

加筋圆柱曲板 与圆柱壳

中国科学院力学研究所
固体力学研究室板壳组 著

科学出版社

152.5
140

加筋圆柱曲板与圆柱壳

中国科学院力学研究所

固体力学研究室板壳组 著



科学出版社

1983

内 容 简 介

本书是作者们科研成果的总结,内容充实且有实用价值。

全书分为三篇。第一篇论述加筋圆柱曲板在轴压、剪切和侧压作用下的线性屈曲理论;第二篇论述圆柱曲板与圆柱壳的非线性屈曲,以及对弹性体系初始超临界状态的分析;第三篇介绍加筋圆柱壳体在静水压下的弹性与塑性屈曲、自振频率的计算,分析受冲击时的动力响应。

本书可供结构设计人员、板壳理论科研人员和高等院校有关专业师生参考。

加筋圆柱曲板与圆柱壳

中国科学院力学研究所

固体力学研究室板壳组 著

责任编辑 魏茂乐

科学出版社出版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1983年3月第一版 开本: 850×1168 1/32

1983年3月第一次印刷 印张: 14 1/8

印数: 精 1—2,300 插页: 精 3 平 1

平 1—2,050 字数: 375,000

统一书号: 13031·2152

本社书号: 2940·13—2

定 价: 布脊精装 3.35 元
平 装 2.65 元

前 言

加筋圆柱曲板与圆柱壳是航空、宇航飞行器与舰艇中广泛采用的结构型式。这种结构具有刚度大和重量轻等优点。对它的静力、动力特性的研究在很早以前各国力学工作者和结构设计工程师们就有了极大的兴趣。虽然在六十年代以前,各国已取得一些有价值的成果,但近年来,由于科学技术和工业生产的飞跃发展,要求在设计和计算加筋结构强度时,分析更多的力学因素,例如,加筋的偏心、屈曲前的变形和初挠度对屈曲的影响,以及材料的塑性和动力响应等。与此同时,电子计算机的出现也为更精确的计算分析提供了条件。

在我国,飞机和舰艇等生产部门也向力学工作者提出了愈来愈多的研究课题,希望通过进一步的研究 能提供关于结构稳定性和动力响应等方面的更深入、更可靠的理论计算和实验结果。

从1971年起,我们陆续承担了一些课题的研究任务。其中包括飞机部件、前后机身的稳定性问题,潜艇在静水压力作用下的弹性、塑性屈曲问题,以及受有冲击载荷时的动力响应问题等。在学习、运用国内外已有的科学技术成果的基础上,我们完成了研究的课题,并把几年来所做的工作加以整理、汇编,形成本书。

本书分成三篇。第一篇是关于加筋圆柱曲板的线性屈曲理论。根据大量的实验与分析~~计算,我们认为~~加筋圆柱曲板在承受轴压、剪切以及在其直边~~为预压住情况下受侧压作用时~~,线性理论可以给出临界载荷的适用~~的~~计算值。第二篇主要~~是~~描述圆柱曲板与圆柱壳的非线性屈曲理论~~研究~~ ~~圆柱曲板~~ ~~的~~ ~~非线性~~ ~~屈曲~~ ~~理论~~ ~~和~~ ~~初挠度~~ ~~的影响~~,分析弹性体系的初始超~~临界~~状态和原始缺陷影响的相互关系。此外,还提出了当前的研究~~动向~~和~~今后需要解决~~的问题。第三篇介绍了加筋圆柱壳在静水压作用下的弹性与塑性屈曲、自振频率和

在受冲击载荷时的动力响应等的计算分析方法。

本书是集体研究的结果。书中所涉及的研究工作及其编写工作,分别是由以下同志完成的:

第一章 薛以年、何明元;

第二章 薛以年、冼杏娟、何明元、李家驹、韩子健;

第三章 毛天祥、张双寅、韩金虎;

第四章 李国琛、王自强、韩金虎;

第五章 王自强;

第六章 王震鸣、李国琛;

