

岩波講座 基礎工学 20

制御工学Ⅲ

藤井澄二編

岩波書店



71.2
001
=7-5

岩波講座 基礎工学 20

制 御 工 学

Ⅲ

藤	井	澄	二
正	田	英	介
茅		陽	一
北	森	俊	行

≡/0601/57



岩波講座 基礎工学 20 制御工学Ⅲ (全19巻/第7回配本)

1968年7月26日 第1刷発行 ©

東京都千代田区神田一ツ橋2-3 株式会社 岩波書店/精興社印刷・松岳社製本

目 次

はじめに

第1章 序 論

- 1. 1 制御工学の概念 1
- 1. 2 制御工学の歩み 4

第2章 制御系要素の特性と表現

- 2. 1 制御系の表現 9
- 2. 2 工学系の基本方程式 10
- 2. 3 伝達関数による表現 17
- 2. 4 制御系要素の伝達関数 20
- 2. 5 伝達関数の物理的性質 26
- 2. 6 多入力多出力系 31
- 2. 7 伝達関数の結合とブロック線図の整理 33
- 2. 8 ま と め 36

第3章 線形フィードバック制御系

- 3. 1 フィードバック制御 39
- 3. 2 フィードバックの効果 41
- 3. 3 フィードバック制御系 43
- 3. 4 信号伝達線図 48
- 3. 5 制御系の安定性 52
- 3. 6 制御系の時間応答 64
- 3. 7 制御系の周波数応答 79
- 3. 8 制御系の設計と補償回路 89
- 3. 9 多入力多出力系 103
- 3.10 ま と め 105

第4章 サンプル値制御系

- 4. 1 サンプル値制御系 107

4. 2	サンプラーとホールド回路	108
4. 3	z 変換	114
4. 4	パルス伝達関数	117
4. 5	サンプル値系過渡応答の解析	123
4. 6	サンプル値系の安定性	126
4. 7	サンプル値系の特性補償	131
4. 8	サンプル値制御系の設計	135
4. 9	有限整定応答	137
4.10	ま と め	140

第5章 統計的手法による制御系のとりあつかい

5. 1	不規則信号の性質	144
5. 2	相関関数とスペクトル	152
5. 3	不規則信号に対する制御系の応答	157
5. 4	制御系の最適設計問題と最適の基準	163
5. 5	補償要素パラメーターの最適選定	164
5. 6	最適濾波器の理論☆	172
5. 7	最適補償要素の選定☆	178
5. 8	ま と め	183

第6章 動特性の測定

6. 1	動特性の表現	185
6. 2	動特性試験法	193
6. 3	白色信号を用いた測定	201
6. 4	操業信号データよりの動特性の推定☆	206
6. 5	ま と め	213

第7章 非線形制御系

7. 1	種々の非線形特性	215
7. 2	線形化法	222
7. 3	記述関数法	226
7. 4	位相面解析法	238
7. 5	安定判別理論	248
7. 6	ま と め	251

第8章 最適化

8.1 最適化の問題と手法	254
8.2 試行錯誤による静的最適化——“山登り”問題——	261
8.3 バング・バング制御	274
8.4 最適制御	276
8.5 適応制御	290
8.6 まとめ	294

第9章 制御系の基本的性質

9.1 制御系の状態空間における表現	297
9.2 制御系の基本的性質	310
9.3 制御系の構造	319
9.4 まとめ	325

さらに勉強するために 327

付 録

I ラプラス変換	331
II ラプラス変換・ z 変換・修飾 z 変換表	336
III 行列および行列式	337

これまで述べてきたところでは主として時間的に不変で線形な要素からなる系について考えてきた。しかし実際にはいたるところで非線形特性が問題となり、線形系では起こらなかったような面倒な現象に遭遇する。そもそも非線形系とは“線形でない系”という消極的な定義しか与えられていないから、そのような範疇に入る系は限りがなく、それだけに一般的に取り扱うことはむずかしくなる。線形制御理論では重ね合せの原理が成立したおかげで著しい発展を遂げたわけであるが、ここではそれが使えないので、実際問題で重要な非線形特性の範囲を限り、その範囲内で実用的な取扱いの手法を展開していくことになる。したがって、体系的でなく幾つかの手法の羅列にならざるを得ない。

本章ではまず非線形特性や非線形系特有の現象に触れた後、非線形系を線形近似して前章までの線形系の設計法への橋渡しをする線形化法と記述関数法、および非線形系を非線形系のままで取り扱う位相面解析法、および適用範囲の広い安定判別法を説明する。

