广义函数

III

微分方程理论的若干问题

〔苏〕И. М. 盖尔芳特
Г. Е. 希洛夫 著

科学出版社

广 义 函 数

III

微分方程理论的若干问题

〔苏〕И. М. 盖尔芳特
Г. Е. 希洛夫 著

周宝熙 译
舒五昌 校

科 学 出 版 社
1 9 8 3

内 容 简 介

本卷叙述广义函数理论对两个古典的分析问题的应用：按微分算子固有函数的展开问题和偏微分方程的柯西问题．本卷的读者对象主要是数学工作者，邻近学科的专业人员也可阅读．

И. М. Гельфанд и Г. Е. Шилов
ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ
III
Физматгиз Москва 1958

广 义 函 数

III

微分方程理论的若干问题

〔苏〕И. М. 盖尔芳特
Г. Е. 希 洛 夫 著
周宝熙 译
舒五昌 校

*

科学出版社 出版
北京朝阳门内大街 137 号
中国科学院印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1983 年 11 月第 一 版　　开本：850×1168 1/32
1983 年 11 月第一次印刷　　印张：7 5/8
印数：0001—8,550　　字数：197,000

统一书号：13031・2368
本社书号：3244・13—1

定价： 1.45 元

序　　言

在这本《广义函数》丛书第三卷中，把广义函数的工具应用于下列偏微分方程理论问题的研究：常系数（或具有仅依赖于时间的系数）方程组的柯西问题解的唯一性类及适定性类问题和自共轭微分算子按固有函数展开的问题.

作者打算在以后的几卷中考虑椭圆型方程的边值问题，变系数方程的柯西问题和拟线性方程的柯西问题，以及与所有变量进入复变范围有关的一些问题.

作者借此机会感谢国立莫斯科大学广义函数和微分方程讨论班的参加者，在讨论班上不止一次地讨论过这卷的不同章节，特别要感谢 B. M. 鲍洛克（Борок），Я. И. 日托米尔斯基（Житомирский），Г. Н. 查洛塔莱夫（Золотарев），А. Г. 克斯丘钦柯（Костюченко）. 作者同样感谢 И. И. 许里晓娃（Шулишова）和 М. С. 阿格拉诺维奇（Агранович），前一位对一、二、三卷作了详细的索引，而后一位详细地校对了全书，并且他的批评也使本书有很大的改进.

目　　录

1）按照盖尔芳特教授的愿望在 1964 年德译本和 1967，1977年英译本中均删去此节，中译本仍按俄文原本译出．——译者注

2）同上．

第一章　W型空间

这一章叙述 W 型基本空间的理论，W 型空间和(第二卷第四章的) S 型空间在本书第二、三章研究柯西问题时需要用到. 这一章叙述的结果曾在第二卷第四章的附录 2 中不加证明地引述过.

W型空间与相应于 $\alpha<1$ 和 $\beta<1$ 的 S 型空间类似，但由于引入了任意凸函数来代替幂函数就能更精确地描写在无穷远处的增长(或下降)特性.

为了简单起见，象对 S 型空间一样，先叙述一个自变量的情形. 当过渡到多个自变量的情形时所必须进行的改变将在下面 §4 中指出.

§1. 定　义

1. 空间 W_M　设 $\mu(\xi)$ $(0\leqslant\xi<\infty)$ 是上升的连续函数，并且 $\mu(0)=0$, $\mu(\infty)=\infty$. 对 $x\geqslant 0$ 令

$$M(x)=\int_0^x \mu(\xi)d\xi. \tag{1}$$

函数 $M(x)$ 是向下凸的上升连续函数，并且 $M(0)=0$, $M(\infty)=\infty$. 因为 $\mu(\xi)$ 随着 ξ 的增长而增长，所以它的平均纵坐标 $\frac{1}{x}\times M(x)$ 也是上升的，因而对任意正数 x_1 和 x_2 有

$$\frac{1}{x_1}M(x_1)\leqslant\frac{1}{x_1+x_2}M(x_1+x_2),$$

$$\frac{1}{x_2}M(x_2)\leqslant\frac{1}{x_1+x_2}M(x_1+x_2).$$

把第一个不等式乘以 x_1，把第二个不等式乘以 x_2，并且相加，我们

就得到基本不等式(凸性不等式):

$$M(x_1)+M(x_2)\leqslant M(x_1+x_2). \tag{2}$$

特别,对任意 $x\geqslant 0$ 有

$$2M(x)\leqslant M(2x). \tag{3}$$

其次,对于负数 x, 我们用等式

$$M(-x)=M(x)$$

来定义函数 $M(x)$.

