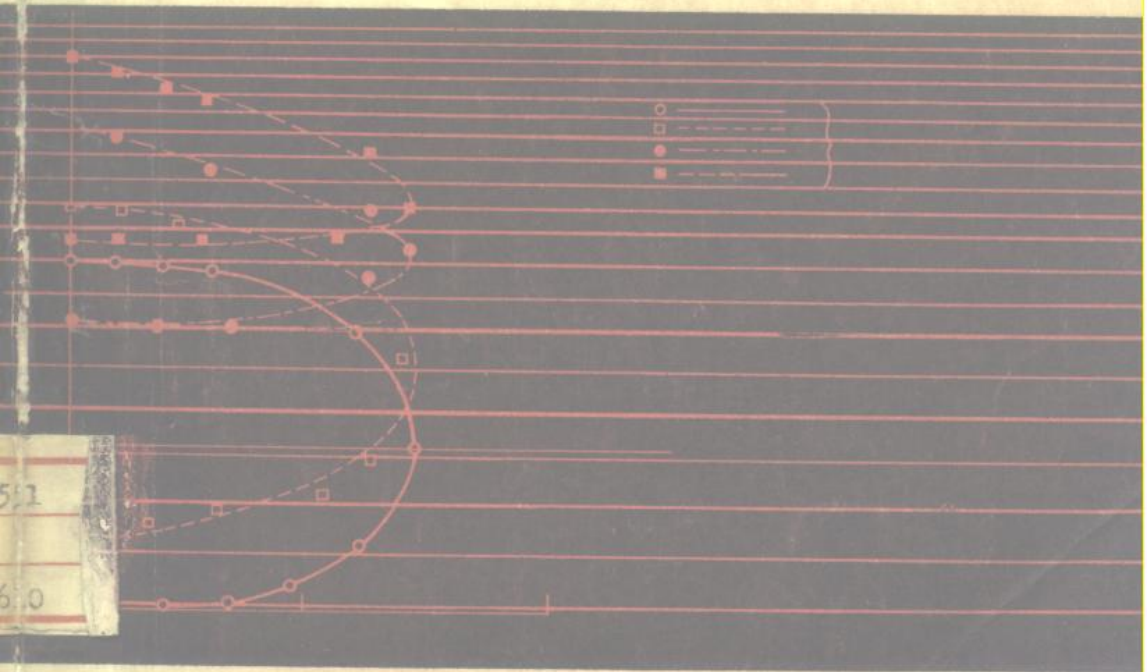


# 塑性力学引论

王 仁 黄文彬 著



北京 大学 出版 社

## 内 容 简 介

本书阐述深入浅出，难点分散，是一本为初学者易于接受的入门性教科书。本书将重点放在建立正确的物理概念上。最后两章还介绍了实际问题所用到的上下限方法和有限元方法。

全书共八章。并附有70余题习题和习题解答。

本书可供综合大学力学专业，工科院校土建结构、岩石力学、船舶、航空、金属加工、机械等专业师生及有关科技人员学习、参考。

2P92/20

## 塑性力学引论

---

北京大学出版社出版  
(北京大学校内)

北京大学印刷厂印刷  
新华书店北京发行所发行

850×1168 毫米 32开本 8.5印张 210千字  
1982年2月第一版 1982年2月第一次印刷  
印数 1—15000册

---

统一书号：13209·34 定价：1.25元

# 前 言

塑性力学经过40年代后期到50年代这一时期的迅速和巨大的发展，现在已经普遍地应用到建筑结构、机械加工、机械设计等各个部门。并且，在各高等理工科院校的有关专业中也已不同程度地增设了这门课程。近20年来在断裂力学，抗震抗爆结构的动力响应、钢筋混凝土结构分析、地下建筑的岩石力学等研究工作中也都在考虑塑性变形的影响，因此，从事这方面研究工作的人也需要具备塑性力学的基本知识。然而，由于材料的塑性性质是不可逆的和非线性的，在数学处理上要比弹性力学困难得多。所以，在过去的教学中学生对于塑性力学教材在一开始就引入大量物理的、数学的各种新概念，感到倾盆大雨，难于接受。基于以上的认识和我们长期教学实践的体验，我们编写了这本书，试图提供一本适用的入门性教材。

