《最优化基础——模型与方法》系列教材

随机规划与模糊规划

刘宝碇
赵瑞清

清华大学出版社
http://www.tup.tsinghua.edu.cn

《最优化基础——模型与方法》系列教材

随机规划与模糊规划

刘宝碇 赵瑞清

清华大学出版社

（京）新登字158号

内 容 简 介

随机规划和模糊规划是处理随机和模糊优化问题的两大数学规划工具．本书提供了随机规划和模糊规划的统一原理，称之为不确定规划．主要目的是为不确定环境中的优化理论奠定一个基础．本书的重点是建模思想、进化计算及应用，而不是数学定理和证明．不确定规划理论由三大类组成：期望值模型，机会约束规划和相关机会规划．为了求解不确定规划模型，本书介绍了一系列基于随机或模糊模拟的遗传算法；为了应用于实践，本书讨论了不确定规划的一些应用例子；为了进一步的学术研究，书中反映了不确定规划的最新研究成果．本书可作为高年级大学生和研究生教材，也可作为运筹学、管理科学、信息科学、系统科学以及计算机科学和工程领域的学者和技术人员的参考书．

书　名：随机规划与模糊规划
作　者：刘宝碇　赵瑞清
出版者：清华大学出版社（北京清华大学校内，邮编 100084）
　　　　因特网地址：www.tup.tsinghua.edu.cn
印刷者：北京昌平环球印刷厂
发行者：新华书店总店北京科技发行所
开　本：850×1168 1/32　印张：8.375　字数：208 千字
版　次：1998 年 6 月第 1 版　1998 年 6 月第 1 次印刷
书　号：ISBN 7-302-03007-3/O·195
印　数：0001～4000
定　价：12.00 元

《最优化基础——模型与方法》系列教材序言

最优化是人们在工程技术、科学研究和经济管理的诸多领域中经常遇到的问题. 结构设计要在满足强度要求等条件下使所用材料的总重量最轻; 资源分配要使各用户利用有限资源产生的总效益最大; 安排运输方案要在满足物资需求和装载条件下使运输总费用最低; 编制生产计划要按照产品工艺流程和顾客需求, 尽量降低人力、设备、原材料等成本使总利润最高. 可以预料, 随着科学技术尤其是计算机技术的不断发展, 以及数学理论与方法向各门学科和各个应用领域的更广泛、更深入的渗透, 在即将到来的 21 世纪信息时代, 最优化理论和技术必将在社会的诸多方面起着越来越大的作用.

解决实际生活中优化问题的手段大致有以下几种: 一是靠经验的积累, 凭主观作判断; 二是做试验选方案, 比优劣定决策; 三是建立数学模型, 求解最优策略. 虽然由于建模时要作适当简化, 可能使结果不一定非常完善, 但是它基于客观数据, 求解问题简便、灵活、经济, 而且规模可以很大 (将来会越来越大). 人们还可以吸收从经验得到的规则, 用实验来不断校正建立的模型. 随着数学方法和计算机技术的进步, 用建模和数值模拟解决优化问题这一手段, 将会越来越显示出它的效能和威力. 显然, 在决策定量化、科学化的呼声日益高涨的今天, 数学建模方法的推广应用是符合时代潮流和形势发展需要的.

最优化理论、模型与方法所包含的内容很多, 国内已出版了不少教材和专著介绍其各个分支. 但是一方面, 近年来发展起来的、有着广泛应用背景的规划模型 (如随机规划、模糊规划等), 以及一些已经为许多人采用、受到广泛关注的优化算法 (如模拟

退火、遗传算法等），还缺乏详细和系统的介绍；另一方面，一些偏重优化理论和方法的教材，其要求难以与工科学生的数学知识衔接，也缺少对于应用来说十分重要的建模过程和软件介绍，而一些比较通俗的运筹学教材，则在加强理论基础，适应学生将来从事科研工作需要上考虑较少。我们这套教材试图弥补以上两方面的缺陷，力求体现下述特点：

1. 内容既包含传统的线性规划与非线性规划等部分，又纳入有广泛应用前景的随机规划和模糊规划；在传统内容中，既注重典型的数学思想和方法的系统叙述，又引入丰富的建模实例。