我们指出,因为函数 $M(x)$ 的微商 $\mu(x)$ 当 $x\to+\infty$ 时无限增长,所以当 $|x|\to\infty$ 时函数 $M(x)$ 本身增长得比任何线性函数都快.

我们用 W_M 来记满足不等式

$$|\varphi^{(q)}(x)|\leqslant C_q e^{-M(ax)} \tag{4}$$

的所有无穷次可微函数 $\varphi(x)$ $(-\infty<x<\infty)$ 的集合,常数 C_q 和 a 可以依赖于函数 φ.

因为函数 $M(x)$ 比任何线性函数增长得快,所以 $e^{-M(ax)}$ 比任何指数函数(即形为 $e^{-a|x|}$ 的函数)下降得快;于是属于空间 W_M 的基本函数 $\varphi(x)$ 和它所有的微商在无穷远处比任何指数函数下降得快.

显然 W_M 是(具有通常的运算的)线性空间,在这个空间中引进下列收敛性定义:如果第一,函数列 $\varphi_\nu(x)$ 及其任意阶微商在 x 轴的任意有限区间上均匀地收敛于零(这样的收敛性称为正的收敛性),第二,估计式

$$|\varphi_\nu^{(q)}(x)|\leqslant C_q e^{-M(ax)} \tag{5}$$

成立,其中的常数 C_q 和 a 不依赖于 ν, 则称序列 $\varphi_\nu(x)$ 收敛于零.

我们将证明,空间 W_M 可表为赋可列范空间之和.

我们用 $W_{M,a}$ 表示在空间 W_M 中满足不等式

$$|\varphi^{(q)}(x)|\leqslant C_q e^{-M(\bar{a}x)}$$

的函数的全体,其中 $\bar{a}$ 可取成比 a 小的任意常数. 换句话说,$W_{M,a}$ 是由对任意 $\delta>0$ 满足不等式

$$|\varphi^{(q)}(x)|\leqslant C_{q\delta}e^{-M[(a-\delta)x]}\quad(q=0,1,2,\cdots)$$

的那些函数 $\varphi(x)$ 所组成.

我们设

$$M_p(x)=e^{M\left[a\left(1-\frac{1}{p}\right)x\right]}\quad(p=2,3,\cdots).\tag{6}$$

函数 $M_p(x)$ 组成上升序列 ($M_p(x)\leqslant M_{p+1}(x)$), 并且函数 $\varphi(x)\in W_{M,a}$ 可以表征为: $\varphi(x)$ 是使表示式

$$\|\varphi\|_p=\sup_{x,\ |q|\leqslant p} M_p(x)\,|\varphi^{(q)}(x)|\tag{7}$$

对任何 p 都是有限的无穷次可微函数. 这说明,空间 $W_{M,a}$ 与第二卷第二章 §1 中定义的带有固定权函数序列 (6) 的空间 $K\{M_p\}$ 相同. 所以关于一般空间 $K\{M_p\}$ 的所有结果都可以应用于空间 $W_{M,a}$. 它对于范 (7) 是完备的赋可列范空间. 我们来验证它也是个完全空间、我们记得,(第二卷第二章 § 2) 空间 $K\{M_p\}$ 的完全性的充分条件 (P) 是: 对任意号码 p, 可以找到号码 $p'>p$, 使得

$$\lim_{|x|\to\infty}\frac{M_p(x)}{M_{p'}(x)}=0.$$

在我们的情形,由于凸性不等式, 对任意的 $p'>p$ 有

$$M\left[a\left(1-\frac{1}{p}\right)x\right]+M\left[a\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p'}\right)x\right]\leqslant M\left[a\left(1-\frac{1}{p'}\right)x\right],$$

因之

$$\frac{M_p(x)}{M_{p'}(x)}=e^{+M\left[\left(1-\frac{1}{p}\right)ax\right]-M\left[\left(1-\frac{1}{p'}\right)ax\right]}\leqslant e^{-M\left[\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p'}\right)ax\right]}\to 0.$$

这就是所要求的.