第七章 吴永礼、徐纪林;

第八章 张双寅、叶裕恭;

第九章 叶裕恭。

参加计算和实验工作的还有:徐方源、周爱华、王振江、张美安和李春秀同志。

本书初稿完成后,承蒙王俊奎教授审阅了全部书稿,并提出了宝贵意见;为此,我们表示诚挚的感谢。

目 录

前言	i
----------	---

第一篇 加筋圆柱曲板的弹性屈曲

第一章 加筋圆柱曲板弹性屈曲的一般理论	2
§ 1. 密加筋圆柱曲板屈曲的基本方程	2
§ 2. 离散加筋圆柱曲板屈曲的基本方程	12
参考文献	19
第二章 加筋圆柱曲板的轴压和剪切屈曲	21
§ 1. 密加筋圆柱曲板的轴压和剪切屈曲分析	21
§ 2. 纵向离散加筋圆柱曲板的轴压屈曲分析	45
§ 3. 环向离散加筋纵向密加筋圆柱曲板的轴压屈曲分析	61
§ 4. 加筋圆柱曲板的轴压屈曲实验	78
§ 5. 加筋圆柱曲板的剪切屈曲实验	94
参考文献	107
第三章 加筋圆柱曲板的侧压屈曲	108
§ 1. 经典简支密加筋和离散加筋圆柱曲板的侧压屈曲分析	108
§ 2. 直边固定简支密加筋圆柱曲板的侧压屈曲分析	122
§ 3. 密加筋圆柱曲板侧压屈曲的线性一致理论	132
§ 4. 圆柱曲板侧压屈曲实验研究	142
参考文献	158

第二篇 圆柱曲板与圆柱壳体的非线性弹性屈曲

第四章 考虑屈曲前变形影响的圆柱曲板与圆柱壳体的弹性 屈曲	162
§ 1. 屈曲方程	162
§ 2. 逐级摄动法	170
§ 3. 摄动参数的转换	174

§ 4. 在离散体系下的逐级摄动解法	178
§ 5. 周边滑动简支圆柱曲板的侧压屈曲	182
§ 6. 滑动简支圆柱曲板侧压屈曲的实验研究	188
§ 7. 圆柱壳体侧压屈曲的实验研究	198
参考文献	204
第五章 初始超临界变形及原始缺陷理论	206
§ 1. 稳定准则与稳定限	207
§ 2. 稳定限的稳定性分析	209
§ 3. 分叉屈曲与极值屈曲	212
§ 4. 分叉屈曲的初始超临界变形	215
§ 5. 分叉屈曲初始超临界变形的稳定性	219
§ 6. 极值屈曲的初始超临界变形及其稳定性	228
§ 7. 原始缺陷理论	233
参考文献	253
附录 A	253
第六章 板壳结构的超临界状态和承载能力的综述	260
§ 1. 关于非线性屈曲理论研究的概述	261
§ 2. 加筋板壳的合理设计和承载能力	269
参考文献	285

第三篇 潜水圆柱壳的弹性和塑性屈曲及其动力响应

第七章 环向加筋圆柱壳在静水压力作用下的弹性屈曲和塑性屈曲	296
§ 1. 环向加筋圆柱壳在静水压力作用下的弹性整体屈曲和局部屈曲	296
§ 2. 圆柱壳的塑性屈曲方程	317
§ 3. 圆柱壳在静水压力作用下的塑性屈曲	327
§ 4. 环向加筋圆柱壳在静水压力作用下的整体塑性屈曲	334
参考文献	347
第八章 环向加筋圆柱壳在静水压力作用下的自由振动	349
§ 1. 关于圆柱壳自由振动研究史的简单回顾	349
§ 2. 静水压力作用下环加筋圆柱壳的自由振动——基于各向异性	

