，$g\in\boldsymbol{l}$，其内

注　“(1)”和“定理1”分别表示同一节中的第一式和定理1；
“(2.1)”和“定理2.1”分别表示同一章第二节中的第一式和定理1；
“(3.2.1)”和“定理3.2.1”分别表示第三章第二节中的第一式和定理1，其余类推．（引理编号也是如此）．

积定义为

$$[g,f]=\sum_{i\in E} g_i f_i. \tag{1}$$

我们将采用矩阵记号，矩阵的极限将在逐元的意义下理解。从分析的观点看，一个马尔科夫过程或简称过程，是指一族满足下列条件的实值矩阵$P(t)=\{p_{ij}(t)\}$ $(i,j\in E,\ t\geqslant 0)$：

$$P(t)\geqslant \mathbf{0},\ P(t)\mathbf{1}\leqslant \mathbf{1}; \tag{A}$$

$$P(t+s)=P(t)P(s); \tag{B}$$

$$\lim_{t\downarrow 0}P(t)=P(0)=I; \tag{C}$$

$\mathbf{0}$也表示零矩阵，有时也表示零列(或行)矢量，$\mathbf{1}$表示分量为 1 的单位列矢量，这并不会引起混淆。I表示么矩阵。

用矩阵$P(t)$的元素表示，条件(A)(B)(C)成为：对任意$i,j\in E$，$s,t\geqslant 0$有

$$p_{ij}(t)\geqslant 0,\quad \sum_j p_{ij}(t)\leqslant 1; \tag{A}$$

$$p_{ij}(t+s)=\sum_k p_{ik}(t)p_{kj}(s); \tag{B}$$

$$\lim_{t\downarrow 0}p_{ij}(t)=p_{ij}(0)=\delta_{ij}=\begin{cases}1, & \text{如}i=j,\\ 0, & \text{如}i\neq j.\end{cases} \tag{C}$$

其中求和号展布在E上，通常称(B)为柯尔莫果洛夫——切普曼(Колмогоров-Chapman)方程。

称

$$d_i(t)=1-\sum_j p_{ij}(t) \tag{2}$$

为过程$P(t)$的中断函数。

引理1 $d_i(t)$是t的非降函数。如果对某个$t>0$，对一切$i\in E$有$d_i(t)=0$，则必定对一切$t\geqslant 0$成立。

证 对s，$t>0$，由(B)(C)，

$$d_i(s+t)=1-\sum_j p_{ij}(s+t)$$

$$=1-\sum_{j}\ \sum_{k}p_{ik}(s)p_{kj}(t)$$

$$=1-\sum_{k}p_{ik}(s)\sum_{j}p_{kj}(t)\geqslant 1-\sum_{k}p_{ik}(s)$$

$$=d_i(s)。$$

由此得$d_i(t)$的非降性．由上式看出，如果对某个 $t>0$对一切k有$\sum_{j}p_{kj}(t)=1$，则$d_i(s+t)=0$ $(s>0)$，证毕．

当对某个（从而一切）$t>0$有$d_i(t)=0$ $(i\in E)$，即

$$P(t)\mathbf{1}=\mathbf{1},\ t>0。\tag{D}$$

或等价地

$$\sum_{j}P_{ij}(t)=1,\ i\in E,\ t>0\ . \tag{D}$$

时，称过程$P(t)$为不中断的，否则称为中断的。

对于中断过程$P(t)$，可以按下面方式扩大状态空间E而得到不中断的过程$\widetilde{P}(t)$：任取指标$\Delta\overline{\in}E$，记$\widetilde{E}=E\cup\{\Delta\}$,令

$$\left.\begin{array}{l}\widetilde{p}_{ij}(t)=p_{ij}(t),\ \widetilde{p}_{i\Delta}(t)=d_i(t),\ i,\ j\in E,\\ \widetilde{p}_{\Delta j}(t)=\begin{cases}1,\ 当j=\Delta时,\\ 0,\ 当j\in E时.\end{cases}\end{array}\right\}\tag{3}$$

直接验证便得

引理2 设$P(t)=\{p_{ij}(t)\}$ $(i,j\in E,\ t\geqslant 0)$ 是中断过程，则$\widetilde{P}(t)=\{\widetilde{p}_{ij}(t)\}$ $(i,\ j\in\widetilde{E},\ t\geqslant 0)$是不中断过程．

一切过程$P(t)$组成的类记为$\mathscr{P}$．

对每个$P(t)\in\mathscr{P}$，在$t=0$的右导数$P'(0)$存在，即极限

$$q_{ij}=p'_{ij}(0)=\lim_{t\downarrow 0}\frac{p_{ij}(t)-p_{ij}(0)}{t}\tag{4}$$

存在，而且

$$0\leqslant q_{ij}<\infty(i\neq j),\ \ \sum_{j\neq i}q_{ij}\leqslant -q_{ii}\equiv q_i\leqslant\infty。\tag{5}$$