按照第二卷第二章 §2 的结果, 对一个序列 $\varphi_\nu(x)\in W_{M,a}$, 当且仅当它正的收敛于零 (即对任何 q 函数 $\varphi_\nu^{(q)}(x)$ 在任意线段 $|x|\leqslant x_0<\infty$ 上均匀收敛于零) 并且对任何 p 范 $\|\varphi_\nu\|_p$ 有界时, 这序列收敛于零.

空间 $W_{M,a}$ 按所有附标 $a=1,\frac{1}{2},\cdots\cdots$ 的和显然就是空间

W_M. 上面所描述的在空间 W_M 中的收敛于零就是在某一个空间 $W_{M,a}$ 中的收敛于零，因此它恰好就是在作为赋可列范空间之和的 W_M 中定义的那种收敛性.

我们引述空间 W_M 中的有界集的定义. 按照在赋可列范空间之和中有界集的一般定义，集合 $A\subset W_M$ 称为有界的，如果 A 全部在某个空间 $W_{M,a}$ 中并在其中有界. 换句话说，集合 $A\subset W_M$ 有界，如果对所有的函数 $\varphi(x)\in A$，估计式 (4) 对于同样的常数 C_q 和 a 成立. 特别是，假如序列 $\varphi_\nu(x)\in W_M$: 1) 正的收敛于零，2) 有界，那末它收敛于零.

例 1. 设 $M(x)=x^{1/\alpha}(x>0)$，其中 $\alpha<1$; $\mu(\xi)=\dfrac{1}{\alpha}\xi^{\frac{1}{\alpha}-1}$.

相应的空间 W_M 是由满足不等式

$$|\varphi^{(q)}(x)|\leqslant C_q e^{-a|x|^{1/\alpha}}$$

的函数 $\varphi(x)$ 组成. C_q 和 a 是依赖于 φ 的常数. 这个空间显然与空间 S_α 相同(第二卷第四章 §1).

例 2. 设 $\mu(\xi)=\ln(\xi+1)\ (\xi\geqslant 0)$，于是对 $x\geqslant 0$

$$\begin{aligned}M(x)&=\int_0^x\ln(\xi+1)d\xi\\&=(x+1)\ln(x+1)-x.\end{aligned}$$

按定义空间 W_M 是由满足不等式

$$|\varphi^{(q)}(x)|\leqslant C_q e^{-a[(|x|+1)\ln(|x|+1)-|x|]}$$

的函数 $\varphi(x)$ 组成的.

但在这个情形下，函数 $\varphi(x)$ 可有更为简单的描述，它可由下面一般的理由推出.

形式上说，根据任何连续的非负函数 $M(x)$ (对于它是否有 (1) 这种特殊形式并不关心；我们在以后用到这一特殊形式)，可以按定义 (4) 作出空间 W_M. 这时，不同的函数 $M_1(x)$ 和 $M_2(x)$ 可以对应同一个空间 $W_{M_1}=M_{M_2}$. 我们指出使这个等式成立的简单的充分条件. 设函数 $M_1(x)$ 和 $M_2(x)$ 在充分大的 $x\geqslant 0$ 时，满足不等式

$$M_1(\gamma_1 x) \leqslant M_2(\gamma_2 x). \tag{8}$$

其中 γ_1 和 γ_2 是正的常数．那末我们可以断言有包含关系

$$W_{M_1} \supset W_{M_2}.$$

事实上，假如加上适当的常数，代替不等式(8)可以写出对所有 $x \geqslant 0$ 都成立的不等式

$$M_1(\gamma_1 x) \leqslant M_2(\gamma_2 x) + \gamma_3.$$

由此，假如 $\varphi(x) \in W_{M_2}$，我们就有

$$|\varphi^{(q)}(x)| \leqslant C_q e^{-M_2(ax)} \leqslant C'_q e^{-M_1(a'x)}, \tag{9}$$

其中 $a' = a\dfrac{\gamma_1}{\gamma_2}$，$C'_q = C_q e^{\gamma_3}$；这样，$\varphi \in W_{M_1}$.