理论的直接法·····	353
§ 3. 静水压力作用下环加筋圆柱壳的自由振动——基于能量原理 的离散法·····	364
§ 4. 计及耦合效应的潜水圆柱壳自由振动频率·····	381
参考文献·····	386
第九章 潜水圆柱壳的动力响应 ·····	389
§ 1. 水压下密环加筋圆柱壳的动力响应·····	389
§ 2. 水下冲击波作用下无限长圆柱壳的动力响应·····	406
§ 3. 水下冲击波作用下环加筋圆柱壳的动力响应·····	433
参考文献·····	443
 基本符号 ·····	 445

第一篇 加筋圆柱曲板的弹性屈曲

加筋结构在航空、宇航和船舶等工业方面应用很广泛,而加筋结构稳定性问题的研究对于强度设计是十分重要的。许多力学工作者对加筋圆柱壳进行了大量的研究工作,特别是近十几年来,对 Van der Neut^[11] 在 1947 年所作出的筋条位置偏心对确定加筋圆柱壳临界载荷具有显著影响这一论断都很重视,在这方面发表了大量的研究报告^[2~8]。这些工作都是以欧拉屈曲概念的线性理论为基础的,实验研究^[9~14]表明,一般情况下对于加筋圆柱壳,线性理论给出的整体屈曲临界载荷与实验的结果符合良好。但是有关加筋圆柱曲板稳定性问题的研究报告发表很少^[15~18],然而它是一种比较常用的典型元件,在本篇中,我们介绍关于加筋圆柱曲板弹性屈曲方面的理论分析和实验研究工作。

1) 见第一章参考文献,下同。

第一章 加筋圆柱曲板弹性 屈曲的一般理论

人们通常把加筋壳的稳定性问题简化为正交各向异性壳来进行研究^[1~8]。在筋条分布比较密的情况下,这样的简化处理是合理的,但是当筋条间距较大时,按正交各向异性壳来处理是否仍然可行,以及当需要了解作这样简化处理的计算精度时,则必须按加强筋条实际上是离散分布的情况进行较精确的理论分析^[16~22];而且离散加筋壳的研究不仅能较精确地分析整体屈曲,同时也能分析筋间面板的局部屈曲。在本章中,我们以线性理论为基础,对加筋圆柱曲板在轴压、剪切和侧压载荷作用下,分别按正交各向异性壳理论和加强筋条离散分布的理论,推导弹性屈曲的基本方程。这里考虑了筋条对于面板偏心的影响。

在本章理论推导中作如下基本假设:

- (1) 弹性范围: 应力不超过材料的比例极限;
- (2) 薄壳: 曲板厚度和曲率半径相比很小;
- (3) 扁壳: 采用 Donnell 扁壳方程;
- (4) 线性理论: 屈曲前为无矩应力状态。

对于筋条再作如下简化假设:

- (1) 筋条为梁: 平截面假定;
- (2) 筋条与面板在径向和筋条方向位移连续;
- (3) 不考虑筋条的侧向弯曲刚度;
- (4) 不考虑纵向筋条和环向筋条之间变形的相互限制;
- (5) 纵向和环向筋条均为等距分布在面板上,不计筋条宽度。

§ 1. 密加筋圆柱曲板屈曲的基本方程

考虑双向密筋加强的圆柱形曲板,取面板的中面为 xy 坐标

面, z 轴垂直于 xy 面并指向曲率中心(见图 1.1 所示). 曲板直边长为 l , 曲边弧长为 b , 曲率半径为 R , 面板厚度为 h . u, v, w 为面板中面的位移分量.

本节把加筋曲板简化为正交各向异性曲板来进行研究.

在建立密加筋圆柱曲板屈曲的基本方程以前, 首先需要推导出广义力和广义位移之间的关系, 即确定加筋板的基本参数. 由于考虑了筋条对于面板偏心的影响, 因此当受力变形时, 弯曲与拉压以及扭转与面向剪切之间将产生耦合关系.

