高等学校教材

离散数学及其应用习题解析

傅 彦 顾小丰 编

電子工業出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY
URL:http://www.phei.co.cn

离散数学及其应用习题解析

高等学校教材

离散数学及其应用习题解析

傅彦　顾小丰　编著

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industy

内 容 简 介

本书就离散数学的四大部分——数理逻辑、集合论及二元关系、图论、代数系统给出了大量具有代表性的习题及其解答。对一些典型的习题还给出了多种不同的解法,其目的在于拓宽读者的思路。

本书可作为大专院校离散数学课程的辅导读物,也可供广大从事计算机研究和应用的工程技术人员阅读。

丛 书 名:高等学校教材
书　　名:离散数学及其应用习题解析
著　　者:傅　彦　顾小丰
责任编辑:张凤鹏
特约编辑:袁　英
印 刷 者:北京牛山世兴印刷厂
装 订 者:三河市路通装订厂
出版发行:电子工业出版社出版、发行 URL:http://WWW.phei.co.cn
北京市海淀区万寿路173信箱　邮编 100036　发行部电话 68214070
经　　销:各地新华书店经销
开　　本:787×1092 1/16 印张: 6.5 字数:166.4千字
版　　次:1997年4月第1版　1997年4月第1次印刷
印　　数:1 - 8000 册
书　　号:ISBN 7-5053-3955-9 / TP·1720
定　　价:9.00 元

前　　言

离散数学是高等院校计算机专业的核心课程，但初学者往往由于对离散数学中某些概念和定理理解得不够透彻，从而对一些习题无从下手。本书正是为了适应离散数学教学和自学的这一需要而编写的。

离散数学主要包括集合论及二元关系、数理逻辑、图论、代数系统这四个部分，本书作为《离散数学及其应用》的配套教材，也相应地分为五章，其中第一、二、三章由傅彦编写，第四、五章由顾小丰编写。

本书共选编了283个习题，每题包含若干小题，其中集合论部分30个，数理逻辑部分28个，二元关系部分58个，图论部分81个，代数系统部分86个。对于书中的习题，一般只给出了一种解法，但对于一些典型的习题，我们也给出了多种解法，其目的在于使读者拓宽思路、掌握更多的技巧。

在编写本书的过程中，电子科技大学的刘乃琦教授和吴跃教授给作者以极大的帮助，提出了许多宝贵的意见，在此向他们表示衷心的感谢。

作者是在多年教学积累的基础上编写本书的，但由于水平有限，错误和不当之处在所难免。恳切希望广大读者提出宝贵意见。

作者

1996年8月

目　　录

第一章　集　合　论

§1.1　集合及其表示

1. 给出下列集合：

(1) 小于 10 的非负整数全体。

(2) 1 至 20 间的全体素数(质数)。

(3) 小于 100 的 12 的整倍数。

解　(1) 设 A 为小于 10 的非负整数全体。

则：$A=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$。

(2) 设 B 为 1 至 20 间的全体素数(质数)。

则：$B=\{2,3,5,7,11,13,17,19\}$。

(3) 设 C 为小于 100 的 12 整倍数。

则：$C=\{12,24,36,48,60,72,84,96\}$。

2. 选择合适的论域和谓词，写出下列集合：

(1) 从 0 到 100 的整数。

(2) 奇数的全体。

(3) 5 的倍数。

(4) 所有一元二次方程的解组成的集合。

(5) 能被 100 整除的整数集合。

(6) 直角坐标系中，单位元(不包括单位圆周)的点集。

解　(1) $A=\{x\mid(x\in I)$并且$(0\leqslant x\leqslant 100)\}$。

(2) $O=\{x\mid(k\in I)$并且$(x=2k+1)\}$。

(3) $B=\{x\mid(k\in I)$并且$(x=5k)\}$。

(4) $D=\{x\mid(x\in C)$并且$(a\in I)$并且$(b\in I)$并且$(c\in I)$并且$(ax^2+bx+c=0)\}$。

(5) $E=\{x\mid(k\in I)$并且$(x=100k)\}$。

(6) $F=\{\langle x,y\rangle\mid(x,y\in R)$并且$(x^2+y^2<1)\}$。

3. 用列举元素法写出下列集合：

(1) $\{x\mid(x\in I)$并且$(2<x<10)\}$。

(2) $\{x\mid x$ 是十进制的数字符号$\}$。

(3) $\{x\mid x$ 是 P 进制的数字符号$\}$，$P=2,8,12$。

(4) $\{x\mid(x=2)$或$(x=5)\}$。

(5) $F=\{\langle x,y\rangle\mid(x,y\in I)$并且$(0\leqslant x\leqslant 2)$并且$(-2\leqslant y\leqslant 1)\}$。

(6) $\{x\mid x$ 是 the People's Republic of China 中的英文字母$\}$。

解　(1) $\{x\mid(x\in I)$并且$(2<x<10)\}=\{3,4,5,6,7,8,9\}$。

(2) $\{x\mid x$ 是十进制的数字符号$\}=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$。

