

法国数学丛书

数学

函数项随机级数

[法] J. - P 卡昂纳 著

武汉大学出版社

法 国 数 学 丛 书

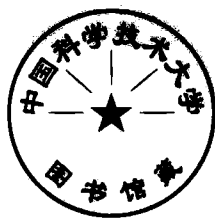
武汉大学中法数学与计算机科学中心编辑

顾问: G. Choquet, J. -P. Kahane, P. Malliavin

函 数 项 随 机 级 数

第 二 版

Jean-Pierre Kahane 著



武 汉 大 学 出 版 社

法国数学丛书

武汉大学中法数学与计算机科学中心编辑

顾问: G. Choquet, J. -P. Kahane, P. Malliavin

函授随机级数

第二版

Jean-Pierre Kahane 著

*

武汉大学出版社出版发行

(430072 武昌 珞珈山)

武汉正佳激光照排

湖北科学技术出版社黄冈印刷厂印刷

*

850×1168 1/32 11.5 印张 284 千字

1993 年 2 月第 1 版 1993 年 2 月第 1 次印刷

印数: 1—2000

ISBN 7-307-01442-4/O·119

定价: 3.80 元

(鄂) 第 9 号

内 容 简 介

本书作者是世界著名的调和分析专家。在本书中，他把随机函数项级数这一新的研究领域作了系统的讲述，阐述了新的成果，提出了新的研究问题，并且涉及到 Brown 运动及断片 (fractal) 几何这些新的研究领域。书中还附有许多习题。本书可供大学高年级学生、研究生以及数学工作者学习和参考。

本书序言、第三、十六至十八章以及注释是余家荣译的；第一至二章是余久曼译的；第四至五章是吴敏译的；第六至九章是肖益民译的；第十至十二章是李家良译的；第十三至十五章是刘全升译的。

序

本书第一版在 1968 年出版. 它的起源是 Paley 和 Zygmund 在 1930 年后所发表的、题为《论若干函数项级数》的几篇短文 [167]. 在这些短文以及在后来与 Wiener 合作的论文中, 他们研究了系数为独立随机变量的 Fourier 或 Taylor 级数, 例如

$$(R) \sum_{-\infty}^{\infty} \epsilon_n a_n e^{int}, (S) \sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{2\pi i \omega_n} e^{int}, (G) \sum_{-\infty}^{\infty} a_n \zeta_n e^{int},$$

这里 a_n 是已给定的, $\epsilon_n, \omega_n, \zeta_n$ 表示随机变量. 在 (R) (Rademacher 级数) 中, $\epsilon_n = \pm 1$; 在 (S) (Steinhaus 级数) 中, $\omega_n \in [0, 1]$; 在 (G) (Gauss 级数) 中, ζ_n 是复正态变量. Steinhaus 已引进系数为 $a_n e^{2\pi i \omega_n}$ 的 Taylor 级数; Wiener 已发现与 Brown 运动相对应的 Fourier 级数. 级数 (R) 有时比 (S) 或 (G) 更难于研究, 但是对于这三种级数, 大多数结果是相同的. 在本书第一版中, 我们利用了 Billard 的工作解释 (R) 与 (S) 之间相似. 这一版的要点之一是解释 (R), (S) 和 (G) 之间相似; 这应归功于 Marcus 和 Pisier, 他们是在 Dudley 和 Fernique 关于 Gauss 过程工作的基础上进行研究的. 准确地说, (R), (S), (G) 表示连续函数有相同概率 (0 或 1), 对于可积函数或 L^p ($1 \leq p < \infty$) 中函数也是这样, 而且概率是 1 或 0 依赖于级数 $\sum_1^{\infty} a_n^2$ 收敛或发散. L^p 情形的结果在 30 年代就已经知道, 而连续情形是在 1978 年才阐明的. 在 $\lim |a_n|^{1/n} = 1, \sum_0^{\infty} a_n^2 = \infty$ 情形下, Taylor 级数

$$(R) \sum_0^{\infty} \epsilon_n a_n z^n, (S) \sum_0^{\infty} a_n e^{2\pi i \omega_n} z^n, (G) \sum_0^{\infty} a_n \zeta_n z^n,$$

之间的相似性还没有完全清楚. 这时 (G) 的值域和 (S) 的值域几乎必然充满平面, 这是 C. Offord 在 1972 年证明的. 关于 (G) 的证明在本书中作出了. 但是 (R) 的情形还没有解决.

