法国数学丛书

函数项随机级数

[法]J.－P 卡昂纳 著

武汉大学出版社

法 国 数 学 丛 书

武汉大学中法数学与计算机科学中心编辑

顾问：G. Choquet，J. -P. Kahane，P. Malliavin

函数项随机级数

第 二 版

Jean-Pierre Kahane 著

武 汉 大 学 出 版 社

法国数学丛书
武汉大学中法数学与计算机科学中心编辑
顾问:G. Choquet, J.-P. Kahane, P. Malliavin

函授项随机级数

第二版

Jean-Pierre Kahane 著

*

武汉大学出版社出版发行
(430072 武昌 珞珈山)
武汉正佳激光照排
湖北科学技术出版社黄冈印刷厂印刷

*

850×1168 1/32 11.5 印张 284 千字
1993 年 2 月第 1 版 1993 年 2 月第 1 次印刷
印数:1—2000
ISBN 7—307—01442—4/O·119
定价:3.80 元

(鄂) 第 9 号

内容简介

本书作者是世界著名的调和分析专家。在本书中，他把随机函数项级数这一新的研究领域作了系统的讲述，阐述了新的成果，提出了新的研究问题，并且涉及到Brown运动及断片（fractal）几何这些新的研究领域。书中还附有许多习题。本书可供大学高年级学生、研究生以及数学工作者学习和参考。

本书序言、第三、十六至十八章以及注释是余家荣译的；第一至二章是余久曼译的；第四至五章是吴敏译的；第六至九章是肖益民译的；第十至十二章是李家良译的；第十三至十五章是刘全升译的。

序

本书第一版在 1968 年出版. 它的起源是 Paley 和 Zygmund 在 1930 年后所发表的、题为《论若干函数项级数》的几篇短文 [167]. 在这些短文以及在后来与 Wiener 合作的论文中，他们研究了系数为独立随机变量的 Fourier 或 Taylor 级数，例如

$$(\mathrm{R})\ \sum_{-\infty}^{\infty}\varepsilon_n a_n \mathrm{e}^{int},(\mathrm{S})\ \sum_{-\infty}^{\infty}a_n \mathrm{e}^{2\pi i\omega_n}\mathrm{e}^{int},(\mathrm{G})\ \sum_{-\infty}^{\infty}a_n\zeta_n \mathrm{e}^{int},$$

这里 a_n 是已给定的，ε_n，ω_n，ζ_n 表示随机变量. 在(R)(Rademacher 级数）中，$\varepsilon_n=\pm 1$；在（S）(Steinhaus 级数）中，$\omega_n\in[0,1]$；在（G）(Gauss 级数）中，ζ_n 是复正态变量. Steinhaus 已引进系数为 $a_n\mathrm{e}^{2\pi i\omega_n}$ 的 Taylor 级数；Wiener 已发现与 Brown 运动相对应的 Fourier 级数. 级数（R）有时比（S）或（G）更难于研究，但是对于这三种级数，大多数结果是相同的. 在本书第一版中，我们利用了 Billard 的工作解释（R）与（S）之间相似. 这一版的要点之一是解释（R），(S）和（G）之间相似；这应归功于 Marcus 和 Pisier，他们是在 Dudley 和 Fernique 关于 Gauss 过程工作的基础上进行研究的. 准确地说，(R)，(S)，(G）表示连续函数有相同概率（0 或 1)，对于可积函数或 L^p（$1\leqslant p<\infty$）中函数也是这样，而且概率是 1 或 0 依赖于级数 $\sum_1^{\infty}a_n^2$ 收敛或发散. L^p 情形的结果在 30 年代就已经知道，而连续情形是在 1978 年才阐明的. 在 $\overline{\lim}|a_n|^{1/n}=1,\sum_0^{\infty}a_n^2=\infty$ 情形下，Taylor 级数

$$(\mathrm{R})\ \sum_{0}^{\infty}\varepsilon_n a_n z^n,\ (\mathrm{S})\ \sum_{0}^{\infty}a_n \mathrm{e}^{2\pi i\omega_n}z^n,\ (\mathrm{G})\ \sum_{0}^{\infty}a_n\zeta_n z^n,$$

之间的相似性还没有完全清楚．这时（G）的值域和（S）的值域几乎必然充满平面，这是 C. Offord 在 1972 年证明的．关于（G）的证明在本书中作出了．但是（R）的情形还没有解决．