(3) $\{x|x$ 是二进制的数字符号$\}=\{0,1\}$。

$\{x|x$ 是八进制的数字符号$\}=\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$。

$\{x|x$ 是十二进制的数字符号$\}=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\}$。

(4) $\{x|(x=2)$ 或 $(x=5)\}=\{2,5\}$。

(5) $F=\{\langle x,y\rangle|(x,y\in I)$ 并且 $(0\leqslant x\leqslant 2)$ 并且 $(-2\leqslant y\leqslant 1)\}=\{\langle 0,-2\rangle,\langle 0,-1\rangle,\langle 0,0\rangle,\langle 0,1\rangle,\langle 1,-2\rangle,\langle 1,-1\rangle,\langle 1,0\rangle,\langle 1,1\rangle,\langle 2,-2\rangle,\langle 2,-1\rangle,\langle 2,0\rangle,\langle 2,1\rangle\}$。

(6) $\{x|x$ 是 the People's Republic of China 中的英文字母$\}$

$=\{a,b,c,e,f,h,i,l,n,o,p,r,s,t,u\}$。

4. 设全集为 I,下列哪些集合是相等的?

(1) $A=\{x|x$ 是偶数或奇数$\}$。

(2) $B=\{x|(\exists y)((y\in I)$ 并且 $(x=2y))\}$。

(3) $C=\{1,2,3\}$。

(4) $D=\{0,1,-1,2,-2,3,-3,4,-4,\ldots\}$。

(5) $E=\{2x|x\in I\}$。

(6) $F=\{3,3,2,1,2\}$。

(7) $G=\{x|x^3-6x^2-7x-6=0\}$。

(8) $H=\{x|x^3-6x^2+11x-6=0\}$。

解 其中: $A=D$; $B=E$; $C=F=H$。

§1.2 集合与元素的关系

1. 找出下列集合之间的关系。

(1) $A=\{x|(x\in I)$ 并且 $(1<x<5)\}$。

(2) $B=\{2,3\}$。

(3) $C=\{x|x^2-5x+6=0\}$。

(4) $D=\{\{2,3\}\}$。

(5) $E=\{2\}$。

(6) $F=\{x|(x=2)$ 或 $(x=3)$ 或 $(x=4)$ 或 $(x=5)\}$。

(7) $G=\{2x|(1\leqslant x\leqslant 3)\}$。

(8) $H=\{x|(x\in I)$ 并且 $(x^2+x+1=0)\}$。

解 $H\subset E\subset B\subset A\subset F$; $B\in D$; $H\subset E\subset G$; $H\subset C$; $H\subset D$。

2. 设 $S=\{N,Q,R\}$,问下列命题是否正确。

(1) $2\in N$, $N\in S$, 则 $2\in S$。

(2) $N\subset Q,Q\in S$,则 $N\subset S$。

(3) $N\subset Q,Q\subset R$,则 $N\subset R$。

解 (1),(2)是错误的,(3)是正确的。

3. 求下列集合的基数和每个集合的幂集。

(1) $\{1,2,3\}$。

(2) $\{1,\{2,3\}\}$。

(3) $\{\{1,\{2,3\}\}\}$。

(4) $\{\{1,2\},\{2,1,1\},\{2,1,2,1\}\}$。

(5) $\{\{\Phi,2\},\{2\}\}$。

(6) $\{a,\{a\}\}$。

(7) $\{\Phi,a,\{b\}\}$。

解 (1) 基数为 3,幂集为:$\{\Phi,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$。

(2) 基数为 2,幂集为:$\{\Phi,\{1\},\{\{2,3\}\},\{1,\{2,3\}\}\}$。

(3) 基数为 1,幂集为:$\{\Phi,\{\{1,\{2,3\}\}\}\}$。

(4) 基数为 1,幂集为:$\{\Phi,\{\{1,2\}\}\}$。

(5) 基数为 2,幂集为:$\{\Phi,\{\{\Phi,2\}\},\{\{2\}\},\{\{\Phi,2\},\{2\}\}\}$。

(6) 基数为 2,幂集为:$\{\Phi,\{a\},\{\{a\}\},\{a,\{a\}\}\}$。

(7) 基数为 3,幂集为:$\{\Phi,\{a\},\{\Phi\},\{\{b\}\},\{\Phi,a\},\{\Phi,\{b\}\},\{a,\{b\}\},\{\Phi,a,\{b\}\}\}$。

4. 设 $A=\Phi$，$B=\{a\}$，求 $P(A)$，$P(P(A))$，$P(P(P(A)))$，$P(B)$，$P(P(B))$，$P(P(P(B)))$。

解 $P(A)=\{\Phi\}$，$P(P(A))=\{\Phi,\{\Phi\}\}$，$P(P(P(A)))=\{\Phi,\{\Phi\},\{\{\Phi\}\},\{\Phi,\{\Phi\}\}\}$，
$P(B)=\{\Phi,\{a\}\}$，$P(P(B))=\{\Phi,\{\Phi\},\{\{a\}\},\{\Phi,\{a\}\}\}$，$P(P(P(B)))=\{\Phi,\{\Phi\},\{\{\Phi\}\},\{\{\{a\}\}\},\{\{\Phi,\{a\}\}\},\{\Phi,\{\Phi\}\},\{\Phi,\{\{a\}\}\},\{\Phi,\{\Phi,\{a\}\}\},\{\{\Phi\},\{\Phi,\{a\}\}\},\{\{\{a\}\},\{\Phi,\{a\}\}\},\{\{\Phi\},\{\{a\}\}\},\{\Phi,\{\Phi\},\{\{a\}\}\},\{\Phi,\{\{a\}\},\{\Phi,\{a\}\}\},\{\{\Phi\},\{\{a\}\},\{\Phi,\{a\}\}\},\{\Phi,\{\Phi\},\{\Phi,\{a\}\}\},\{\Phi,\{\Phi\},\{\{a\}\},\{\Phi,\{a\}\}\}\}$。