非線形系は一般に取扱いがむずかしいが、線形という制限を取り除いたわけであるから、考察の対象はより広くなり、したがって制御系としての性能のより優れたものも得られる筈であり、その点からは極めて重要な分野である。ただ現在のところ非線形性の特徴を活かした統一的設計法はないので本章では主として解析的な面だけになる。適応制御、最適化制御、最適制御などの設計は一般に非線形問題であるが、これらは第8章で取り扱われる。

7.1 種々の非線形特性

一般にどのような物理的あるいは化学的な系でも変数の広い変域にわたって見れば多かれ少なかれ非線形性をもっている。その中で特に非線形性が強いも

の例をあげよう。

電気抵抗体に電流が流れるとジュール熱が発生する。そこで電流 i を入力、単位時間に発生する熱エネルギー q を出力にとると、電気抵抗を R として

$$q = Ri^2 \quad (7.1)$$

という入出力関係が成立する。このとき入力 i_1 に対する出力は $q_1 = Ri_1^2$ 、入力 i_2 に対する出力は $q_2 = Ri_2^2$ であるが、入力 $i_1 + i_2$ に対する出力は $R(i_1 + i_2)^2 = Ri_1^2 + Ri_2^2 + 2Ri_1i_2 \neq q_1 + q_2$ となって、重ね合せの原理が成立しない。入出力の関係を図示すればもちろん非直線的であって、この場合は(7.1)から図7.1のように放物線になる。

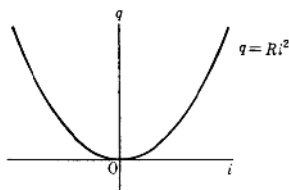


図7.1 電流と発生熱エネルギーの関係

鉄などの強磁性体を磁場の中に置いたとき、その強磁性体の中に生ずる磁束密度 B は外部磁場の強さ H との間に、図7.2のような曲線関係がある。これは現在の磁場の強さのみならず、それより以前の磁化のされ方にも依存した、いわゆるヒステリシス特性である。チタン酸バリウムの結晶のような強誘電体を電界の中に置いたときにも、その外部電界の強さと強誘電体中の電束密度との間に強磁性体の場合と類似のヒステリシス特性がある。

さらにこの図7.2をみると入力としての磁場の強さがある程度以上大きくなっても磁性体内の磁束密度がそれ以上には増さない特性に気がつく。この特性を飽和特性という。直流増幅器も入力信号がいかに大きくなっても出力信号は

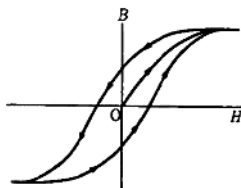


図7.2 磁化曲線

電源電圧以上にはなれないからやはり飽和特性が現われる。

機械の構成要素として用いられるカムやリンク機構は積極的に種々の非線形特性を作りだすためのものであるともいえるが、機械系で一般には望ましくない非線形性として不感帯やバックラッシュなどがある。不感帯は図7.3のように、入力として部材Aが移動しても、その変位 x が $|x| < d$ のときは出力としての部材Bの変位 y が0で、 $|x| \geq d$ のときに y が x とともに変化する特性であって、入出力関係は図7.4のようになる。バックラッシュはヒステリシスと同じであって、機械系では図7.5のように、たとえば歯車の歯にすきまがあるときに起こる。この場合の入出力関係は図7.6のようになる。

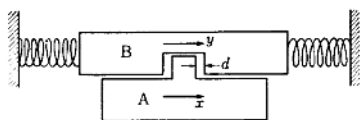


図7.3 不感帯機構

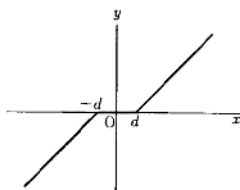


図7.4 不感帯特性

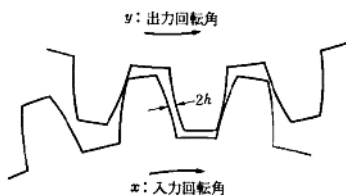


図7.5 歯車のバックラッシュ

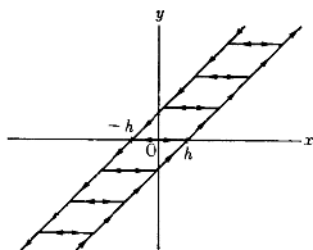


図7.6 バックラッシュ特性

図7.7のように上から水を注ぎ、下の小さい穴から放出している水槽について、水の供給流量 q と水槽内水面位 h との関係を調べよう。 q は体積流量とし、下からの放水速度を v 、放水穴面積を S 、水槽の断面積を A 、重力の加速度を g とすると、水槽に単位時間にたまる水量は