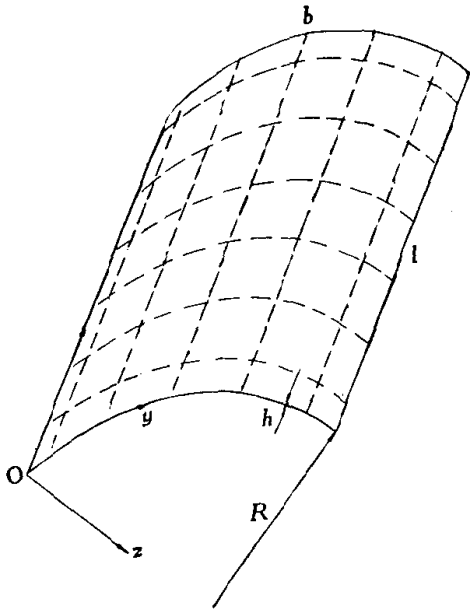


图 1.1

下面推导曲板单位宽度上的内力 N_x, N_y, N_{xy}, N_{yx} 及内力矩 M_x, M_y, M_{xy}, M_{yx} 这些广义力和面板中面应变 $\varepsilon_{x_0}, \varepsilon_{y_0}, \gamma_{xy_0}$ 及曲(扭)率变化 $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$ 这些广义位移之间的关系. 取一曲板元素, 其宽度为纵向筋条的间距 d_1 , 长度为环向筋条的间距 d_2 (见图 1.2 所示). $N_x, N_y, N_{xy}, N_{yx}, M_x, M_y, M_{xy}, M_{yx}$ 的正向在图 1.2 中给出. 我们把筋条的刚度“平均”在面板上.

(1) N_x 由三部分组成:

相应于面板中面应变 $\varepsilon_{x_0}, \varepsilon_{y_0}$ 的内力 N_{x_1} 为

$$N_{x_1} = B(\varepsilon_{x_0} + \nu \varepsilon_{y_0}),$$

其中 $B = \frac{Eh}{1-\nu^2}$ 为面板的拉伸刚度, 这里, E 为面板的弹性模量, ν 为泊松系数.

相应于纵筋拉伸应变 ε_{x_1} 的内力 N_{x_2} 为

$$N_{x_2} = \frac{E_1 A_1}{d_1} \varepsilon_{x_1},$$

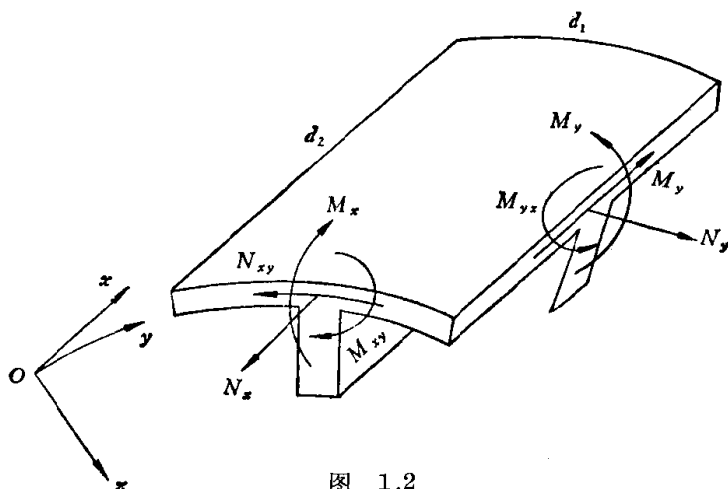


图 1.2

其中 E_1 和 A_1 为纵筋的弹性模量和截面面积。

由于筋条对于面板是偏心的, 因此当面板中面弯曲变形时, 在纵筋内产生的内力 N_{x_s} 为

$$N_{x_s} = -\frac{1}{d_1} \int_{A_1} E_1 z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dA_1 = -\frac{E_1 s_1}{d_1} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2},$$

其中 $s_1 = \int_{A_1} z dA_1$ 为纵筋对于面板中面的静矩。

于是

$$N_x = N_{x_1} + N_{x_s} + N_{x_2} = B(\varepsilon_{x_0} + \nu \varepsilon_{y_0}) + \frac{E_1 A_1}{d_1} \varepsilon_{x_0} - \frac{E_1 s_1}{d_1} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$$