5. A,B,C 是集合，若 $A\in B$ 且 $B\in C$，有可能 $A\in C$ 吗？常有 $A\in C$ 吗？举例说明。

解 设 $A=\{a\}$， $B=\{\{a\}\}$， $C=\{\{a\},\{\{a\}\}\}$。

则由 $A\in B$ 且 $B\in C$，有 $A\in C$。但由 $A\in B$ 且 $B\in C$，不一定常有 $A\in C$。

设 $A=\{a\}$， $B=\{\{a\}\}$， $C=\{\{\{a\}\}\}$。

则有 $A\in B$ 且 $B\in C$，但 $A\notin C$。

6. 简要说明：$\{2\}$与$\{\{2\}\}$的区别，举出它们的元素与子集。

解 $\{2\}$是以元素为元素的集合，元素为 2；子集有 Φ，$\{2\}$。

$\{\{2\}\}$是以集合为元素的集合，元素为$\{2\}$；子集有 Φ，$\{\{2\}\}$。

7. 简要说明：Φ 与$\{\Phi\}$的区别，举出它们的元素与子集。

解 Φ 是无任何元素的集合。子集有 Φ。

$\{\Phi\}$是以集合为元素的集合，元素为 Φ；子集有 Φ，$\{\Phi\}$。

8. 有可能有 $A\subset C$ 且 $A\in C$ 吗？论证你的断言。

解 $A\subset C$ 且 $A\in C$ 不一定成立。

如 $A=\{a\}$，$C=\{a,\{a\}\}$，则 $A\subset C$ 且 $A\in C$ 同时成立。

但若 $A=\{a\}$，$C=\{\{a\}\}$，则 $A\not\subset C$ 但 $A\in C$。

9. 确定下列命题是否为真。

(1) $\Phi\subseteq\Phi$。 (2) $\Phi\in\Phi$。 (3) $\Phi\subseteq\{\Phi\}$。 (4) $\Phi\in\{\Phi\}$。

(5) $\Phi\subseteq\{\{\Phi\}\}$。 (6) $\Phi\in\{\{\Phi\}\}$。 (7) $\{\Phi\}\subseteq\{\{\Phi\}\}$。 (8) $\{\Phi\}\in\{\{\Phi\}\}$。

(9) $\{\Phi\}\subseteq\{\Phi,\{\Phi\}\}$。 (10) $\{\Phi\}\in\{\Phi,\{\Phi\}\}$。 (11) $\{\{\Phi\}\}\subseteq\{\Phi,\{\Phi\}\}$。

(12) $\{\{\Phi\}\}\in\{\Phi,\{\Phi\}\}$。(13) $\{a\}\subseteq\{\{a\}\}$。 (14) $\{a\}\in\{\{a\}\}$。

(15) $\{a\}\subseteq\{a,\{a\}\}$。 (16) $\{a\}\in\{a,\{a\}\}$。

解 (1)，(3)，(4)，(5)，(8)，(9)，(10)，(11)，(14)，(15)，(16)是真命题，其余是假命题。

10. 证明：若 a,b,c 和 d 是任意客体，则$\{\{a\},\{a,b\}\}=\{\{c\},\{c,d\}\}$当且仅当 $a=c,b=d$。

证明 若$\{\{a\},\{a,b\}\}=\{\{c\},\{c,d\}\}$，则由集合的定义有：$\{a\}=\{c\}$，$\{a,b\}=\{c,d\}$。

由$\{a\}=\{c\}$知 $a=c$，由$\{a,b\}=\{c,d\}=\{a,d\}$，有 $b=d$。

11. 设 A,B,C 是集合，证明或反驳下列断言。

(1) $A\notin B\wedge B\in C\Rightarrow A\in C$。

(2) $A\notin B\wedge B\notin C\Rightarrow A\notin C$。

(3) $A\in B\wedge B\notin C\Rightarrow A\notin C$。

(4) $A\subset B\wedge B\notin C\Rightarrow A\notin C$。

(5) $a\in A\wedge A\subset B\Rightarrow a\in B$。

解 (1) 结论不一定成立。

(a) 若 $A=\{a\}$，$B=\{b\}$，$C=\{\{b\}\}$，则有 $A\notin B\wedge B\in C$，但 $A\notin C$。

(b) 若 $A=\{a\}$，$B=\{b\}$，$C=\{\{a\},\{b\}\}$，则有 $A\notin B\wedge B\in C\Rightarrow A\in C$。

(2) 结论不一定成立。

(a) 若 $A=\{a\}$，$B=\{b\}$，$C=\{\{a\}\}$，则有 $A\notin B\wedge B\notin C$，但 $A\in C$。