$$A \frac{dh}{dt} = q - vS \quad (7.2)$$

であるが、トリチェリーの定理から放水速度 v は

$$v = \sqrt{2gh}$$

で与えられるので、結局(7.2)より

$$A \frac{dh}{dt} + S\sqrt{2gh} = q \quad (7.3)$$

を得る。これがすなわち供給流量 q と水位 h との関係式である。この入出力関係は微分方程式で表現されていて時間に関係するので、前例のように横軸に入力、縦軸に出力をとった2次元平面では表現できないが、式中に \sqrt{h} の項が入っていることから線形でないことは明らかである。重ね合せの原理が成り立たないことを確かめるには次のようにすればよい。いま入力 $q_1(t)$ に対する出力を $h_1(t)$ 、入力 $q_2(t)$ に対する出力を $h_2(t)$ としたとき、

$$A \frac{dh_1}{dt} + S\sqrt{2gh_1} = q_1$$

$$A \frac{dh_2}{dt} + S\sqrt{2gh_2} = q_2$$

であり、また入力 $q_1(t) + q_2(t)$ に対する出力を $h(t)$ としたとき、

$$A \frac{dh}{dt} + S\sqrt{2gh} = q_1 + q_2$$

である。ところで $h = h_1 + h_2$ がこの連立方程式を満たさないことは、上の3式から q_1 と q_2 を消去して、 h に $h_1 + h_2$ を代入すると

$$\sqrt{h_1 + h_2} = \sqrt{h_1} + \sqrt{h_2}$$

となつて、これが一般には正しくないことから結論される。これすなわち $q_1(t) + q_2(t)$ を入力としたときの出力が一般には $h_1(t) + h_2(t)$ でないことを示しているわけである。

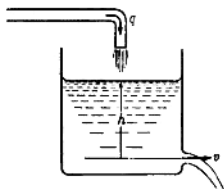


図 7.7 水槽の水位系

遠心振子式调速機に用いられる遠心振子も、図7.8のように回転角速度 ω を入力とし、腕木の開き角 φ を出力と考えたとき非線形微分方程式で表現される。質量 m に働く力は図のように遠心力 $ml\omega^2 \sin \varphi$ と重力 mg であり、その開き角 φ への効果は $ml\omega^2 \sin \varphi \cos \varphi - mg \sin \varphi$ であるから、接ぎ手その他の摩擦を無視すると運動方程式は

$$ml \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + mg \sin \varphi - ml\omega^2 \sin \varphi \cos \varphi = 0 \quad (7.4)$$

となる。ここでは出力 φ に関する方程式に $\sin \varphi$ や $\cos \varphi$ が入り、しかも入力 ω が2乗されて第3項の係数の形で影響していて複雑な非線形性をもっている。

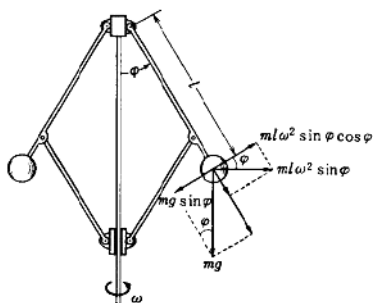


図7.8 遠心振子

非線形特性の分類 種々の非線形特性を考えてきたが、これらをその解析の取り扱い上から分類すると次のように分けてみることができる。

- | | | |
|-------|---|---|
| 非線形特性 | { | (a ₁) 現在の出力が現在の入力の値のみによってきまる、静的な非線形特性、 |
| | | (a ₂) 現在の出力が現在の入力および過去の変化の経歴によってきまる、履歴特性(ヒステリシス特性)、 |
| | | (b) 現在の出力が過去の任意の時刻における系の状態とその後に加わった入力とからきまる、動的な非線形特性。 |

(a₁)の静的な非線形特性というのは、さきのジュール熱と電流の関係や飽和、不感帯などのように、入力を横軸、出力を縦軸の2次元平面における曲線で入出力関係が完全に表現できる特性、いかえると静特性曲線だけで表現できる