这可能使人感觉进步缓慢．另一方面，随机 Fourier 级数已成为相当普及的课题，并对调和分析有很多新的重要应用；这些特别在 Marcus 和 Pisier 的书［154］中已经讲到了．从某些方面，本书可看作他们的书的一本导论．

对调和分析应用随机方法是一种老想法，而这正是我在 1968 年书中的第一个目标．在许多情况下，很难甚至不可能找出具有某些特定性质的数学实体，可是作出几乎必然具有这些性质的随机实体却相当容易．这种情形的经典的例子是下面的定理：关于三角级数的系数的绝对值，没有比 Riesz-Fischer 条件更好的条件，使得有关三角级数是 Fourier-Lebesgue 级数．Paley 和 Zygmund 的证明如下：在 $\sum a_n^2=\infty$ 情形，相应的 Rademacher 三角级数几乎必然不能表示一个可积函数．对于几乎所有序列 ε_n 都是这样，可是不能作出一个特定的序列具有这种性质．Salem 应用随机构造法作出在强意义下的重复集，没有人知道怎样直接作出这种集；Salem 的想法在本书第一版中已经叙述过了．现在再给出少数其他例子．下面是一个例子：已给 $a_n>0$，$\sum_0^\infty a_n^2<\infty$，是否有一个连续函数 $f\sim\sum b_n e^{int}$，使得 $|b_n|\geqslant a_n$？答案是肯定的，求解要反复应用随机选择．下面是另一例子，但它过于复杂，从而不能在本书中充分说明：已给 $\varepsilon>0$，找出 $N>1$ 和一多项式 $P(z)=\sum_1^N a_n z^n$，$|a_n|=1$ 使 $\sup_{|z|=1}|P(z)|\leqslant(1+\varepsilon)\inf_{|z|=1}|P(z)|$（这就是说，$|P(z)|$ 在圆周 $|z|=1$ 上几乎是常数）．问题解决的由来是 T. Körner 的一个想法，即对这问题应用随机方法．

最美妙的例子是 Pisier 代数，它完全解决了 Y. Katznelson 的一个老问题：找出圆周上连续函数的一齐次 Banach 代数，使该代数中不包含所有连续函数，但不仅含解析函数．M. Zafran 引进了一些困难的作法．Pisier 的解是这样的连续函数的代数：随机改换

它们的 Fourier 级数中的符号，所得级数几乎必然表示连续函数.

从随机的观点出发，奇怪的结果往往变成自然的（象无处可微函数、几乎处处发散级数、在有理数上独立的重复集等等）. 在 B. Mandelbrot 那种所谓断片几何图形中，特别可以证实的确是这样. 随机区间不覆盖的集、已给集在随机过程下的象、随机函数或随机域的水平集已经在我的 1968 年的书中借助初等 Fourier 分析研究过. 在本版中要稍微多讲一点，并将用一章作为书中几何部分的导论. 关于用随机弧覆盖圆的一章改写了，我讲述了 L. Shepp 的工作（随机覆盖的必要与充分条件）以及多维情形（包括 El Helou 的方法），还把有平稳增量的 Gauss 过程描述为 Gauss-Hilbert 空间中的螺线，并且详细研究了样本函数，主要是 Brown 运动的样本函数. 最后几章表明 Hausdorff 维数、Lipschitz 或 Hölder 条件，Gauss 过程、象、图形、水平集及测度的 Fourier 性质之间的相互关系. 作为一种粗糙的想法，这样得到的随机集尽可能充满空间，而且随机测度的谱是光滑的. 从这种观点看，Salem 集是很自然的.

除了改动少量错误外，我没有改变本书第一版的大部分材料. 在第二（§7）、五（§9）、六（§5，§6）、十二（§7）及十三（§3）各章中，均有新写的节. 第十、十一、十五、十六及十八章是新写的. 我建议读者随意选定次序阅读本书，并且自己发现各部分之间的联系. 书末有注释和参考文献. 在本书第一版中，我感到必须为省去的材料表示歉意. 本版中省去了这样多，以致仅仅列一张表就要占去序言篇幅的两倍；因此我不再提任何省去的材料. 在准备第一版时，我曾向少数帮助我的同事和朋友们致谢. 现在要向更多的同事和朋友们致谢. 对 Josette Dumas 夫人在本书前后两版的准备中所给予的经常性帮助，以及介于这两次出版之间某段时间对我的帮助，我愿再一次向她表示谢意.

J. P. K.

中文版序

自从本书第二版出版仅仅几个月以来，在Gauss过程论中已经取得了有意义的进展. 最显著的进步是由Michel Talagrand取得的，即关于存在着几乎必然有界或几乎必然连续的表示式，他给出了一些自然而又简单的必要与充分条件. 在本版第十五章的注释中，概述了有关进展.