这可能使人感觉进步缓慢. 另一方面, 随机 Fourier 级数已成为相当普及的课题, 并对调和分析有很多新的重要应用; 这些特别在 Marcus 和 Pisier 的书 [154] 中已经讲到了. 从某些方面, 本书可看作他们的书的一本导论.

对调和分析应用随机方法是一种老想法, 而这正是我在 1968 年书中的第一个目标. 在许多情况下, 很难甚至不可能找出具有某些特定性质的数学实体, 可是作出几乎必然具有这些性质的随机实体却相当容易. 这种情形的经典的例子是下面的定理: 关于三角级数的系数的绝对值, 没有比 Riesz-Fischer 条件更好的条件, 使得有关三角级数是 Fourier-Lebesgue 级数. Paley 和 Zygmund 的证明如下: 在 $\sum a_n^2 = \infty$ 情形, 相应的 Rademacher 三角级数几乎必然不能表示一个可积函数. 对于几乎所有序列 ϵ_n 都是这样, 可是不能作出一个特定的序列具有这种性质. Salem 应用随机构造法作出在强意义下的重复集, 没有人知道怎样直接作出这种集; Salem 的想法在本书第一版中已经叙述过了. 现在再给出少数其他例子. 下面是一个例子: 已给 $a_n > 0$, $\sum_0^\infty a_n^2 < \infty$, 是否有一个连续函数 $f \sim \sum b_n e^{in\theta}$, 使得 $|b_n| \geq a_n$? 答案是肯定的, 求解要反复应用随机选择. 下面是另一例子, 但它过于复杂, 从而不能在本书中充分说明: 已给 $\epsilon > 0$, 找出 $N > 1$ 和一多项式 $P(z) = \sum_1^N a_n z^n$, $|a_n| = 1$ 使 $\sup_{|z|=1} |P(z)| \leq (1 + \epsilon) \inf_{|z|=1} |P(z)|$ (这就是说, $|P(z)|$ 在圆周 $|z|=1$ 上几乎是常数). 问题解决的由来是 T. Körner 的一个想法, 即对这问题应用随机方法.

最美妙的例子是 Pisier 代数, 它完全解决了 Y. Katznelson 的一个老问题: 找出圆周上连续函数的一齐次 Banach 代数, 使该代数中不包含所有连续函数, 但不仅含解析函数. M. Zafran 引进了一些困难的作法. Pisier 的解是这样的连续函数的代数: 随机改换

它们的 Fourier 级数中的符号, 所得级数几乎必然表示连续函数.

从随机的观点出发, 奇怪的结果往往变成自然的 (象无处可微函数、几乎处处发散级数、在有理数上独立的重复集等等). 在 B. Mandelbrot 那种所谓断片几何图形中, 特别可以证实的确是那样. 随机区间不覆盖的集、已给集在随机过程下的象、随机函数或随机域的水平集已经在我的 1968 年的书中借助初等 Fourier 分析研究过. 在本版中要稍微多讲一点, 并将用一章作为书中几何部分的导论. 关于用随机弧覆盖圆的一章改写了, 我讲述了 L. Shepp 的工作 (随机覆盖的必要与充分条件) 以及多维情形 (包括 El Helou 的方法), 还把有平稳增量的 Gauss 过程描述为 Gauss-Hilbert 空间中的螺线, 并且详细研究了样本函数, 主要是 Brown 运动的样本函数. 最后几章表明 Hausdorff 维数、Lipschitz 或 Hölder 条件, Gauss 过程、象、图形、水平集及测度的 Fourier 性质之间的相互关系. 作为一种粗糙的想法, 这样得到的随机集尽可能充满空间, 而且随机测度的谱是光滑的. 从这种观点看, Salem 集是很自然的.

除了改动少量错误外, 我没有改变本书第一版的大部分材料. 在第二 (§ 7)、五 (§ 9)、六 (§ 5, § 6)、十二 (§ 7) 及十三 (§ 3) 各章中, 均有新写的节. 第十、十一、十五、十六及十八章是新写的. 我建议读者随意选定次序阅读本书, 并且自己发现各部分之间的联系. 书末有注释和参考文献. 在本书第一版中, 我感到必须为省去的材料表示歉意. 本版中省去了这样多, 以致仅仅列一张表就要占去序言篇幅的两倍; 因此我不再提任何省去的材料. 在准备第一版时, 我曾向少数帮助我的同事和朋友们致谢. 现在要向更多的同事和朋友们致谢. 对 Josette Dumas 夫人在本书前后两版的准备中所给予的经常性帮助, 以及介于这两次出版之间某段时间对我的帮助, 我愿再一次向她表示谢意.