種類の特性である。(a₂)はヒステリシス特性のように入出力関係の曲線がループを描いていて、そのどちらの値をとるかはそれまでの変化の経歴を与えないと定まらないような特性であって、多少とも過去の入出力値に関係する点で動的であるが、入出力関係は(a₁)と同様に2次元平面における特性曲線で完全に表現することができるものである。(b)は水槽や遠心振子の例にみたように、その入出力関係が、微分方程式で記述される種類の特性である[†]。したがって動的な時間的経過が問題になり、2次元平面の静特性曲線では表現することができない。

線形系の場合の周波数応答法にならって、非線形系にも正弦波入力を加え、それとその出力に含まれる入力と同じ周波数成分との振幅比、位相差を調べてみると、(a₁)の特性では振幅比、位相差とも周波数に無関係で、しかも位相差が0であり、(a₂)では振幅比、位相差とも周波数には無関係ではあるが、位相差が0でなく、(b)では振幅比、位相差とも一般には周波数に依存するという特徴をもっている。

非線形系に固有な現象 非線形系には線形系に見られなかった種々の現象が起こる。そのうちいくつかの重要な現象に触れておこう。

線形系では正弦波状入力に加わったときの出力波形は、その振幅と位相が入力のそれと異なってはいても周波数はまったく同じものになる。出力波形には入力波形に含まれていなかった周波数成分が全然含まれていないのが線形系の特徴であるが、非線形系ではこのような性質が一般には成り立たない。

線形系ではその安定性は系そのものによって定まってしまう。すなわちその系の伝達関数の極が s 平面の右半平面にあるかないかで定まってしまう。しかし非線形系では系のみで定まるとは限らず、入力信号の大きさや形、初期条件によって安定であったり不安定であったりする。たとえば図7.9(a)のようなフィードバック制御系を考えよう。ここで要素 N は図7.9(b)の形の不感帯特性をもっているとする。このときもしこの系の初期条件あるいは入力が十分小さくて、 m_1 が非線形要素 N の不感帯内におさまってしまっても m_2 に何もでてこなければ出力は0で系は安定である。しかし初期条件あるいは入力が大きく

[†] 系によっては微分積分方程式や微分差分方程式などで記述しなければならないものも数限りなくありうるが、それらの解析は一般に極めて困難である。

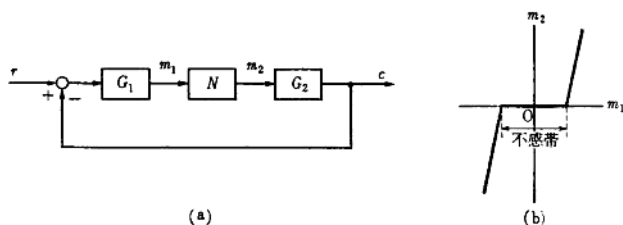


図 7.9 不感帯要素をもつフィードバック制御系

て m_1 が不感帯からはみだし、 m_2 が比較的大きくすると等価的なループ・ゲインが大きくなって不安定になりうるのである。

さらに著しいものに跳躍現象というのがある。正弦波状入力振幅を一定に保って周波数を変えていった場合の振幅特性、位相特性を求めてみると図 7.10 のようになることがある。入力の周波数を A, B, C とゆっくり上げていくと C のところから急に不連続に跳躍して D になり、それから E, F と移っていく。逆に F, E, D, B' と周波数を下げると B' から B へ不連続的に跳躍し、B から A に至る。これは入力の周波数を変えていったとき応答にヒステリシスが

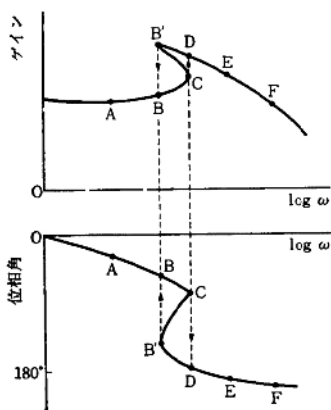


図 7.10 跳躍現象 (Truxal, J. G.: *Automatic Feedback Control System Synthesis*, p. 583, McGraw-Hill (1955))