本书将重点放在建立正确的物理概念上。在第一、二章中先通过简单应力状态下的问题使读者全面了解塑性力学问题的特点，用简单的数学处理方法建立有关的物理概念。然后再把它们推广到复杂应力状态中去。此时，物理概念是相同的，只是数学形式变得复杂了。这样便分散了难点，使初学者能够较顺利地掌握塑性力学的特点，为进一步阅读这方面更深入的著作和文献打下良好的基础。此书的最后两章我们还介绍了解决实际问题所用到的上下限方法和有限单元计算方法。

在教学中我们还遇到这样的情况：即有人认为第一、二章可以不讲或快讲，也就是可以跳过去。根据我们的教学经验，我们认为还是认真地学习一遍，掌握其物理实质，这对学好后面几章

的内容将有很大的好处。

本书适用于本科大学生高年级40学时左右的选修课。根据不同专业的需要可以适当删去某些章节。例如对于结构专业，可删去第六章，而对于机械压力加工专业，则可考虑删去第八章。

本书在修订过程中承殷有泉、黄筑平等同志提出宝贵意见，特借此机会致谢。文中尚有错误不当之处，希读者提出改进意见。

王 仁 (北 京 大 学)

黄文彬 (北京农业机械化学院)

1981年6月

# 目 录

|                                |    |
|--------------------------------|----|
| 第一章 简单应力状态下的弹塑性力学问题 .....      | 1  |
| § 1.1 引言 .....                 | 1  |
| § 1.2 材料在简单拉压时的实验结果 .....      | 2  |
| § 1.3 应力-应变的简化模型 .....         | 6  |
| § 1.4 轴向拉伸时的塑性失稳 .....         | 9  |
| § 1.5 理想弹塑性材料的简单桁架 .....       | 10 |
| § 1.6 线性强化弹塑性材料的简单桁架 .....     | 14 |
| § 1.7 加载路径对桁架内应力和应变的影响 .....   | 15 |
| § 1.8 大变形影响 .....              | 18 |
| § 1.9 弹性解方法 .....              | 20 |
| 习题 .....                       | 22 |
| 第二章 梁的弹塑性弯曲及梁和刚架的塑性极限分析 .....  | 25 |
| § 2.1 梁的弹塑性纯弯曲 .....           | 25 |
| § 2.2 横向载荷作用下梁的弹塑性分析 .....     | 29 |
| § 2.3 弹塑性强化材料矩形截面梁的弯曲 .....    | 31 |
| § 2.4 梁和刚架的塑性极限载荷 .....        | 33 |
| § 2.5 极限载荷的上下限定理 .....         | 38 |
| § 2.6 安定状态与安定定理 .....          | 40 |
| § 2.7 最轻结构的极限设计 .....          | 41 |
| § 2.8 弯矩与轴向力同时作用的情形 .....      | 45 |
| 习题 .....                       | 47 |
| 第三章 应力分析和应变分析, 屈服条件和加载条件 ..... | 50 |
| § 3.1 应力张量及其不变量 .....          | 51 |
| § 3.2 偏应力张量及其不变量 .....         | 54 |
| § 3.3 应变张量及其不变量 .....          | 57 |
| § 3.4 应变率张量, 应变增量, 应力增量 .....  | 60 |