2. 数学基础既与工科学生所学知识衔接，又考虑到研究生阅读文献、从事科研工作的需要，适当提高理论基础的起点。

3. 对一般教材介绍的诸多算法进行精选，配合介绍一些应用软件，并引入近年来迅速发展的若干新算法。

本系列教材将陆续出版，首批四册为：《线性与非线性规划》、《网络优化》、《现代优化计算方法》、《随机规划与模糊规划》。

由于水平所限，书中难免有缺陷和错误，诚恳希望读者予以批评指正。

《最优化基础 —— 模型与方法》系列教材编委会

1998 年 5 月

系列教材编委会成员名单

（姓氏笔划为序）

主编：姜启源　谭泽光

编委：刘宝碇　邢文训　陈宝林　林翠琴　胡冠章

黄红选　谢金星

序　言

在现实世界上，人们制定决策时经常会碰到两类不确定性现象：一类是随机现象，一类是模糊现象。描述、刻画随机现象的量称为随机变量，而描述、刻画模糊现象的量称为模糊集。为了方便，我们不妨把二者分别称为随机参数和模糊参数。含有随机和模糊参数的数学规划分别称为随机规划和模糊规划。既然随机性和模糊性都是用来处理不确定性的，我们将随机规划和模糊规划统称为不确定规划。本书将为随机规划和模糊规划提供统一的原理，并为一般不确定环境下的优化理论打下基础。

在很多实际问题中，如管理、工程、经济、工业以及生态等领域，系统是一个广泛使用的概念，而一个复杂的决策系统通常具有多维性、多样性、多功能性和多准则性，并带有随机或模糊参数。对于随机规划问题中所出现的随机变量，出于不同的管理目的和技术要求，采用的方法自然也不同。第一类处理随机规划中随机变量的方法是所谓的期望值模型，即一种在期望值约束下，使目标函数的概率期望达到最优的模型。第二类方法是由 Charnes 和 Cooper 提出的机会约束规划，主要针对约束条件中含有随机变量，且必须在观测到随机变量的实现之前作出决策的情况。考虑到所作决策在不利情况发生时可能不满足约束条件，而采用一种原则：即允许所作决策在一定程度上不满足约束条件，但该决策应使约束条件成立的概率不小于某一置信水平 α 。第三类随机规划是相关机会规划，它是使事件的机会函数在不确定环境下达到最优的方法。在确定性规划以及期望值模型和机会约束规划中，

当对实际问题建模以后，可行集本质上是确定的，这就可能导致所给出的最优解在实际中无法执行，而相关机会规划并不假定可行集是确定的。实际上相关机会规划的可行集被描述为所谓的不确定环境。虽然相关机会规划也给出一个确定的解，但这个解只是要求在实际问题中尽可能地执行。显然，相关机会规划的这一特点与确定性规划、期望值模型和机会约束规划是截然不同的。

沿用随机环境中机会约束规划的思想，在模糊环境中，假定模糊约束成立的可能性不小于置信水平 α，这样就可以建立模糊机会约束规划、机会约束多目标规划和机会约束目标规划。类似地，沿用随机环境下相关机会规划的思想，亦有模糊相关机会规划、相关机会多目标规划和相关机会目标规划理论。

随着计算机的飞速发展和革新算法的不断涌现，许多复杂的优化问题已可以通过计算机求解。虽然目前计算机的能力还只能处理小规模的不确定规划模型，但是，我们坚信计算机的能力将会大幅度提高。这就为求解更加复杂的优化问题提供了一个契机，它不仅表现在已有的复杂模型可以通过计算机求解，而且表现在我们可以提出更丰富的建模思想。基于这一事实，本书采用全新的观点处理随机规划和模糊规划，并且允许不确定规划中的目标函数和约束函数是非线性的，随机参数的密度函数或模糊参数的隶属函数可以有更一般的形式，模型的结构可以更加复杂等等。

本书为求解传统方法所不能解决的随机规划和模糊规划模型，设计了一系列基于随机模拟或模糊模拟的遗传算法。虽然遗传算法有耗时多、速度慢等缺点，但对传统方法无法处理的问题，遗传算法是一种非常有效的方法，而且随着计算机速度的提高，实际问题将可以在合理的计算时间内得到解决。