現われたのであって、入力過去の経歴によっても応答の形が変わりうる例のひとつである。

非線形系ではしばしば一定振幅、一定周期の持続振動を発生することがある。自動制御の現場でよく見かけるハンティングがこれであるが、ひとつの

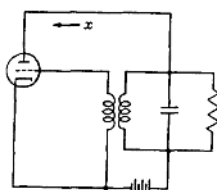


図 7.11 真空管発振器

代表的な例は図 7.11 の真空管発振器であって、その挙動はファン・デル・ポールの方程式

$$\ddot{x} - \varepsilon(1 - x^2)\dot{x} - x = 0, \quad \varepsilon > 0 \quad (7.5)^\dagger$$

で記述される。きわめて大ざっぱな推論を行なえば、 x の振幅の大きいときは第 2 項の係数 $-\varepsilon(1 - x^2)$ が正になっている時間が長くて減衰振動の傾向を示し、逆に振幅が小さいときは $-\varepsilon(1 - x^2)$ が負になる時間が多くて発散振動の傾向を示し、その中間の適当な振幅で平衡して持続振動を生じると考えられよう。このような持続振動をリミット・サイクルともいう。リミット・サイクルには外乱が加わって乱されても元のリミット・サイクルに戻って落ちつく安定なもの、元のリミット・サイクルから離れていってしまう不安定なものがある^{††}。

このほか、入力に含まれる周波数成分より低い分数調波成分が出力に含まれたりする分数調波振動や、微分方程式の係数を角周波数 ω で変化させてやると出力に角周波数 $\omega/2$ の振動が発生するパラメータ共振なども重要な現象である。

7.2 線形化法

小振幅入力に対する線形化 非線形特性をそのままの形で取り扱うことは数学的にきわめて困難であり、一般に何らかの取り扱い易い近似を行なうことが多い。その最も簡単な方法が線形化法であって、信号の変動がある動作点あるい

† x の時間微分をしばしば \dot{x} で表わすことがある。すなわち $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$ 。

†† これはリミット・サイクルの安定性であって、自動制御系について普通という安定性(第 3 章 3.5 節参照)とは違う。一般に工学系には色々な意味の安定性が考えられるから注意を要する。

は平衡点の近くだけに限られている場合に有効である。現実には存在する要素は多かれ少なかれ非線形性を有しているから、線形理論といえども結局は線形化法にもとづいているのであり、その妥当な範囲は限られているのであるが、非線形性が強くなればそれだけ線形化法の有効な範囲に気を配らなければならない。

例として図7.7の水槽を考えよう。微分方程式は(7.3)である。いま水位が $h = \bar{h}$ で平衡してほしいものとし、それに対応する一定供給流量は $q = \bar{q}$ であるとしよう。平衡状態では時間的な変化はないから(7.3)で

$$\frac{d\bar{h}}{dt} = 0 \quad (7.6)$$

とおいて \bar{h} と \bar{q} の関係を求めると

$$\bar{h} = \frac{1}{2g} \left(\frac{\bar{q}}{S} \right)^2 \quad (7.7)$$

を得る。さてこの平衡状態を動作点に選んで、この近傍での入力 q の変化 $\Delta q(t) = q(t) - \bar{q}$ に対する出力 h の変化 $\Delta h(t) = h(t) - \bar{h}$ を求めよう。それには $q(t) = \bar{q} + \Delta q(t)$, $h(t) = \bar{h} + \Delta h(t)$ を(7.3)に代入して

$$A \left(\frac{d\bar{h}}{dt} + \frac{d\Delta h}{dt} \right) + S\sqrt{2g} \cdot \sqrt{\bar{h}} \sqrt{1 + \frac{\Delta h}{\bar{h}}} = \bar{q} + \Delta q$$

であるが、この非線形項を、 $\Delta h/\bar{h}$ が1に比して十分小さい範囲では $(\Delta h/\bar{h})^2$ 以上の高次の微少量を無視して

$$\sqrt{1 + \frac{\Delta h}{\bar{h}}} \approx 1 + \frac{\Delta h}{2\bar{h}} \quad (7.8)$$

のように変化分 Δh の1次式で近似できるから、これと(7.6), (7.7)を用いると、変化分に関する線形微分方程式

$$A \frac{d\Delta h}{dt} + S\sqrt{\frac{g}{2\bar{h}}} \Delta h = \Delta q \quad (7.9)$$

が得られる。これは定係数線形であるからラプラス変換によって伝達関数を求めることができる。 $\Delta q(t)$ および $\Delta h(t)$ のラプラス変換をそれぞれ $\Delta Q(s)$, $\Delta H(s)$ とすると、初期条件を0として

$$\frac{\Delta H(s)}{\Delta Q(s)} = \frac{\frac{1}{S} \sqrt{\frac{2\bar{h}}{g}}}{\frac{A}{S} \sqrt{\frac{2\bar{h}}{g}} s + 1} \quad (7.10)$$