此外，还引进了几个详细的条件.

我有机会了解到，由于余家荣教授，我的这本书在中国已经为人所知，并且已被引用. 我感谢他提议出版这本书的中文版；在本版发行的时候，它将作为我对随机函数项级数这一课题所能做出的最好说明.

J. P. K.

1986年4月28日于武汉

目　　录

第一章　概率论中的几个工具

§1. 引　　言

本书并不需要很多概率理论. 在 1930 年左右，我们所有需要的这些理论就已很好地为人们所了解，现在我们来解释 Steinhaus 研究这理论的方法.

Steinhaus 设**概率空间**是实轴上的区间[0,1]. **随机变量**是定义在[0,1]上的函数. **事件**是[0,1]上的可测集. 事件的**概率**是它的 Lebesgue 测度. 随机变量的**期望**(当它们存在时)是它的 Lebesgue 积分.

考虑二进位展开

$$\omega = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n 2^{-n},$$

其中 $\omega \in [0,1]$，$\beta_n = \beta_n(\omega) = 0$ 或 1，并除 $\omega = 0$ 外，$\sum_1^\infty \beta_n = \infty$. 在很自然的意义下，$\beta_n$ 是相互独立的随机变量，每个 β_n 取值 0 或 1，概率都是 1/2. 现在我们定义

$$\omega_j = \omega_j(\omega) = \sum_{n \in \mathbf{N}} \beta_{m(n,j)} 2^{-n},$$

其中 $\mathbf{N} = \{1,2,3,\cdots\}$，$m$ 是从 $\mathbf{N}^2$ 到 $\mathbf{N}$ 的一一映射. 在很自然的意义下，ω_j 是相互独立的随机变量. 它们中的每一个在区间[0,1]上是等分布的，即给定[0,1]的一个子区间 I，满足 $\omega_j(\omega) \in I$ 的 ω-集的概率是 I 的长度.

β_n 与 Rademacher 函数有密切关系. 如果记

$$\varepsilon_n = 1 - 2\beta_n,$$

那么除去有限个二进位点所构成的一个集以外，$\varepsilon_n(\omega)$恰好是第 n 个 Rademacher 函数.

ω_j 常称为 **Steinhaus 函数**.

当我们提到“Rademacher 序列”或“Steinhaus 序列”时，读者可以记住这些模型. 以后将给出这两序列的定义；不过如果我们用 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n,\cdots$代替任何 Rademacher 序列，用 $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_j,\cdots$代替任何 Steinhaus 序列实际上也不会有什么损失.

然而，引入略为不同的模型并用现代概率论的语言更为方便. 从现在起，我们的主要参考资料是 Saks[182]，Kolmogorov[131]，Loève[141]和 Meyer[157]的经典著作.

§2. 基本概念

现定义概率空间$(\Omega,\mathscr{A},\mathscr{P})$，$\Omega$ 是一个集.

$\mathscr{A}$ 是 Ω 上一 σ-域. 这就是说，$\mathscr{A}$ 是由 Ω 的子集构成，它包含 $\varnothing$（空集），并对于取余集和可数并的运算是封闭的.

$\mathscr{P}$ 是$(\Omega,\mathscr{A})$上一概率. 换句话说，它是总质量为 1 的一个正测度. 即对每一 $A\in\mathscr{A}$，$\mathscr{P}(A)$有定义，$\mathscr{P}(A)\in[0,1]$，$\mathscr{P}(\Omega)=1$，并对任何可数个不相交的集 $A_n(A_n\in\mathscr{A})$，

$$\mathscr{P}(\bigcup A_n) = \sum \mathscr{P}(A_n).$$

还设 $\mathscr{P}$ 是完备的. 即当 A 包含在集 $B\in\mathscr{A}$ 内，且 $\mathscr{P}(B)=0$ 时，有 $A\in\mathscr{A}$. 在概率论中，我们并不总是假设完备性，然而这样假设对于我们的研究是方便的.

当这些条件被满足时，$(\Omega,\mathscr{A},\mathscr{P})$称为**概率空间**，或者就称 Ω 本身为概率空间（例如，我们说概率空间的一个元素 ω），这时总是假设 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{P}$ 已定义. $\mathscr{A}$ 的元素称为**事件**，$\mathscr{P}(A)$是事件 A 的**概率**. 如果 $\mathscr{P}(A)=1$，称 A 是**几乎必然的**.