本书共分 12 章。第 1 章主要介绍数学规划的基本概念，如线性规划、非线性规划、多目标规划、目标规划以及整数规划，同时也勾画出了随机规划和模糊规划的理论框架。第 2 章为求解优

化问题，如单目标规划、多目标规划和目标规划，提供了一个遗传算法，并通过一些数值例子解释了遗传算法的有效性。第 3 章列举了生成随机数的方法，并介绍模糊集合的一些基础理论，以及随机模拟和模糊模拟的技术。第 4 章给出了期望值模型的一些基本性质。第 5 章讨论了带有随机参数的机会约束规划。第 6 章给出一些机会约束规划模型的应用。第 7 章讨论了随机环境下的相关机会规划模型。第 8 章通过相关机会规划模型对随机决策系统进行了建模。第 9 章把随机机会约束规划推广到模糊机会约束规划。而第 10 章把随机相关机会规划推广到模糊相关机会约束规划。传统的数学规划模型提供的是使一些目标函数达到最优的清晰决策，然而，对实际问题，有时应该提供的是模糊决策而不是清晰决策，所以第 11 章建立了带有模糊决策的模糊规划的理论构架。在第 9 章和第 11 章所讨论的模糊系统中的机会约束规划模型本质上是一种 Maximax 模型 (乐观模型)，即极大化可能达到的最大收益。与 Maximax 模型的思想不同，第 12 章介绍了 Minimax 机会约束规划模型，其思想是极大化可能达到的最小收益。

本书可作为高等院校有关专业的高年级大学生和研究生的教材，也可作为运筹学、管理科学、计算机科学、系统科学、信息科学与工程等方面的学者和技术人员的参考书。

目　录

第 1 章

数学规划简介

数学规划是运筹学的一个重要分支，并已被广泛地应用到很多领域. 数学规划可以描述为在一些数学关系诸如等式或不等式表示的约束条件下，求一个 (或一组) 函数的极值问题的方法. 常见的数学规划有线性规划、非线性规划、多目标规划、目标规划、整数规划、多层规划、动态规划以及本书重点讨论的随机规划和模糊规划等等.

本章里，介绍一些数学规划的基本概念和处理技术，为引入随机规划和模糊规划打下基础.

1.1 线 性 规 划

作为优化领域最重要的工具之一，线性规划是用来处理在线性等式及不等式组的约束条件下，求线性函数的极值问题的方法. 线性规划的标准形式可以写为

$$\left\{\begin{array}{l}
\max\ c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
\text{s.t.} \\
\qquad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
\qquad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\qquad\qquad \cdots \\
\qquad a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\
\qquad x_i \ge 0, \quad i = 1, 2, \cdots, n.
\end{array}\right. \tag{1.1}$$

也可以表示成矩阵的形式

$$\begin{cases} \max\ \mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \\ \text{s.t.} \\ \qquad \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{B} \\ \qquad \mathbf{x} \geq 0, \end{cases} \tag{1.2}$$

其中 $\mathbf{C} = (c_1, c_2, \cdots, c_n)^{\mathrm{T}}$ ， $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m\times n}$ 和 $\mathbf{B} = (b_1, b_2, \cdots, b_m)^{\mathrm{T}}$ 为已知系数，而 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$ 为决策向量.

在线性规划的标准形式 (1.2) 中，所有决策变量 x_i, $i = 1, 2, \cdots, n$ 均假定为非负的. 在实际问题中这一假定通常是成立的. 如若不然，我们亦可将其化成符合这一假定的等价的线性规划. 例如，若变量 x_i 没有非负性假设，我们可以用 $x_i' - x_i''$ 取代它，其中 x_i' 和 x_i'' 是两个新的变量，且 $x_i' \geq 0$ 和 $x_i'' \geq 0$. 这样，线性规划问题被转化为具有非负变量的等价的线性规划.