となって、ゲイン定数が $\sqrt{2\bar{h}/S\sqrt{g}}$ 、時定数が $A\sqrt{2\bar{h}/S\sqrt{g}}$ なる1次おくれ系であることがわかる。したがってあとは線形制御理論によって制御系の設計を行えばよいことになる。ただしこのように線形化した系では一般にゲイン定数や時定数その他のパラメーターが基準にとった平衡状態が変わると変化する。したがってある平衡状態の近くで線形化して得た伝達関数を使ってフィードバック制御系を設計し、違った平衡点のまわりで動作させると制御性能が狂ってくる。

いま(7.10)の系に図7.12のような積分動作の制御装置をつけてフィードバック制御を行なうのに、ステップ応答の行きすぎ量が25%になるように設計するならば、減衰定数 ζ が約0.4、したがって系のパラメーターと減衰定数との関係式

$$\zeta = \frac{S\sqrt{g}}{2\sqrt{2KA\bar{h}}} \quad (7.11)$$

から、制御装置のゲイン K が

$$K = \frac{S^2 g}{8 \times (0.4)^2 A \bar{h}}$$

ときまる。ところでもしこの系で目標値が前の値の2倍になり、平衡点 $\bar{h}' = 2\bar{h}$ のまわりで制御しなければならなくなったとすると、(7.11)の \bar{h} が2倍になる

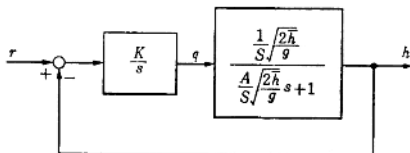


図7.12 水位のフィードバック制御系

† 2次系を $\frac{k}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}$ と表わしたときの ζ 。3.7節参照。減衰率ともいう。

から K を前のままにしておけば減衰定数が $\zeta = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.28$ になる。そしてこのときのステップ応答の行きすぎ量は約 38% くらいになってしまうのである。このようにある動作点のまわりで線形化して設計した系で、動作点がずれると制御性能が劣化してしまう可能性があることは非線形特性の不便な一面であり、動作点の変化する範囲をあらかじめ考慮に入れて、その範囲内ならどこでも満足な制御性能が得られるように設計するか、または動作点が変わったらそれにつれて制御装置のパラメーターも自動的に修正する適応制御方式を採用するかすることが必要になる。

線形化法は上例でもわかるように非線形部分を動作点あるいは平衡点のまわりで線形近似して、結果として得られる変化分に関する線形方程式について線形制御理論を適用しようとするものであるが、その線形近似には通常テイラー展開して変化分の 2 次以上を無視する方法を採るのが最も簡単である。

線形化法の誤差 線形化したときの誤差がどうなるか水槽の例について考えてみよう。いま供給流量が $q = \bar{q} + \Delta q$ で一定に保たれているとし、このとき平衡する $h = \bar{h} + \Delta h$ がどうなるかを (7.3) と (7.9) とから計算して比べてみよう。(7.3) に従うときには (7.7) の \bar{q} の代りに $\bar{q} + \Delta q$ を入れればよいから

$$h = \frac{\bar{q}^2 + 2\bar{q}\Delta q + (\Delta q)^2}{2gS^2} = \bar{h} + \frac{1}{S} \sqrt{\frac{2\bar{h}}{g}} \Delta q + \frac{(\Delta q)^2}{2gS^2}$$

一方 (7.9) から計算すると

$$h = \bar{h} + \frac{1}{S} \sqrt{\frac{2\bar{h}}{g}} \Delta q$$

であって、両者には $(\Delta q)^2 / 2gS^2$ だけ差がある。 \bar{h} に対する比で考えれば、 $(\Delta q)^2 / 2gS^2 \bar{h} = (\Delta q / \bar{q})^2$ となり、 $\Delta q / \bar{q}$ を 0.1 にとると水位の平衡値に 1% の誤差が入ることになる。

したがって、供給流量の変化に対する水位の変化を平衡状態で 1% 以内の誤差で計算したいときは、供給流量の変化は 10% 以内にとどめておかなければならないことになる。変化の過渡状態まで問題にするときはこのような議論では不十分で、結局はもとの非線形微分方程式を解くのと同程度に面倒なことになる。