(2) N_y 由三部分组成:

完全类同 N_x 的推导, 有

$$N_y = N_{y_1} + N_{y_s} + N_{y_2} = B(\varepsilon_{y_0} + \nu \varepsilon_{x_0}) + \frac{E_2 A_2}{d_2} \varepsilon_{y_0} - \frac{E_2 s_2}{d_2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2},$$

其中 E_2 和 A_2 为环筋的弹性模量和截面面积, $s_2 = \int_{A_2} z dA_2$ 为环筋对于面板中面的静矩。

$$(3) \quad N_{xy} = N_{yx} = Gh\gamma_{xy_0},$$

其中 G 为面板的剪切模量。这里忽略了扭转与面向剪切的耦合关系。

(4) M_x 由三部分组成:

相应于面板中面弯曲变形的内力矩 M_{x_1} 为

$$M_{x_1} = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right),$$

其中 $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ 为面板的弯曲刚度。

相应于纵筋弯曲变形的内力矩 M_{x_1} 为

$$M_{x_1} = -\frac{1}{d_1} \int_{A_1} E_1 z^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dA_1 = -\frac{E_1 I_1}{d_1} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2},$$

其中 $I_1 = \int_{A_1} z^2 dA_1$ 为纵筋对于面板中面的惯性矩。

由于筋条对于面板是偏心的, 因此纵筋拉伸应变 ε_{x_0} 相应的内力对于面板中面产生的内力矩 M_{x_2} 为

$$M_{x_2} = \frac{1}{d_1} \int_{A_1} E_1 \varepsilon_{x_0} z dA_1 = \frac{E_1 s_1}{d_1} \varepsilon_{x_0}.$$

于是

$$\begin{aligned} M_x &= M_{x_1} + M_{x_2} + M_{x_3} \\ &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \frac{E_1 I_1}{d_1} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{E_1 s_1}{d_1} \varepsilon_{x_0}. \end{aligned}$$

(5) M_y 由三部分组成:

完全类同 M_x 的推导, 有

$$\begin{aligned} M_y &= M_{y_1} + M_{y_2} + M_{y_3} \\ &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - \frac{E_2 I_2}{d_2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{E_2 s_2}{d_2} \varepsilon_{y_0}. \end{aligned}$$

其中 $I_2 = \int_{A_2} z^2 dA_2$ 为环筋对于面板中面的惯性矩。

(6) M_{xy} 和 M_{yx} 均由相应于面板和筋条扭转变形的内力矩组成, 同 (3) 中所述, 这里忽略扭转与面向剪切的耦合关系。于是有

$$\begin{aligned} M_{xy} &= -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{G_1 J_1}{d_1} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \\ M_{yx} &= -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{G_2 J_2}{d_2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \end{aligned}$$

其中 G_1, J_1 和 G_2, J_2 分别为纵筋和环筋的剪切模量及扭转惯性矩。这里对筋条近似地采用自由扭转的公式。

引入 H , 令

$$H = \frac{1}{2}(M_{xy} + M_{yx})$$

$$= -\left[D(1-\nu) + \frac{1}{2}\left(\frac{G_1 J_1}{d_1} + \frac{G_2 J_2}{d_2}\right) \right] \frac{\partial w}{\partial x \partial y}.$$

综合以上推导, 得到广义力和广义位移之间的关系为:

$$\left. \begin{aligned} N_x &= B(\varepsilon_{x_0} + \nu \varepsilon_{y_0}) + \frac{E_1 A_1}{d_1} \varepsilon_{x_0} - \frac{E_1 s_1}{d_1} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \\ N_y &= B(\varepsilon_{y_0} + \nu \varepsilon_{x_0}) + \frac{E_2 A_2}{d_2} \varepsilon_{y_0} - \frac{E_2 s_2}{d_2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \\ M_x &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \frac{E_1 I_1}{d_1} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{E_1 s_1}{d_1} \varepsilon_{x_0}, \\ M_y &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - \frac{E_2 I_2}{d_2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{E_2 s_2}{d_2} \varepsilon_{y_0}; \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

$$\left. \begin{aligned} N_{xy} &= Gh \gamma_{xy_0}, \\ H &= -\left[D(1-\nu) + \frac{1}{2}\left(\frac{G_1 J_1}{d_1} + \frac{G_2 J_2}{d_2}\right) \right] \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