J. P. K.

中文版序

自从本书第二版出版仅仅几个月以来，在 Gauss 过程论中已经取得了有意义的进展。最显著的进步是由 Michel Talagrand 取得的，即关于存在着几乎必然有界或几乎必然连续的表示式，他给出了一些自然而又简单的必要与充分条件。在本版第十五章的注释中，概述了有关进展。

此外，还引进了几个详细的条件。

我有机会了解到，由于余家荣教授，我的这本书在中国已经为人所知，并且已被引用。我感谢他提议出版这本书的中文版；在本版发行的时候，它将作为我对随机函数项级数这一课题所能做出的最好说明。

J. P. K.

1986 年 4 月 28 日于武汉

目 录

序.....	1
中文版序.....	4
第一章 概率论中的几个工具.....	1
§ 1. 引言	1
§ 2. 基本概念	2
§ 3. 分布和相似	3
§ 4. 乘积概率空间	4
§ 5. 标准模型; 独立性; Steinhaus 和 Rademacher 序列	5
§ 6. 积分: 主要的工具	6
§ 7. 对称随机向量	9
§ 8. 随机函数和解析集.....	10
第二章 Banach 空间中的随机级数.....	12
§ 1. 引言	12
§ 2. 求和法.....	13
§ 3. 对称随机向量的和; 两个引理.....	15
§ 4. 定理 1 的证明.....	17
§ 5. Rademacher 级数 $\sum_1^\infty \pm u_n$	19
§ 6. 收缩原理.....	22
§ 7. Rademacher 级数的强可积性	25

§ 8. 习题	27
第三章 Hilbert 空间中的随机级数	31
§ 1. 引言	31
§ 2. Kolmogorov 不等式	32
§ 3. Paley-Zygmund 不等式	34
§ 4. 正项随机级数	36
§ 5. 收敛性和有界性的充分必要条件	37
§ 6. 习题	39
第四章 随机 Taylor 级数	41
§ 1. 引言	41
§ 2. 奇异点	43
§ 3. 对称情形	44
§ 4. 一般情形	45
§ 5. 具有两个复变量的随机 Taylor 级数	46
§ 6. 随机 Dirichlet 级数	48
§ 7. 补充及习题	49
第五章 随机 Fourier 级数	51
§ 1. 引言	51
§ 2. 关于三角级数的辅助结果	52
§ 3. Rademacher 级数: $\sum_0^\infty x_n^2 = \infty$ 情形	55
§ 4. Rademacher 级数: $\sum_0^\infty x_n^2 < \infty$ 情形	57
§ 5. 一般 Paley-Zygmund 定理	59
§ 6. 关于平移级数的辅助结果	60
§ 7. 在 C 或 L^∞ 中的收敛性及有界性	62
§ 8. 处处收敛; Billard 定理	65
§ 9. 一个应用: 连续函数的 Fourier 系数	67

§ 10. 习题	70
第六章 随机三角多项式的一个界及应用	74
§ 1. 引言	74
§ 2. $M = \ P\ _\infty$ 的分布	75
§ 3. 应用; Littlewood 和 Salem 的一个定理; Sidon 集 和 Helson 集	78
§ 4. 另一应用: 广义概周期序列	80
§ 5. 系数模为 1 的多项式	83
§ 6. 正弦和	87
§ 7. 习题	89
第七章 系数的正则性条件	91
§ 1. 引言	91
§ 2. $(1) \in C$ 的一个充分条件	92
§ 3. 连续模的估计 (次 Gauss 情形)	94
§ 4. $(1) \in \Lambda_c$ 的一个充分条件	97
§ 5. 一个应用	98
§ 6. 习题	100
第八章 系数的非正则性条件	102
§ 1. 引言	102
§ 2. 无界性: Paley-Zygmund 方法	103
§ 3. 无界性: 一种特殊情形	105
§ 4. 无界性: 一般情形	107
§ 5. 几乎处处非正则性	108
§ 6. 处处非正则性	111
§ 7. 联立不等式	112
§ 8. 处处非正则性 (续)	114