(b) 若 $A=\{a\}$，$B=\{b\}$，$C=\{c\}$，则有 $A\notin B\wedge B\notin C\Rightarrow A\notin C$。

(3) 结论不一定成立。

(a) 若 $A=\{a\}$，$B=\{\{a\}\}$，$C=\{\{a\}\}$，则有 $A\in B\wedge B\notin C$，但 $A\in C$。

(b) 若 $A=\{a\}$，$B=\{\{a\}\}$，$C=\{c\}$，则有 $A\in B\wedge B\notin C\Rightarrow A\notin C$。

(4) 结论不一定成立。

(a) 若 $A=\{a\}$，$B=\{a,b\}$，$C=\{\{a\}\}$，则有 $A\subset B\wedge B\notin C$，但 $A\in C$。

(b) 若 $A=\{a\}$，$B=\{a,b\}$，$C=\{c\}$，则有 $A\subset B\wedge B\notin C\Rightarrow A\notin C$。

(5) 结论成立。

由 $A\subset B$ 知：对任意 $x\in A$，有 $x\in B$。因为 $a\in A$，所以 $a\in B$。

§1.3 集合的运算

1. 设全集 $U=\{1,2,3,4,5\}$。$A=\{1,4\}$，$B=\{1,2,5\}$，$C=\{2,4\}$。确定下面的集合。

(1) $A\cap\overline{B}$。 (2) $(A\cap B)\cup\overline{C}$。 (3) $(A\cap B)\cup(A\cap C)$。 (4) $\overline{A\cup B}$。

(5) $\overline{A}\cap\overline{B}$。 (6) $\overline{B\cap C}$。 (7) $\overline{B}\cup\overline{C}$。 (8) $2^A\cup 2^C$。

解 (1) $A\cap\overline{B}=(\{4\})$。 (2) $(A\cap B)\cup\overline{C}=\{1,3,5\}$。

(3) $(A\cap B)\cup(A\cap C)=\{1,4\}$。 (4) $\overline{A\cup B}=\{3\}$。

(5) $\overline{A}\cap\overline{B}=\{3\}$。 (6) $\overline{B\cap C}=\{1,3,4,5\}$。

(7) $\overline{B}\cup\overline{C}=\{1,3,4,5\}$ (8) $2^A\cup 2^C=\{\Phi,\{1\},\{2\},\{4\},\{1,4\},\{2,4\}\}$。

2. 设 $A=\{x|(x\in N)$ 并且 $(x<5)\}$，$B=\{x|(x\in E^+)$ 并且 $(x<7)\}$。求 $A\cup B$，$A\cap B$。

解 $A=\{x|(x\in N)$ 并且 $(x<5)\}=\{0,1,2,3,4\}$，

$B=\{x|(x\in E^+)$ 并且 $(x<7)\}=\{2,4,6\}$。

$A\cup B=\{0,1,2,3,4,6\}$，$A\cap B=\{2,4\}$。

3. 设 $A=\{x|x$ 是 book 中的字母$\}$，$B=\{x|x$ 是 black 中的字母$\}$。求 $A\cup B$，$A\cap B$。

解 $A=\{x|x$ 是 book 中的字母$\}=\{b,o,k\}$，

$B=\{x|x$ 是 black 中的字母$\}=\{b,l,a,c,k\}$。

$A\cup B=\{a,b,c,l,k,o\}$，$A\cap B=\{b,k\}$。

4. 给定自然数集合 N 的下列子集：

$A=\{1,2,7,8\}$； $B=\{i|i^2<50\}$；

$C=\{i|(i$ 可被 3 整除$)$ 并且 $(0\leqslant i\leqslant 30)\}$； $D=\{i|(i=2^k)$ 并且 $(k\in I_+)$ 并且 $(1\leqslant k\leqslant 6)\}$。

求下列集合：

(1) $A\cup(B\cup(C\cup D))$。 (2) $A\cap(B\cap(C\cap D))$。

(3) $B-(A\cup C)$。 (4) $(\overline{A}\cap B)\cap D$。

解 $A=\{1,2,7,8\}$，$B=\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$

$C=\{0,3,6,9,12,15,18,21,24,27,30\}$，$D=\{2,4,8,16,32,64\}$。

(1) $A\cup(B\cup(C\cup D))=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,12,15,16,18,21,24,27,30,32,64\}$。

(2) $A\cap(B\cap(C\cap D))=\Phi$。

(3) $B-(A\cup C)=\{4,5\}$。

(4) $(\overline{A}\cap B)\cap D=\{4\}$。

5. 求下列集合的结果。

(1) $I-N$。 (2) $I\cup N$。 (3) $I-(I-N)$。 (4) $R\cup Q$。 (5) $R-Q$。

解 (1) $I-N=\{-1,-2,-3,\ldots\ldots -n,\ldots\ldots\}=I^-$。

(2) $I\cup N=I$。

(3) $I-(I-N)=I-I^-=N$。

(4) $R\cup Q=R$。

(5) $R-Q=S$ （S 是无理数的集合）。

6. 设 $A=\{3,4\}$；$B=\{4,3\}\cap\Phi$；$C=\{3,4\}\cap\Phi$；$D=\{x\mid(x^2-7x+12=0)$并且$(x\in R)\}$；$E=\{\Phi,3,4\}$；$F=\{4,4,3\}$；$G=\{4,\Phi,3,3\}$。问上述集合中哪些是相等的？哪些是不相等的？