由于在下面建立的密加筋圆柱曲板屈曲的基本方程中, 将是 以挠度 w 和应力函数 ϕ 作自变量, 因此把(1.1)前两式中的 ε_{x_0} 和 ε_{y_0} 解出, 然后把(1.1)式改写成

$$\left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_{x_0} \\ \varepsilon_{y_0} \\ M_x \\ M_y \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cccc} \frac{1}{B_x} & \frac{1}{B_{xy}} & f_x & f_{yx} \\ \frac{1}{B_{xy}} & \frac{1}{B_y} & f_{xy} & f_y \\ f_x & f_{xy} & -D_x & -D_{xy} \\ f_{yx} & f_y & -D_{xy} & -D_y \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} N_x \\ N_y \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \end{array} \right\} \quad (1.3)$$

其中

$$\left. \begin{aligned}
\frac{1}{B_x} &= \frac{1 + (1 - \nu^2) \gamma_2}{\gamma_3 E h}, \\
\frac{1}{B_{xy}} &= -\frac{\nu}{\gamma_3 E h}, \\
\frac{1}{B_y} &= \frac{1 + (1 - \nu^2) \gamma_1}{\gamma_3 E h}, \\
f_x &= \frac{[1 + (1 - \nu^2) \gamma_2] s_1}{\gamma_3 d_1 h}, \\
f_{xy} &= -\frac{\nu s_1}{\gamma_3 d_1 h}, \\
f_{yx} &= -\frac{\nu s_2}{\gamma_3 d_2 h}, \\
f_y &= \frac{[1 + (1 - \nu^2) \gamma_1] s_2}{\gamma_3 d_2 h}, \\
D_x &= D + \frac{E I_1}{d_1} - \frac{[1 + (1 - \nu^2) \gamma_2] E s_1^2}{\gamma_3 d_1^2 h}, \\
D_{xy} &= \nu D + \frac{\nu E s_1 s_2}{\gamma_3 d_1 d_2 h}, \\
D_y &= D + \frac{E I_2}{d_2} - \frac{[1 + (1 - \nu^2) \gamma_1] E s_2^2}{\gamma_3 d_2^2 h}.
\end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

这里假定筋条与面板为同样材料, 即 $E = E_1 = E_2$, $G = G_1 = G_2$, 并且引入符号 $\gamma_1 = \frac{A_1}{d_1 h}$, $\gamma_2 = \frac{A_2}{d_2 h}$, $\gamma_3 = 1 + \gamma_1 + \gamma_2 + (1 - \nu^2) \gamma_1 \gamma_2$. 同样把(1.2)式改写成

$$\left\{ \begin{array}{c} \gamma_{xy} \\ H \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cc} \frac{1}{C_{xy}} & 0 \\ 0 & -2D_k \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} N_{xy} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{array} \right\}, \quad (1.5)$$

其中

$$\left. \begin{aligned}
C_{xy} &= G h, \\
D_k &= G \left[\frac{h^3}{12} + \frac{1}{4} \left(\frac{J_1}{d_1} + \frac{J_2}{d_2} \right) \right].
\end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

以上 B_x , B_{xy} , B_y , f_x , f_{xy} , f_{yx} , f_y , D_x , D_{xy} , D_y , C_{xy} , D_k 就是加筋板的基本参数。