§ 9. 处处发散性	115
§ 10. 习题	118
第九章 圆周上的随机点质量	119
§ 1. 引言	119
§ 2. 关于 Fourier-Stieltjes 级数的两个定理	120
§ 3. 定理 2 的证明	123
§ 4. 一个几乎处处发散的 Fourier 级数	127
§ 5. $\sum_1^\infty \epsilon_j m_j \delta_{\theta_j}$ 的 Poisson 变换	128
§ 6. 关于共轭调和函数的一个定理	132
§ 7. 再论 $\sum_1^\infty m_j^2 = 1$ 情形	135
§ 8. 习题	136
第十章 一些几何概念	139
§ 1. 引言	139
§ 2. Hausdorff 测度和维数; Frostman 引理	140
§ 3. 能量和容量; Frostman 定理	144
§ 4. ϵ -覆盖数	146
§ 5. 螺旋线	147
§ 6. 拟螺旋线; von Koch 曲线和 Assouad 曲线	149
§ 7. 关于维数的补充	152
§ 8. 习题	154
第十一章 随机平移和覆盖	156
§ 1. 引言	156
§ 2. 覆盖圆周: 一充分条件	157
§ 3. 覆盖圆周: 一必要条件	162
§ 4. 覆盖圆周: 必要和充分条件	164
§ 5. 用随机集合覆盖 $\mathbf{T}^2$ 的子集: 一必要条件	167

§ 6. 覆盖 $\mathbf{T}^n$ 的子集: 一充分条件; g_n 是凸集的情形	170
§ 7. g_n 是非平坦凸集的情形; 覆盖有已给 Hausdorff 维数的集	173
§ 8. g_n 是非平坦凸集的情形 (续); 未被覆盖集的维数	174
§ 9. 结束语	176
§ 10. 习题	178
第十二章 Gauss 变量和 Gauss 级数	180
§ 1. 引言	180
§ 2. 关于 Fourier 变换的公式	181
§ 3. Gauss 随机变量	183
§ 4. 一些公式	187
§ 5. 关于 Borel-Cantelli 引理	188
§ 6. 暂留和常返的 Gauss 级数	189
§ 7. Banach 空间中的 Gauss 级数	192
§ 8. 习题	193
第十三章 Gauss-Taylor 级数	195
§ 1. 引言	195
§ 2. 一些已知结果的回顾	196
§ 3. $F(z) (z < 1)$ 的值域	197
§ 4. 径向性态: 一常返条件	202
§ 5. 径向性态: 暂留条件	205
§ 6. 非径向性态: 常返条件	208
§ 7. 圆周集上的暂留性	212
§ 8. 习题	214

第十四章 Gauss-Fourier 级数	216
§ 1. 引言	216
§ 2. 已知结果的回顾	218
§ 3. 容量和 Hausdorff 维数的回顾	219
§ 4. F 的值域	220
§ 5. F 的零点	223
§ 6. $\delta^{(q)}(F)$ 的定义	227
§ 7. 关于谱综合的 Malliavin 定理	229
§ 8. 习题	230
第十五章 Gauss 过程的有界性及连续性	232
§ 1. 引言	232
§ 2. Slepian 引理	235
§ 3. Marcus 和 Shepp 的定理; Pisier 代数	236
§ 4. Dudley 定理	240
§ 5. Fernique 定理	244
§ 6. 非 Gauss-Fourier 级数	250
§ 7. 习题	255
第十六章 Brown 运动	257
§ 1. 引言	257
§ 2. Wiener 过程	257
§ 3. Fourier-Wiener 级数	259
§ 4. 其他局部性质	262
§ 5. 停时, 极集及 Newton 容量	267
§ 6. 自相交	270
第十七章 调和分析中的 Brown 象	276
§ 1. 引言	276

§ 2. Brown 象	277
§ 3. 测度的 Brown 象; 定理 1 的证明	280
§ 4. Brown 象的算术性质; 定理 2 的证明	282
§ 5. 测度在 Gauss-Fourier 级数作用下的象	284
§ 6. H. Cartan 的作法; 引理 6 的证明	285
§ 7. 定理 1 及 2 的推广	287
§ 8. 习题	288
第十八章 分数 Brown 象及水平集	290
§ 1. 引言	290
§ 2. Gauss 过程 (n, d, γ)	291
§ 3. 测度的分数 Brown 象; 新的 Salem 集	292
§ 4. 分数 Brown 象 (续); 占有密度	295
§ 5. 水平集	301
§ 6. $\delta(X-x)$ 的唯一性及连续性	304
§ 7. 图	307
§ 8. 习题	308
注释	310
参考文献	324
译名表	340

第一章 概率论中的几个工具

§ 1. 引言

本书并不需要很多概率理论. 在 1930 年左右, 我们所有需要的这些理论就已很好地为人们所了解, 现在我们来解释 Steinhaus 研究这理论的方法.