而且，不等式(9)说明，假如序列 $\varphi_\nu(x)$ 在 W_{M_2} 的收敛意义上趋于零，那末它也在 W_{M_1} 的收敛意义上趋于零，因为在对函数 $\varphi_\nu(x)$ 所写的不等式 (9) 中，常数 a' 和 C'_q 可与不依赖于 ν 的常数 a 和 C_q 一同取定.

此外，假如函数 $M_1(x)$ 和 $M_2(x)$ 对充分大的 $x \geqslant 0$ 有

$$M_1(\gamma_1 x) \leqslant M_2(\gamma_2 x) \leqslant M_1(\gamma'_1 x),$$

那末 $W_{M_1} \supset W_{M_2}$ 和 $W_{M_2} \supset W_{M_1}$ 都成立，因此，按元素的多少来说 $W_{M_1} = W_{M_2}$；同样显然地，在 W_{M_1} 中的收敛性与在 W_{M_2} 中的收敛性相一致．满足不等式(10)的函数 $M_1(x)$ 和 $M_2(x)$ 我们将称为**等价的**；我们看到，等价的函数决定同一个空间.

在例 2 中出现的函数 $(x+1)\ln(x+1) - x$ 等价于函数 $x\ln x$（$x\ln x$ 不满足定义(1)）；因此，相应的基本函数 $\varphi(x)$ 空间也以不等式

$$|\varphi^{(q)}(x)| \leqslant C_q e^{-a|x|\ln|x|}$$

和相应的收敛性来描述.

2. 空间 W^{Ω} 设 $\omega(\eta)$ $(0 \leqslant \eta < \infty)$ 是上升的连续函数，并且 $\omega(0) = 0$，$\omega(\infty) = \infty$；对 $y \geqslant 0$ 我们令

$$\Omega(y) = \int_0^y \omega(\eta)\,d\eta. \tag{1}$$

按性质来说，函数 $\Omega(y)$ 完全类似于第一段中所引进的函数

$M(x)$；特别，有下列的凸性不等式

$$\Omega(y_1)+\Omega(y_2)\leqslant\Omega(y_1+y_2), \tag{2}$$

$$2\Omega(y)\leqslant\Omega(2y). \tag{3}$$

作为定义，我们再令

$$\Omega(-y)=\Omega(y).$$

用 W^{Ω} 表示满足不等式

$$|z^k\varphi(z)|\leqslant C_k e^{\Omega(by)} \quad (z=x+iy) \tag{4}$$

的所有整解析函数的全体，其中 C_k 和 b 为依赖于函数 φ 的常数。

显然，W^{Ω} 按普通的运算是线性空间，在此空间中我们引进下列收敛性的定义：序列 $\varphi_\nu(z)\in W^{\Omega}$ 称为收敛于零，假如第一，函数 $\varphi_\nu(z)$ 在平面 z 的任意有界区域内均匀地收敛于零（这样的收敛性称为正的收敛性），第二，成立估计式

$$|z^k\varphi_\nu(z)|\leqslant C_k e^{\Omega(by)},$$

其中常数 C_k 和 b 不依赖于 ν.

我们将证明，空间 W^{Ω} 可表为赋可列范空间之和. 我们用 $W^{\Omega,b}$ 记空间 W^{Ω} 中满足不等式

$$|z^k\varphi(z)|\leqslant C_k e^{\Omega(\bar{b}y)}$$

的函数全体，其中 $\bar{b}$ 可取为大于 b 的任意常数，换句话说，$W^{\Omega,b}$ 是由对任意 $\rho>0$ 满足不等式

$$|z^k\varphi(z)|\leqslant C_{k\rho}e^{\Omega[(b+\rho)y]}$$

的整函数 $\varphi(z)$ 所组成. 对于空间 $W^{\Omega,b}$，我们设

$$\|\varphi\|_{k\rho}=\sup_z|z^k\varphi(z)|e^{-\Omega[(b+\rho)y]}. \tag{5}$$

我们将证明，带范 (5) 的空间 $W^{\Omega,b}$ 是完备的赋可列范的完全空间.

1）范 $\|\varphi\|_{k\rho}$ 两两相容. 事实上，假如序列 $\varphi_\nu\in W^{\Omega,b}$ 对二个范 $\|\varphi_\nu\|_{k\rho}$ 和 $\|\varphi_\nu\|_{k_1\rho_1}$ 来说，都是基本序列，并且对其中一个范是收敛于零的，那末函数序列 $\varphi_\nu(z)$ 无论如何在每一点上收敛于零；从此推出，这个序列按第二个范的极限是零.