解 $A=F=D$；$B=C$；$E=G$。

7. 当 $A\neq\Phi$ 时，若只有：(1) $A\cup B=A\cup C$，是否一定有 $B=C$？

(2) $A\cap B=A\cap C$，是否一定有 $B=C$？

(3) $(A\cup B=A\cup C)$并且$(A\cap B=A\cap C)$，是否一定有 $B=C$？

解 (1) 不一定成立。当 $A\supseteq B$，$A\supseteq C$，但 $B\neq C$ 时，则有 $A\cup B=A\cup C$，但 $B\neq C$。

(2) 不一定成立。当 $A\subseteq B$，$A\subseteq C$，但 $B\neq C$ 时，则有 $A\cap B=A\cap C$，但 $B\neq C$。

(3) 结论成立。

证明 $B=B\cup(B\cap A)=B\cup(A\cap B)=B\cup(A\cap C)=(B\cup A)\cap(B\cup C)$

$=(A\cup B)\cap(B\cup C)=(A\cup C)\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup C=(A\cap C)\cup C=C$。

8. 设 A,B,C 均为 U 的子集，问下列命题谁对？谁错？

(1) $A\subset B\Leftrightarrow A\cup B=B$。 (2) $A\subset B\Leftrightarrow A\cup B=A$。 (3) $A\subset B\Leftrightarrow A\cap B=A$。

(4) $A\subset B\Leftrightarrow A\cap B=B$。 (5) $A\subset B\Leftrightarrow A\cup(B-A)=B$。 (6) $B\subset A\Leftrightarrow(A-B)\cap B=A$。

解 (1),(3),(5)正确；(2),(4),(6)错误。

9. 设 A,B 为任意集合，证：

(1) $A\subseteq B\Rightarrow P(A)\subseteq P(B)$。 (2) $P(A)\subseteq P(B)\Rightarrow A\subseteq B$。

(3) $P(A)=P(B)\Leftrightarrow A=B$。

证明 (1) 设 $A\subseteq B$。

对任意 $x\in P(A)$，有 $x\subseteq A$，又 $A\subseteq B$，所以 $x\subseteq B$，即有 $x\in P(B)$。所以 $P(A)\subseteq P(B)$。

(2) 设 $P(A)\subseteq P(B)$

对任意 $x\in A$，有 $\{x\}\in P(A)$，又 $P(A)\subseteq P(B)$，所以 $\{x\}\in P(B)$，即有 $x\in B$。所以 $A\subseteq B$。

(3) “$\Rightarrow$”。设 $P(A)=P(B)$。

则有 $P(A)\subseteq P(B)$并且 $P(B)\subseteq P(A)$。由题(2)知 $P(A)\subseteq P(B)\Rightarrow A\subseteq B$。

同样可证 $P(B)\subseteq P(A)\Rightarrow B\subseteq A$。所以 $A=B$。

“$\Leftarrow$”。设 $A=B$。则有 $A\subseteq B$ 并且 $B\subseteq A$。由题(1)知 $A\subseteq B\Rightarrow P(A)\subseteq P(B)$。

同样可证 $B\subseteq A\Rightarrow P(B)\subseteq P(A)$。所以 $P(A)=P(B)$。

10. 对下列各集族 C，求 $\bigcup\limits_{S\in C}S$，$\bigcap\limits_{S\in C}S$ 。

(1) $C=\{\Phi\}$。 (2) $C=\{\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$。

(3) $C=\{\Phi,\{\Phi\}\}$。　　　(4) $C=\{\{i\}\mid i\in I\}$

解　(1) $\bigcup\limits_{S\in C}S=\Phi$，　　$\bigcap\limits_{S\in C}S=\Phi$。

(2) $\bigcup\limits_{S\in C}S=\{a,b\}$，　　$\bigcap\limits_{S\in C}S=\Phi$。

(3) $\bigcup\limits_{S\in C}S=\{\Phi\}$，　　$\bigcap\limits_{S\in C}S=\Phi$。

(4) $\bigcup\limits_{S\in C}S=I$，　　$\bigcap\limits_{S\in C}S=\Phi$。

11. 化简下列集合表达式。

(1) $\{2,3\}\cup\{\{2\},\{3\}\}\cup\{2,\{3\}\}\cup\{\{2\},3\}$。

(2) $((A\cup B\cup C)\cap(A\cup B))-((A\cup(B-C))\cap A)$。

解　(1) $\{2,3\}\cup\{\{2\},\{3\}\}\cup\{2,\{3\}\}\cup\{\{2\},3\}=\{2,\{2\},3,\{3\}\}$。

(2) $((A\cup B\cup C)\cap(A\cup B))-((A\cup(B-C))\cap A)=(A\cup B)-(A)=B-A$。

12. 设 $A,B,C,D,F\subseteq I^+$，其中：

$A=\{x\mid x<12\}$；　　$B=\{x\mid x\leqslant 8\}$；　　$C=\{x\mid(x=2k)$并且$(k\in I^+)\}$；