Steinhaus 设**概率空间**是实轴上的区间 $[0, 1]$. **随机变量**是定义在 $[0, 1]$ 上的函数. **事件**是 $[0, 1]$ 上的可测集. 事件的**概率**是它的 Lebesgue 测度. 随机变量的**期望**(当它们存在时)是它的 Lebesgue 积分.

考虑二进位展开

$$\omega = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n 2^{-n},$$

其中 $\omega \in [0, 1]$, $\beta_n = \beta_n(\omega) = 0$ 或 1 , 并除 $\omega = 0$ 外, $\sum_1^{\infty} \beta_n = \infty$. 在很自然的意义下, β_n 是相互独立的随机变量, 每个 β_n 取值 0 或 1 , 概率都是 $1/2$. 现在我们定义

$$\omega_j = \omega_j(\omega) = \sum_{n \in N} \beta_{m(n, j)} 2^{-n},$$

其中 $N = \{1, 2, 3, \dots\}$, m 是从 N^2 到 N 的一一映射. 在很自然的意义下, ω_j 是相互独立的随机变量. 它们中的每一个在区间 $[0, 1]$ 上是等分布的, 即给定 $[0, 1]$ 的一个子区间 I , 满足 $\omega_j(\omega) \in I$ 的 ω -集的概率是 I 的长度.

β_n 与 Rademacher 函数有密切关系. 如果记

$$\epsilon_n = 1 - 2\beta_n,$$

那么除去有限个二进位点所构成的一个集以外, $\epsilon_n(\omega)$ 恰好是第 n 个 Rademacher 函数.

ω_j 常称为 **Steinhaus 函数**.

当我们提到“Rademacher 序列”或“Steinhaus 序列”时, 读者可以记住这些模型. 以后将给出这两序列的定义; 不过如果我们用 $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n, \dots$ 代替任何 Rademacher 序列, 用 $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_j, \dots$ 代替任何 Steinhaus 序列实际上也不会有什么损失.

然而, 引入略为不同的模型并用现代概率论的语言更为方便. 从现在起, 我们的主要参考资料是 Saks[182], Kolmogorov[131], Loève[141]和 Meyer[157]的经典著作.

§ 2. 基本概念

现定义概率空间 $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$, Ω 是一个集.

$\mathcal{A}$ 是 Ω 上一 σ -域. 这就是说, $\mathcal{A}$ 是由 Ω 的子集构成, 它包含 $\emptyset$ (空集), 并对于取余集和可数并的运算是封闭的.

$\mathcal{P}$ 是 $(\Omega, \mathcal{A})$ 上一概率. 换句话说, 它是总质量为 1 的一个正测度. 即对每一 $A \in \mathcal{A}$, $\mathcal{P}(A)$ 有定义, $\mathcal{P}(A) \in [0, 1]$, $\mathcal{P}(\Omega) = 1$, 并对任何可数个不相交的集 $A_n (A_n \in \mathcal{A})$,

$$\mathcal{P}(\cup A_n) = \sum \mathcal{P}(A_n).$$

还设 $\mathcal{P}$ 是完备的. 即当 A 包含在集 $B \in \mathcal{A}$ 内, 且 $\mathcal{P}(B) = 0$ 时, 有 $A \in \mathcal{A}$. 在概率论中, 我们并不总是假设完备性, 然而这样假设对于我们的研究是方便的.

当这些条件被满足时, $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ 称为**概率空间**, 或者就称 Ω 本身为概率空间 (例如, 我们说概率空间的一个元素 ω), 这时总是假设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{P}$ 已定义. $\mathcal{A}$ 的元素称为**事件**, $\mathcal{P}(A)$ 是事件 A 的**概率**. 如果 $\mathcal{P}(A) = 1$, 称 A 是**几乎必然的**.