2）空间 $W^{\Omega,b}$ 是完备的. 空间 $W^{\Omega,b}$ 按其中一个范 $\|\varphi\|_{k\rho}$ 完备化后的空间是由具有有限值 $\|\varphi\|_{k\rho}$ 的整解析函数所组成. 这些

完备化后空间，按所有的附标 k 和 ρ 的交集是由在任意 k 和 ρ 时 $\|\varphi\|_{k\rho}$ 有意义的整函数所组成，即与空间 $W^{\Omega,b}$ 相同. 按照第二卷第一章 §3 第二段的定理，这个事实就保证了空间的完备性.

3）空间 $W^{\Omega,b}$ 是完全的. 对空间 $\Phi = K\{M_p\}$（第二卷第二章 §2）类似事实的证明是基于以下的条件，按空间的所有范有界，且正的收敛（即在每个有限区间上它自己及各阶微商都均匀收敛）的基本函数序列 $\varphi_\nu(x)$，按空间 Φ 的拓扑结构也是收敛的.

在我们的情形下，不难验证，这个前提是满足的，由此推出空间 $W^{\Omega,b}$ 是完全的这一结论成立.

显然，按所有 $b=1, 2, \cdots$ 的赋可列范空间 $W^{\Omega,b}$ 之和与空间 W^{Ω} 相同. 上面描述的在空间 W^{Ω} 中收敛于零是在某一个 $W^{\Omega,b}$ 中收敛于零，因此，它恰恰就是作为空间 $W^{\Omega,b}$ 的和的 W^{Ω} 中所定义的收敛性.

我们举出在空间 W^{Ω} 中有界集合的定义：按照赋可列范空间之和中有界集合的一般定义（第二卷第一章 §8），集合 $A\subset W^{\Omega}$ 称为有界的，假如它整个地在某一个 $W^{\Omega,b}$ 中，并在这空间中有界. 换句话说，集合 $A\subset W^{\Omega}$ 有界，假如对所有的函数 $\varphi(x)\in A$ 估计式(4) 对于同样的常数 C_k 和 b 成立. 这样，假如序列 $\varphi_\nu\in W^{\Omega}$，1）正的收敛于零，而且 2）有界，那末这序列收敛于零.

象第一段中那样，可以证明，对于等价的函数 $\Omega_1(y)$ 和 $\Omega_2(y)$，空间 W^{Ω_1} 和 W^{Ω_2} 无论在元素多少的意义上或者在收敛的意义上都是相同的.

特别，我们在以后将用到下面的空间 W^{Ω} 的例子.

例 1. 对 $\eta>0$ 我们设 $\omega(\eta)=\dfrac{1}{1-\beta}\,\eta^{\frac{1}{1-\beta}-1}$, $\Omega(y)=y^{\frac{1}{1-\beta}}$, $(\beta<1)$. 空间 W^{Ω} 是由满足不等式

$$|z^k\varphi(z)|\leqslant C_k e^{(b|y|)^{\frac{1}{1-\beta}}}$$

的整解析函数所组成，因此，与空间 S^{β}（第二卷第四章 §2）相同.

例 2. 对 $\eta>0$ 我们设 $\omega(\eta)=e^{\eta}-1$, $\Omega(y)=\int_0^y(e^{\eta}-1)$

$\times d\eta = e^y - y - 1$. 所得到的函数 $\Omega(y)$ 与函数 $\Omega_1(y) = e^y$ 等价. 所以在这个情形下,空间 W^Ω 可以用不等式

$$|z^k\varphi(z)| \leqslant C_k e^{b|y|}$$

和相应的收敛性来描述,其中常数 C_k 和 b 依赖于函数 φ.

3. 空间 W_M^Ω 设 $\mu(\xi)$ 和 $\omega(\eta)(0 \leqslant \xi, \eta < \infty)$ 为一对上升连续函数;对 $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ 我们令

$$M(x) = \int_0^x \mu(\xi)d\xi, \quad \Omega(y) = \int_0^y \omega(\eta)d\eta,$$

而对 $x < 0$, $y < 0$, 令

$$M(x) = M(-x), \quad \Omega(y) = \Omega(-y).$$

函数 $M(x)$ 和 $\Omega(y)$ 是在 1, 2 段中曾见过的那些函数.