$D=\{x\mid(x=3k)$并且$(k\in I^+)\}$；　　$E=\{x\mid(x=2k-1)$并且$(k\in I^+)\}$。

试用 A,B,C,D,E 表示下述集合。

(1)$\{2,4,6,8\}$。　(2) $\{3,6,9\}$。　(3) $\{10\}$。　(4)$\{x\mid(x$是偶数)并且$(x>10)\}$。

(5)$\{x\mid((x$是正偶数)且$(x\leqslant 10))$或$((x$是奇数)且$(x\geqslant 9))\}$。

解　(1) $\{2,4,6,8\}=B\cap C$。

(2) $\{3,6,9\}=A\cap D$。

(3) $\{10\}=(A-B)-E$。

(4) $\{x\mid(x$是偶数)并且$(x>10)\}=C-A$。

(5) $\{x\mid((x$是正偶数)且$(x\leqslant 10))$或$((x$是奇数)且$(x\geqslant 9))\}=(A\cap C)\cup(E-B)$。

13. 设 $A=\{x\mid(x=3y)$并且$(y\in I)$并且$(y\geqslant 4)\}$。

$B=\{x\mid(x=2y)$并且$(y\in I)\}$。

$C=\{x\mid(x\in I)$并且$(|x|\leqslant 10)\}$。

都是 I 的子集，试用 A,B,C 表示下列集合：

(1) 所有奇数的集合。　(2) $\{-10,-8,-6,-4,-2,0,2,4,6,8,10\}$。

(3)$\{x\mid(x=6y)$并且$(y\in I)$并且$(y\geqslant 2)\}$。　(4) $\{-9,-7,-5,-3,-1,1,3,5,7,9\}$。

(5)$\{x\mid(x=2y+1)$并且$(y\in I)$并且$(y\geqslant 5)\}\cup\{x\mid(x=2y-1)$并且$(y\in I)$并且$(y\leqslant -5)\}$。

解　(1) 所有奇数的集合$=I-B$。

(2) $\{-10,-8,-6,-4,-2,0,2,4,6,8,10\}=B\cap C$。

(3) $\{x\mid(x=6y)$并且$(y\in I)$并且$(y\geqslant 2)\}=A-\overline{B}$。

(4) $\{-9,-7,-5,-3,-1,1,3,5,7,9\}=C\cap\overline{B}$。

(5) $\{x\mid(x=2y+1)$并且$(y\in I)$并且$(y\geqslant 5)\}\cup\{x\mid(x=2y-1)$并且$(y\in I)$并且$(y\leqslant -5)\}=\overline{B\cup C}$。

14. 画出下列集合的文氏图。

(1) $\overline{A}\cap\overline{B}$　(2) $(A-(B\cup C))\cup((B\cup C)-A)$。　(3) $A\cap(\overline{B}\cup C)$。

解　(1) $\overline{A}\cap\overline{B}$的文氏图如图 1.3-1(a)中的阴影部分。

(2) $(A-(B\cup C))\cup((B\cup C)-A)$的文氏图如图 1.3-1(b)中的阴影部分。

(3) $A\cap(\overline{B}\cup C)$的文氏图如图 1.3-1(c)中的阴影部分。

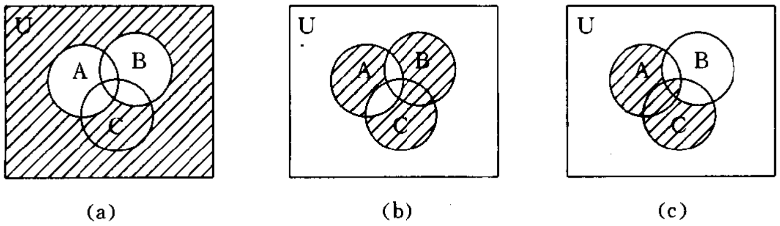

图 1.3-1

15. 用公式表示图中的阴影部分。

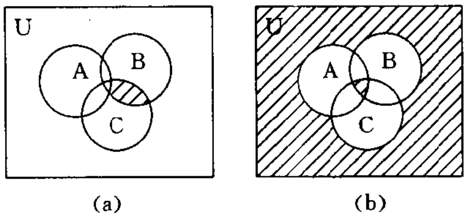

图 1.3-2

解 图 1.3-2(a)的阴影部分可表示为:$B\cap C\cap\overline{A}$。

图 1.3-2(b)的阴影部分可表示为:$(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C})\cup(A\cap B\cap C)$。