|            |                               |            |
|------------|-------------------------------|------------|
| § 3.5      | 屈服条件, 屈服曲面 .....              | 63         |
| § 3.6      | 两个常用的屈服条件 .....               | 70         |
| § 3.7      | 加载条件, 加载曲面 .....              | 76         |
|            | 习题 .....                      | 81         |
| <b>第四章</b> | <b>塑性状态下的本构关系 .....</b>       | <b>83</b>  |
| § 4.1      | 广义虎克定律, 弹性应变能 .....           | 83         |
| § 4.2      | Drucker 公设 .....              | 85         |
| § 4.3      | 加载和卸载准则 .....                 | 88         |
| § 4.4      | 理想塑性材料的增量本构关系 .....           | 90         |
| § 4.5      | 强化材料的塑性增量本构关系 .....           | 94         |
| § 4.6      | 简单加载时的全量理论 .....              | 96         |
| § 4.7      | 岩土力学中的库伦屈服条件和流动法则 .....       | 101        |
|            | 习题 .....                      | 106        |
| <b>第五章</b> | <b>复杂应力状态下最简单的弹塑性问题 .....</b> | <b>107</b> |
| § 5.1      | 弹塑性力学边值问题的提法 .....            | 107        |
| § 5.2      | 薄管的拉扭联合变形 .....               | 110        |
| § 5.3      | 厚壁圆柱筒的弹塑性分析 .....             | 116        |
| § 5.4      | 柱体的弹塑性自由扭转 (理想塑性材料) .....     | 128        |
| § 5.5      | 圆板的轴对称刚塑性弯曲 .....             | 135        |
|            | 习题 .....                      | 140        |
| <b>第六章</b> | <b>理想刚塑性体的平面应变问题 .....</b>    | <b>143</b> |
| § 6.1      | 平面应变问题的基本方程 .....             | 143        |
| § 6.2      | 特征线 (滑移线) .....               | 146        |
| § 6.3      | 滑移线的性质 .....                  | 150        |
| § 6.4      | 边界条件 .....                    | 153        |
| § 6.5      | 基本边值问题及数值积分法 .....            | 156        |
| § 6.6      | 典型应力分布情况的滑移场 .....            | 161        |
| § 6.7      | 楔的单边受压 .....                  | 163        |
| § 6.8      | 半平面上的刚性压模及切口板条的拉伸 .....       | 168        |
| § 6.9      | 定常的塑性流动问题, 板条的抽拉 .....        | 172        |
| § 6.10     | 塑性平面应变问题与塑性平面应力问题的区别 .....    | 174        |

|                          |     |
|--------------------------|-----|
| 习题                       | 176 |
| 第七章 极限载荷的上下限定理与塑性变分原理    | 179 |
| § 7.1 有间断场的虚功率原理         | 179 |
| § 7.2 塑性极限载荷的上下限定理       | 182 |
| § 7.3 塑性极限载荷上下限定理的应用     | 184 |
| § 7.4 全量理论的塑性变分原理        | 194 |
| § 7.5 塑性全量理论变分原理的应用      | 200 |
| § 7.6 增量理论的最小余能原理和最小势能原理 | 204 |
| § 7.7 解的唯一性问题            | 212 |
| 习题                       | 213 |
| 第八章 塑性力学问题中的有限单元方法       | 250 |
| § 8.1 三维线弹性问题中有限单元方法的概述  | 217 |
| § 8.2 弹塑性全量理论的有限单元解法     | 220 |
| § 8.3 非线性矩阵方程的求解方法       | 225 |
| § 8.4 全量理论有限单元解法的简单例子    | 231 |
| § 8.5 弹塑性增量理论的有限单元法      | 237 |
| § 8.6 增量理论有限单元解法的简单例子    | 243 |
| 参考文献                     | 249 |
| 习题解答                     | 250 |

# 第一章 简单应力状态下的 弹塑性力学问题

## § 1.1 引 言

塑性力学是相对弹性力学来说的。弹性物体在引起变形的外力移去以后恢复原状。当外力超过一定限度后，在移去外力时，物体内部的变形将不恢复。我们称这种保留下来的永久变形为塑性变形。因此，塑性和弹性的主要区别在于变形是否恢复。另外，在习惯上又把塑性和脆性也作为一对概念来讲，它们的区别在物体经受变形而破坏时的变形大小，若变形很小就破坏，称为脆性；能够经受很大变形才破坏的称为韧性或延性，也有称之为塑性变形能力强的。脆性则是塑性变形能力差的。脆性物体可以近似用弹性理论分析直至破坏。韧性物体在开始出现永久变形到最终破坏之间还有很大一段能承受载荷的能力，为发挥材料的潜力，应该应用塑性力学的分析。

我们研究塑性力学的一个目的是为了在设计时允许结构物内部有些地方超过弹性极限，以充分发挥材料的强度潜力。例如，在物体内部故意让它发生一些塑性变形产生一个有利的预应力分布，这样可以使物体的承载能力提高很多。其次，物体内部常常不可避免地发生一些塑性变形，因此，还需要探讨它是否对承载能力有妨碍。另一方面，在加工成形工艺中，我们是利用材料的塑性性质使它成为各种形状的。这时如何使物体内部的变形均匀一些，在变形过程中不致于破坏；如何使用最小的力和消耗最少能量来达到加工的要求，这些也是我们研究塑性力学的一个重要方面。