我们用 W_M^Ω 表示所有满足不等式

$$|\varphi(x+iy)| \leqslant Ce^{-M(ax)+\Omega(by)} \tag{1}$$

的整解析函数的全体,其中常数 a, b, C 可依赖于函数 φ.

显然, W_M^Ω 按普通的运算是线性空间. 在这个空间中我们引进下列收敛性的定义: 序列 $\varphi_\nu(z) \in W_M^\Omega$ 称为收敛于零, 假如, 第一,函数 $\varphi_\nu(z)$ 在平面 z 的任意有界区域内均匀收敛于零, 第二, 成立估计式

$$|\varphi_\nu(z)| \leqslant Ce^{-M(ax)+\Omega(by)},$$

其中 C, a, b 是不依赖于 ν 的常数.

空间 W_M^Ω 也可表为赋可列范空间之和的形式,我们用 $W_{M,a}^{\Omega,b}$ 表示空间 W_M^Ω 中满足不等式

$$|\varphi(x+iy)| \leqslant Ce^{-M(\bar{a}x)+\Omega(\bar{b}y)}$$

的函数的全体,其中 $\bar{a}$ 为小于 a 的任意常数, $\bar{b}$ 为大于 b 的任意常数. 对于 $\varphi \in W_{M,a}^{\Omega,b}$, 令

$$\|\varphi\|_{\delta\rho} = \sup_z |\varphi(z)| e^{M[(a-\delta)x]-\Omega[(b+\rho)y]}.$$

显然, 这些范满足对范所要求的公理. 对具有这些范的空间 $W_{M,a}^{\Omega,b}$ 是 (完备赋可列范的) 完全空间的证明, 可象对空间 $W^{\Omega,b}$ 那样进行.

空间 $W_{M,a}^{\Omega,b}$ 按所有的 $a = 1, \frac{1}{2}\cdots$ 和 $b = 1, 2, \cdots$ 之和显然

与空间 W_M^Ω 相同. 在空间 W_M^Ω 中收敛性定义与在赋可列范空间之和中收敛性定义一样. 这样,与在空间 $W_{M,a}$ 和 $W^{\Omega,b}$ 中一样,序列 $\varphi_\nu(x)\in W_M^\Omega$ 收敛于零, 当且仅当 1) 正的收敛于零, 2) 有界集合 $A\subset W_M^\Omega$ 称为有界的,假如它整个地在某一个 $W_{M,a}^{\Omega,b}$ 中,并在其中有界;换句话说,集合 $A\subset W_M^\Omega$ 有界,假如对所有的函数 $\varphi(x)\in A$, 估计式 (1) 对于同样的 a, b 和 C 成立.

等价的函数 $M_1(x)$ 和 $M_2(x)$, $\Omega_1(y)$ 和 $\Omega_2(y)$ (参看第一段)在元素多少和拓扑结构意义上决定同一个空间 $W_{M_1}^{\Omega_1}=W_{M_2}^{\Omega_2}$.

例. 把上面所考虑的函数 $M_1(x)=x^{1/\alpha}$, $M_2(x)=x\ln x$, $\Omega_1(y)=y^{1/(1-\beta)}$, $\Omega_2(y)=e^y(\alpha<1,\beta<1)$ 结合起来, 我们得到四个空间

$$W_{M_1}^{\Omega_1},\ W_{M_1}^{\Omega_2},\ W_{M_2}^{\Omega_1},\ W_{M_2}^{\Omega_2}.$$