第二章　数理逻辑

§2.1　命题逻辑

§2.1.1　命　　题

1. 下列语句哪些是命题，哪些不是命题？

   (1) 看球赛去！

   (2) 离散数学是计算机系的一门必修课。

   (3) 计算机有空吗？

   (4) 请勿高声讲话！

   (5) 2 是无理数。

   (6) 今天天气多好啊！

   (7) 2 是素数，当且仅当三角形有三条边。

   (8) 明天我去上海。

   (9) 太阳系以外的星球上有生物。

   (10) 蓝色和黄色可以调配成绿色。

   (11) 不存在最大的质数。

   (12) $9+5\leqslant 10$。

   (13) $x=3$。

   (14) 我们要努力学习。

   (15) 雪是白的当且仅当太阳从东方升起。

   (16) 鸡有三只脚。

   (17) 把门打开！

   解　语句(2)，(5)，(7)，(8)，(9)，(10)，(11)，(12)，(14)，(15)，(16)是命题。

   语句(1)，(3)，(4)，(6)，(13)，(17)不是命题。

2. 确定下列命题的真假。

   (1) 没有最大的实数。

   (2) $\sqrt{2}$ 是有理数。

   (3) 如果 $1+2=3$，则 $4+5=9$。

   (4) 3 是奇数又是素数。

   (5) 如果 $1+2=3$ 当且仅当 $4+5\neq 9$。

   (6) 如果我掌握英语、法语，则学习其他欧洲语言就容易多了。

   (7) $9+6\leqslant 14$。

   (8) 4 是 2 的倍数或是 3 的倍数。

   (9) 2 是偶数且是奇数。

(10) 只有德、智、体全面发展的学生才能被评为“三好生”。

解 命题(1),(3),(4),(6),(8),(10)是真命题。

命题(2),(5),(7),(9)是假命题。

3. 将下列命题符号化。

(1) 太阳明亮且湿度不高。

(2) 如果我吃饭前完成家庭作业,并且天不下雨的话,那么,我们就去看球赛。

(3) 如果你明天看不到我,那么我就去芝加哥。

(4) 如果公用事业费用增加或者增加基金的要求被否定,那么当且仅当现有计算机设备不适用的时候,才需购买一台新计算机。

(5) 小王不但聪明而且用功。

(6) 虽然天气很好,老王还是不来。

(7) 小李一边吃饭,一边看电视。

(8) 明天他在广州,或在北京。

(9) 若 a 和 b 是偶数,则 $a+b$ 是偶数。

(10) 停机的原因在于语法错误或程序错误。

(11) 控制台打字机既可作为输入设备,又可作为输出设备。

(12) 如果你不去上学,那么我也不去上学。

解 (1) 设 P: 太阳是明亮的; Q: 湿度高。 则命题(1)可符号化为: $P \wedge \neg Q$。

(2) 设 P: 我去吃饭前完成家庭作业; Q: 天下雨; R: 我去看球。

则命题(2)可符号化为: $(P \wedge \neg Q) \rightarrow R$。

(3) 设 P: 明天看到我; Q: 我去芝加哥。 则命题(3)可符号化为: $\neg P \rightarrow Q$。

(4) 设 P: 公用事业费用增加; Q: 要求增加基金;

R: 现有计算机设备适用; S: 购买一台计算机。

则命题(4)可符号化为: $(P \vee \neg Q) \rightarrow (\neg R \leftrightarrow S)$。

(5) 设 P: 小王聪明; Q: 小王用功。 则命题(5)可符号化为: $P \wedge Q$。

(6) 设 P: 天气很好; Q: 老王来。 则命题(6)可符号化为: $P \wedge \neg Q$。

(7) 设 P: 小李吃饭; Q: 小李看电视。 则命题(7)可符号化为: $P \wedge Q$。

(8) 设 P: 明天他在广州; Q: 明天他在北京。 则命题(8)可符号化为: $P \vee Q$。

(9) 设 P: a 是偶数; Q: b 是偶数; R: $a+b$ 是偶数。

则命题(9)可符号化为: $(P \wedge Q) \rightarrow R$。

(10) 设 P: 停机的原因在于语法错误; Q: 停机的原因在于程序错误。

则命题(10)可符号化为: $P \wedge Q$。

(11) 设 P: 控制台打字机作为输入设备; Q: 控制台打字机作为输出设备。

则命题(11)可符号化为: $P \wedge Q$。

(12)设 P: 你去上学; Q: 我去上学。 则命题(12)可符号化为: $\neg P \rightarrow \neg Q$。

4. 设命题 P:这个材料很有趣; Q:这些习题很难; R:这门课程使人喜欢。

将下列句子符号化。

(1) 这个材料很有趣,并且这些习题很难。

(2) 这个材料无趣,习题也不难,那么,这门课程就不会使人喜欢。

(3) 这个材料无趣,习题也不难,而且这门课程也不使人喜欢。

(4) 这个材料很有趣意味着这些习题很难，反之亦然。

(5) 或者这个材料很有趣，或者这些习题很难，并且两者恰具其一。

解 (1) $P\wedge Q$。 (2) $(\neg P\wedge\neg Q)\rightarrow\neg R$。 (3) $\neg P\wedge\neg Q\wedge\neg R$。

(4) $P\leftrightarrow Q$。 (5) $(P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge Q)$或$(P\vee Q)\wedge(\neg P\vee\neg Q)$。

5. 设命题 P:天正在下雪； Q:我将进城； R:我有空。

用自然语言写出下列命题。

(1) $Q\leftrightarrow(R\wedge\neg P)$。 (2) $P\wedge Q$。 (3) $(Q\rightarrow R)\wedge(R\rightarrow Q)$。 (4) $\neg(R\vee P)$。