塑性力学是连续介质力学的一支，使用的是连续介质力学方



法。我们已在弹性力学中看到,应力平衡(运动)方程和应变位移的几何关系是和材料性质无关的。弹塑性的差别主要在应力与应变之间的物理关系(现在一般称之为本构关系)上。这是塑性力学研究的重点,当然随之而来在处理方法上也会带来许多不同。

另外,有一部分人从塑性微观变形机理的角度来研究塑性问题,他们研究塑性变形的微观过程,和变形后留下来的微观痕迹。例如,金属学工作者借此研究如何改变材料的塑性性能;岩石学工作者研究如何从岩石的变形遗迹恢复岩石曾经历过的应力作用。塑性力学的近代研究走向和微观变形机理结合起来探讨塑性变形规律的方向,在这个简短的引论性课程中我们将不讨论那些问题。在这里我们将先从简单应力状态入手,着重建立有关的物理概念,突出塑性力学的特点,为今后进一步学习时打下一个基础。

## § 1.2 材料在简单拉压时的实验结果

为了寻求材料的塑性规律,最简单的实验是材料的拉压实验。我们先考虑通常在室温情形下进行的材料实验。试件如图 1 所示,在中间有一段等截面柱体,其面积为  $A_0$ , 试验要保证这部

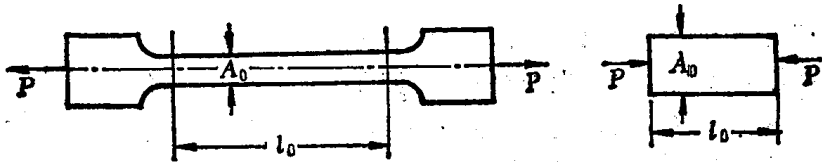


图 1

分的应力是均匀的。在载荷  $P$  作用下,习惯上以  $P/A_0$  表示这里的应力。在这一段中,变形也是均匀的,通常以  $e = (l - l_0)/l_0$  为应变,其中  $l$  为变形后的长度。材料的拉伸实验曲线有图 2 所示的两种形态。

当应力与应变从零的初始状态开始时，有一直线阶段，在到达比例极限以后，曲线开始向下弯曲，直到弹性极限。在弹性极限以前，如果卸除载荷，应力降到零，应变也随原有曲线降到

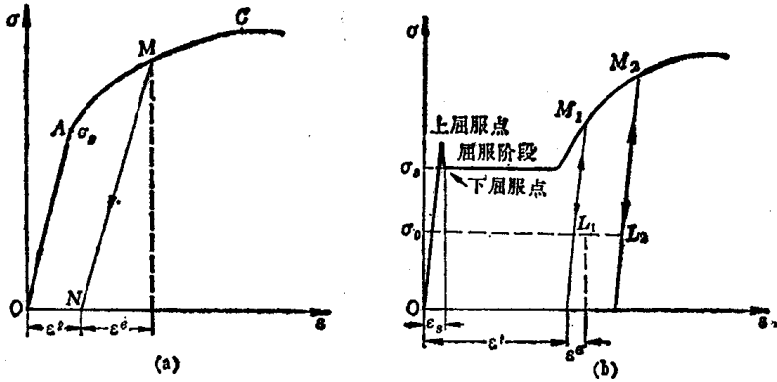


图 2

零。在超过弹性极限以后，则当应力降为零时，还保留一部分塑性应变  $\epsilon'$ 。产生和不产生塑性应变的分界应力就是弹性极限  $\sigma_s$ 。我们注意在弹性极限之前应力与应变之间也可能是曲线（非线性）的关系。这里是说塑性的应力-应变关系必然是非线性的，而非线性应力-应变关系并不一定都是塑性的。在图2(b)的情形，在弹性极限以后有一个屈服阶段，那是指应力保持不变而应变可有很大的增长。以  $\epsilon_s$  为对应于弹性极限的应变，则屈服阶段的应变可大到10—15 $\epsilon_s$ 。由于一般材料比例极限、弹性极限、屈服应力相差不大，通常在工程上不加区分，我们以后用  $\sigma_s$  表示之，并且常称之为屈服应力。