对于仅有纵向加筋的情况:

$$\left.
\begin{aligned}
\frac{1}{B_x} &= \frac{1}{(1+\gamma_1)Eh}, \\
\frac{1}{B_{xy}} &= -\frac{\nu}{(1+\gamma_1)Eh}, \\
\frac{1}{B_y} &= \frac{1+(1-\nu^2)\gamma_1}{(1+\gamma_1)Eh}, \\
f_x &= \frac{s_1}{(1+\gamma_1)d_1h}, \\
f_{xy} &= -\frac{\nu s_1}{(1+\gamma_1)d_1h}, \\
f_{yx} &= f_y = 0, \\
D_x &= D + \frac{EI_1}{d_1} - \frac{Es_1^2}{(1+\gamma_1)d_1^2h}, \\
D_{xy} &= \nu D, \\
D_y &= D, \\
C_{xy} &= Gh, \\
D_k &= G \left(\frac{h^3}{12} + \frac{J_1}{4d_1} \right).
\end{aligned}
\right\} \quad (1.7)$$

对于仅有环向加筋的情况:

$$\left.
\begin{aligned}
\frac{1}{B_x} &= \frac{1+(1-\nu^2)\gamma_2}{(1+\gamma_2)Eh}, \\
\frac{1}{B_{xy}} &= -\frac{\nu}{(1+\gamma_2)Eh}, \\
\frac{1}{B_y} &= \frac{1}{(1+\gamma_2)Eh}, \\
f_x &= f_{xy} = 0, \\
f_{yx} &= -\frac{\nu s_2}{(1+\gamma_2)d_2h}, \\
f_y &= \frac{s_2}{(1+\gamma_2)d_2h}, \\
D_x &= D, \\
D_{xy} &= \nu D, \\
D_y &= D + \frac{EI_2}{d_2} - \frac{Es_2^2}{(1+\gamma_2)d_2^2h},
\end{aligned}
\right\} \quad (1.8)$$

$$\left. \begin{aligned} C_{xy} &= Gh, \\ D_k &= G \left(\frac{h^3}{12} + \frac{J_2}{4d_2} \right). \end{aligned} \right\}$$

我们现在来建立密加筋圆柱曲板屈曲的基本方程。根据线性理论, 上述的广义力和广义位移在这里均为由屈曲所引起的, 也就是说, 它们都是屈曲前无矩应力状态中附加的一些小量。对于 x , y 和 z 三个方向的屈曲平衡方程为

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0, \quad (1.9)$$

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0, \quad (1.10)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + \frac{N_y}{R} + \bar{N}_x^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ + 2 \bar{N}_{xy}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \bar{N}_y^0 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \end{aligned} \quad (1.11)$$

其中 $\bar{N}_x^0$, $\bar{N}_{xy}^0$ 和 $\bar{N}_y^0$ 为屈曲前无矩应力状态中曲板单位宽度上所受的外力(轴压、剪切和侧压)。相应的边界条件一般可写成:

当 $x=0, l$ 时,

$$\left. \begin{aligned} N_x &= 0 \quad \text{或} \quad u = 0, \\ N_{xy} &= 0 \quad \text{或} \quad v = 0, \\ M_x &= 0 \quad \text{或} \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial M_x}{\partial x} + 2 \frac{\partial H}{\partial y} + \bar{N}_x^0 \frac{\partial w}{\partial x} + \bar{N}_{xy}^0 \frac{\partial w}{\partial y} &= 0 \quad \text{或} \quad w = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.12)$$

当 $y=0, b$ 时,

$$\left. \begin{aligned} N_y &= 0 \quad \text{或} \quad v = 0, \\ N_{xy} &= 0 \quad \text{或} \quad u = 0, \\ M_y &= 0 \quad \text{或} \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial M_y}{\partial y} + 2 \frac{\partial H}{\partial x} + \bar{N}_y^0 \frac{\partial w}{\partial y} + \bar{N}_{xy}^0 \frac{\partial w}{\partial x} &= 0 \quad \text{或} \quad w = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.13)$$

如果引入应力函数 ϕ , 有