在许多实际问题中，一些约束含有不等式符号 $\leq$ 或 $\geq$. 对于含有 $\leq$ 的约束，可在约束左端加上一个非负变量使其成为等式约束. 同样地，对含有 $\geq$ 的约束，可在约束左端减去一个非负变量使其成为等式约束. 在约束中新增加的变量称为松弛变量，而原来的变量称为结构变量.

一个解 $\mathbf{x}$ 称为线性规划 (1.2) 的可行解，如果 $\mathbf{x}$ 满足 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{B}$ ，且 $\mathbf{x} \geq 0$. 由所有可行解构成的集合称为可行集. 一个可行解 $\mathbf{x}^*$ 称为线性规划 (1.2) 的最优解，如果对所有的可行解 $\mathbf{x}$ ，有 $\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \leq \mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}^*$ 成立.

欧式空间 $\Re^n$ 的子集 S 称为凸的， 如果 S 中任意两点的连线也在 S 中，即 S 是凸的当且仅当对任意的 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in S$ 和 $\lambda \in [0, 1]$，有 $\lambda\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2 \in S$. 设 $\mathbf{x}_1$ 和 $\mathbf{x}_2$ 是 (1.2) 的任意两个可行解，

及 $0 \le \lambda \le 1$，那么

$$\begin{cases} \mathbf{A}(\lambda\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2) = \lambda\mathbf{A}\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{A}\mathbf{x}_2 = \mathbf{B} \\ \lambda\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2 \ge \lambda 0 + (1-\lambda)0 = 0, \end{cases}$$

这意味着 $\lambda\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2$ 对于线性规划 (1.2) 是可行的. 因此，线性规划的可行集永远是凸的.

一个点 $\mathbf{x}$ 称为凸集 S 的极点，如果 $\mathbf{x} \in S$，且 $\mathbf{x}$ 不能表示成 S 中其它任何两点的凸组合. 已经证明，在可行集 S 有界的情况下，线性规划 (1.2) 的最优解一定是可行集中的一个极点. 这一事实奠定了 Dantzig[28] 所给出的一种求解线性规划非常有效且广泛使用的方法 —— 单纯形法的理论基础. 简单地说，单纯形法仅检查可行集的极点，而不是所有的可行解. 首先，单纯形法选择一个极点作为初始点，然后，再选择另一个极点，以改善目标函数值. 重复以上过程，直到目标函数值不能改进为止. 最后的一个极点就是最优解. 为了解决大规模的或特殊结构的线性规划问题，一些学者相继提出了一些先进的技术，如修正单纯形法、对偶单纯形法、原始对偶单纯形法、Wolfe-Dantzig 分解法以及 Karmarkar 内点算法. 详细内容，读者可以查阅有关线性规划的书籍和论文.

1.2　非线性规划

非线性规划是用来处理在非线性等式及不等式组的约束条件下，求非线性函数的极值问题的方法. 很多实际问题可以归结为非线性规划问题. 非线性规划的一般形式可以写为

$$\begin{cases} \min \ f(\mathbf{x}) \\ \text{s.t.} \\ \qquad g_j(\mathbf{x}) \le 0, \quad j = 1, 2, \cdots, p, \end{cases} \tag{1.3}$$

即在一组约束下, 极小化 (有时是极大化) 一个函数. 如果在非线性规划 (1.3) 中没有约束, 则称为无约束非线性规划. 如果函数 $f(\mathbf{x})$ 和 $g_j(\mathbf{x})$ $(j=1,2,\cdots,p)$ 均为凸函数, 则非线性规划 (1.3) 称为凸规划. 如果 $f(\mathbf{x})$ 可以表示为 $f(\mathbf{x})=f_1(x_1)+f_2(x_2)+\cdots+f_n(x_n)$, 则非线性规划 (1.3) 称为可分离规划. 如果函数 $f(\mathbf{x})$ 是二次的, 并且所有函数 $g_j(\mathbf{x}), j=1,2,\cdots,p$ 都是线性的, 则非线性规划 (1.3) 称为二次规划. 如果函数 $f(\mathbf{x})$ 和 $g_j(\mathbf{x})(j=1,2,\cdots,p)$ 的形式是 $\sum_j a_j \prod_{i=1}^n x_i^{b_{ij}}$, 且对所有的序号 j, $a_j>0$, 则称非线性规划 (1.3) 为几何规划.