解 (1) 我将进城去当且仅当我有空且天不下雪。

(2) 虽然天正在下雪，但我将进城去。

(3) 天正在下雪当且仅当我有空。

(4) 天不下雪且我没有空。

6. 设 P,Q 的真值为 0，R,S 的真值为 1。试求下列命题的真值。

(1) $P\vee(Q\vee R)$。 (2) $(P\leftrightarrow Q)\wedge(\neg R\vee S)$。

(3) $(P\wedge(R\vee S))\rightarrow((P\vee Q)\wedge(R\wedge S))$。(4) $\neg(P\vee(Q\rightarrow(R\wedge\neg P)))\rightarrow(R\vee\neg S)$。

解 (1) $P\vee(Q\vee R)=0\vee(0\vee 1)=1$。

(2) $(P\leftrightarrow Q)\wedge(\neg R\vee S)=(0\leftrightarrow 0)\wedge(\neg 1\vee 1)=1\wedge(0\vee 1)=1\wedge 1=1$。

(3) $(P\wedge(R\vee S))\rightarrow((P\vee Q)\wedge(R\wedge S))=(0\wedge(1\vee 1))\rightarrow((0\vee 0)\wedge(1\wedge 1))$

$=0\rightarrow 0=1$。

(4) $\neg(P\vee(Q\rightarrow(R\wedge\neg P)))\rightarrow(R\vee\neg S)=\neg(0\vee(0\rightarrow(1\wedge\neg 0)))\rightarrow(1\vee\neg 1)$

$=0\rightarrow 1=1$。

§2.1.2 命题的真值表

1. 构造下列各命题的真值表，并指出下述命题中哪些是永真公式？永假公式？可满足公式？

(1) $(P\rightarrow P)\vee(P\rightarrow\neg P)$。

(2) $P\rightarrow(P\vee Q\vee R)$。

(3) $(P\vee\neg P)\rightarrow\neg Q$。

(4) $((P\rightarrow Q)\wedge(Q\rightarrow R))\rightarrow(P\rightarrow R)$。

(5) $((P\vee Q)\rightarrow R)\leftrightarrow Q$。

(6) $(P\rightarrow Q)\leftrightarrow(Q\rightarrow P)$。

(7) $(P\rightarrow Q)\leftrightarrow(\neg Q\rightarrow\neg P)$。

(8) $(P\vee Q)\wedge(\neg P\vee Q)\wedge(P\vee\neg Q)\wedge(\neg P\vee\neg Q)$。

(9) $(P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge Q)\vee(P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge\neg Q)$。

解 (1) $(P\rightarrow P)\vee(P\rightarrow\neg P)$的真值表如下：

P	$(P\rightarrow P)$	$(P\rightarrow\neg P)$	$(P\rightarrow P)\vee(P\rightarrow\neg P)$
0	1	1	1
1	1	0	1

(1) 为永真公式。

(2) $P \to (P \vee Q \vee R)$的真值表如下：

P	Q	R	$P \vee Q \vee R$	$P \to (P \vee Q \vee R)$
0	0	0	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

(2) 为永真公式。

(3) $(P \vee \neg P) \to \neg Q$ 的真值表如下：

P	Q	$P \vee \neg P$	$(P \vee \neg P) \to \neg Q$
0	0	1	1
0	1	1	0
1	0	1	1
1	1	1	0

(3) 为可满足公式。

(4) $((P \to Q) \wedge (Q \to R)) \to (P \to R)$的真值表如下：

P	Q	R	$P \to Q$	$Q \to R$	$P \to R$	$(P \to Q) \wedge (Q \to R) \to (P \to R)$
0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	1
1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1

(4) 为永真公式。

(5) $((P \vee Q) \to R) \leftrightarrow Q$ 的真值表如下：

P	Q	R	$P \vee Q \to R$	$(P \vee Q \to R) \leftrightarrow Q$
0	0	0	1	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0

续表

P	Q	R	$P\vee Q\to R$	$(P\vee Q\to R)\leftrightarrow Q$
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1

(5) 为可满足公式。

(6) $(P\to Q)\leftrightarrow(Q\to P)$的真值表如下：

P	Q	$P\to Q$	$Q\to P$	$(P\to Q)\leftrightarrow(Q\to P)$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
1	1	1	1	1

(6) 为可满足公式。

(7) $(P\to Q)\leftrightarrow(\neg Q\to\neg P)$的真值表如下：

P	Q	$P\to Q$	$\neg Q\to\neg P$	$(P\to Q)\leftrightarrow(\neg Q\to\neg P)$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

(7) 为永真公式。

(8) 设$G=(P\vee Q)\wedge(\neg P\vee Q)\wedge(P\vee\neg Q)\wedge(\neg P\vee\neg Q)$，则$G$的真值表如下：

P	Q	$P\vee Q$	$\neg P\vee Q$	$P\vee\neg Q$	$\neg P\vee\neg Q$	G
0	0	0	1	1	1	0
0	1	1	1	0	1	0
1	0	1	0	1	1	0
1	1	1	1	1	0	0

(8) 为永假公式。

(9) 设$G=(P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge Q)\vee(P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge\neg Q)$，则$G$的真值表如下：