空间 $W_{M_1}^{\Omega_1}$ 是由满足不等式

$$|\varphi(x+iy)|\leqslant Ce^{-a|x|^{1/\alpha}+b|y|^{1/(1-\beta)}}$$

的整函数 $\varphi(x+iy)$ 组成. 因此与(第二卷第四章 §2) 空间 S_α^β 相同,在其它情形下得到新的空间;在这些空间中的基本函数由下列不等式决定:

$$W_{M_1}^{\Omega_2}: |\varphi(x+iy)|\leqslant Ce^{-a|x|^{1/\alpha}+e^{b|y|}},$$

$$W_{M_2}^{\Omega_1}: |\varphi(x+iy)|\leqslant Ce^{-a|x\ln x|+b|y|^{1/(1-\beta)}},$$

$$W_{M_2}^{\Omega_2}: |\varphi(x+iy)|\leqslant Ce^{-a|x\ln x|+e^{b|y|}}.$$

以后, 空间 $W_{M,a}^{\Omega,b}$ 当 $M(x)=x^r$, $\Omega(y)=y^s(r>1,s>1)$ 时我们记为 $W_{r,a}^{s,b}$. 记号 W_r^s 具有类似的意思.

4. 空间 W_M^Ω 的非平凡性问题 与空间 S_α^β 一样, 空间 W_M^Ω 可能是平凡的(即由唯一的函数 $\varphi(x)\equiv 0$ 组成). 例如, 若对任意的 a 和 b

$$\lim_{r\to\infty}[\Omega(bx)-M(ax)]=-\infty, \tag{1}$$

则空间总是平凡的. 事实上,设等式 (1) 成立, 且 $\varphi\in W_M^\Omega$. 这意味着对某些 a 和 b

$$|\varphi(x)|=|\varphi(x+iy)|\leqslant Ce^{-M(ax)+\Omega(by)}.$$

但那时

$$|\varphi(\bar{z})| = |\varphi(x-iy)| \leqslant Ce^{-M(ay)+\Omega(bx)};$$

从这里

$$|\varphi(z)\varphi(iz)| \leqslant C^2 e^{-M(ax)+\Omega(bx)} e^{-M(ay)+\Omega(by)}.$$

由于条件 (1)，函数$\varphi(z)\varphi(iz)$ 对充分大的 $|z|$ 有界，按刘维尔(Liouville) 定理，它是常数．除此以外，因为从 1) 推出

$$\lim_{x\to\infty}\varphi(x)\varphi(ix) = 0,$$

所以 $\varphi(z)\varphi(iz) \equiv 0$，由此推出 $\varphi(z) \equiv 0$，

以后将指出某一类非平凡的 W 型空间．

我们称连续函数 $l(x)(x>0)$ 为慢函数，假如对任意 $\varepsilon>0$ 和充分大的 $x > x_0 = x_0(\varepsilon)$ 满足不等式

$$C'_\varepsilon x^{-\varepsilon} < l(x) < C_\varepsilon x^{\varepsilon}.$$

Б. Я. 列维 (Левин) 证明了下面的定理，这是他的有限阶整函数广义增长标形理论中的一个结果．

对任意一个 $p>0$ 和任意一慢函数 $l(x)$ 来说，存在一个整解析函数 $\varphi(z) \neq 0$，对此整函数有

$$|\varphi(x+iy)| \leqslant Ce^{-l(x)|x|^p+\gamma l(y)|y|^p},$$

其中 C 和 γ 是常数．

从这个定理得出空间 W_M^Ω 当 $M = \Omega = l(x)x^p$ 时的非平凡性，这里 $l(x)$ 为慢函数．

显然，对 $M(x) = l(x)x^p$, $\Omega_1(x) \geqslant l(x)x^p$ 的任意空间 $W_M^{\Omega_1}$ 同样是非平凡的，因为在它自己内部包含有非平凡空间 W_M^Ω．

5. 关于空间 W_M^Ω 中函数量的丰富性 我们假设给定的空间 W_M^Ω 是非平凡的，因此对某些 $a>0$ 和 $b>0$ 显然有非平凡空间 $W_{M,a}^{\Omega,b}$；我们称相应的这一对 (a, b) 为"可允许的"．因为在 $a \leqslant a_0$, $b \geqslant b_0$ 时我们有 $-M(a_0x) \leqslant -M(ax)$, $\Omega(b_0y) \leqslant \Omega(by)$，所以可允许值 a 和 b 的区域在包含任何的 a_0 和 b_0 时，也就包括了所有满足 $a \leqslant a_0$, $b \geqslant b_0$ 的数对 a, b，此外，把函数 $\varphi(z) \in W_{M,a}^{\Omega,b}$ 代之以 $\varphi(\lambda z)$，这里 λ 为正数，我们看到，当数对 (a, b) 是可允许的