在非线性规划 (1.3) 中, 向量 $\mathbf{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 称为决策向量, 其中 n 个变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 称为决策分量. 决策向量 $\mathbf{x}$ 的函数 f 称为目标函数. 集合

$$S=\left\{\mathbf{x}\in\Re^n \,\middle|\, g_j(\mathbf{x})\le 0,\ j=1,2,\cdots,p\right\} \tag{1.4}$$

称为可行集. 满足条件 $\mathbf{x}\in S$ 的解称为可行解. 非线性规划问题的目的在于找到一个解 $\mathbf{x}^*\in S$ 使得

$$f(\mathbf{x}^*)\le f(\mathbf{x}),\quad \forall \mathbf{x}\in S, \tag{1.5}$$

如此的解 $\mathbf{x}^*$ 称为最优解. 这种情况下的最优解也称为极小解. 最优解 $\mathbf{x}^*$ 所对应的目标值 $f(\mathbf{x}^*)$ 称为最优值.

对于一个极大化问题

$$\begin{cases} \max\ f(\mathbf{x}) \\ \text{s.t.} \\ \qquad g_j(\mathbf{x})\le 0,\quad j=1,2,\cdots,p, \end{cases} \tag{1.6}$$

可以通过把目标函数乘以 -1, 变成在同样约束下的极小化问题, 而两个数学规划具有同样的最优解. 有时, 约束集合中不仅含有

不等式，而且含有等式，例如，

$$\begin{cases} g_j(\mathbf{x}) \le 0, & j = 1, 2, \cdots, p \\ h_k(\mathbf{x}) = 0, & k = 1, 2, \cdots, q. \end{cases}$$

显然，q 个等式意味着我们可以删除非线性规划中的 q 个变量，即可以用余下的变量表示这 q 个变量. 可以通过解方程组 $h_k(\mathbf{x}) = 0 (k = 1, 2, \cdots, q)$ 做到这一点. 所以，在本书中，使用 (1.3) 作为单目标非线性规划的标准形式.

对一些结构特殊的非线性规划模型，通过数学理论分析问题的结构，已经建立了大量的经典方法. 在理论方面，Kuhn-Tucker 条件占有一席之地. 下面对这一理论做一简单介绍. 首先，我们给出一些概念. 不等式约束 $g_j(\mathbf{x}) \le 0$ 称为在点 $\mathbf{x}^*$ 是起作用的约束，如果 $g_j(\mathbf{x}^*) = 0$. 一个满足 $g_j(\mathbf{x}^*) \le 0$ 的点 $\mathbf{x}^*$ 称为规则的，如果所有起作用的约束的梯度向量 $\nabla g_j(\mathbf{x})$ 是线性独立的. 假设 $\mathbf{x}^*$ 是非线性规划 (1.3) 的规则点，并假设所有函数 $f(\mathbf{x})$ 和 $g_j(\mathbf{x}) (j = 1, 2, \cdots, p)$ 可导. 如果 $\mathbf{x}^*$ 是局部最优解，则存在 Lagrange 算子 $\lambda_j (j = 1, 2, \cdots, p)$ 使下面的 Kuhn-Tucker 条件成立，

$$\begin{cases} \nabla f(\mathbf{x}^*) + \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \nabla g_j(\mathbf{x}^*) = 0 \\ \lambda_j g_j(\mathbf{x}^*) = 0, \quad j = 1, 2, \cdots, p \\ \lambda_j \ge 0, \quad j = 1, 2, \cdots, p. \end{cases} \tag{1.7}$$

如果所有函数 $f(\mathbf{x})$ 和 $g_j(\mathbf{x}), j = 1, 2, \cdots, p$ 均为凸的，并且可导，$\mathbf{x}^*$ 满足 Kuhn-Tucker 条件 (1.7)，则可以证明点 $\mathbf{x}^*$ 是问题 (1.3) 的全局最小解.

现在考虑一个无约束问题，即在区域 $\Re^n$ 上极小化一个实值函数. 在实际问题中，当函数的一阶导数或二阶导数计算比较困难或根本无法计算时，通常无法使用经典方法. 无论导数存在与