于是在屈服应力之前，应力-应变服从虎克定律：

$$\sigma < \sigma_s, \quad \sigma = E\epsilon \quad (1)$$

在屈服应力以后，视材料不同可用一函数表示之：

$$\sigma \geq \sigma_s, \quad \sigma = \phi(\epsilon) = H(\epsilon')$$

其中  $\varepsilon = \varepsilon' + \varepsilon''$ ,  $\varepsilon'$  是在卸载时能够恢复的那一部分应变。实验又表明, 在  $\varepsilon$  不太大时卸载, 应力-应变的变化基本上服从虎克定律, 斜率与初始的相同 (对于岩石类材料斜率随塑性应变的大小而变, 这里暂不考虑), 如图2所示。

以上(2)式是表示应力在不断增长时的应力-应变关系, 若在这一阶段从  $(\sigma^*, \varepsilon^*)$  状态卸载, 应力-应变关系应写成

$$\sigma^* - \sigma = E(\varepsilon^* - \varepsilon) \quad \text{或} \quad d\sigma = E d\varepsilon \quad (3)$$

应力和应变在加载和卸载的情形服从两个不同的规律, 这是塑性阶段的最重要的特点, 由它引出许多复杂的问题。我们需要有一个判别材料是加载还是卸载的准则, 称之为加载准则, 在简单应力状态下, 它可写成

$$\left. \begin{array}{l} \sigma d\sigma \geq 0 \quad \text{加载} \\ \sigma d\sigma < 0 \quad \text{卸载} \end{array} \right\} \quad (4)$$

上式也适用于压缩情形 ( $\sigma < 0$ )。对于一般金属材料常可设压缩时的应力-应变曲线与拉伸的相同, 只是改变符号。要完整地表达塑性阶段的应力-应变关系需要将(2), (3), (4)联合起来表示。

在屈服应力以后, 应力-应变曲线继续上升。若从卸载点  $N$  重新加载, 开始时应力-应变仍服从虎克定律直到点  $M(\sigma^*, \varepsilon^*)$ , 然后才会发生新的塑性变形, 重新进入塑性阶段, 这好像是把初始屈服应力  $\sigma_s$  提高到  $\sigma^*$ , 材料经过塑性应变得到强化, 因此, 这种现象又称应变强化(或应变硬化)。

由于加载和卸载规律不一样, 带给塑性力学一个重要的特点是: 应力和应变的多值关系。对于同一个  $\sigma$  值, 由于加载和卸载的过程不同, 可以对应于不同的  $\varepsilon$  值, 如图2(b)中的  $\sigma_0$  可对应于  $L_1, L_2, \dots$  处的  $\varepsilon$ 。同样地, 对应于同一个  $\varepsilon$  值也可以有许多  $\sigma$  值。不过, 如果知道加载的过程, 从初始的零状态开始, 一段一段的跟随着加载历史寻找到最终状态时的  $\sigma$ , 则  $\varepsilon$  还是一个定值。这些说明  $\sigma$  和  $\varepsilon$  之间的关系依赖于加载(或应变)路径

(path-dependent).

如果从  $\sigma^*, \varepsilon^*$  卸载到零应力后, 反过来施加压应力会出现什么现象呢? 对于单晶体所做的实验表明, 材料的压缩弹性极限也有相似的提高 (图 3 中点  $B''$ ), 然而对于一般材料都是多晶体的情形, 压缩弹性极限比原始时的  $-\sigma_s$  要减小, 例如图 3 中的点  $B'$ . 这种拉伸时强化影响到压缩时弱化的现象称为包兴格效应。

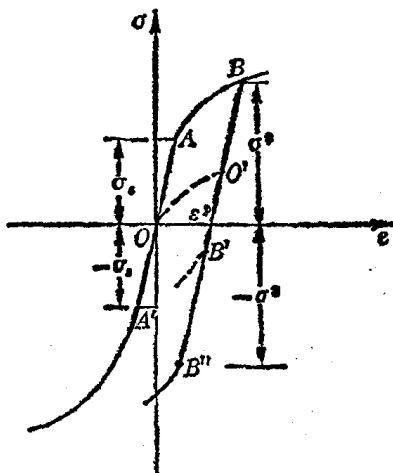


图 3

最后, 简单提一下其它因素对材料性质的影响:

- (1) 温度. 当温度超过一定数值后, 温度将使  $\sigma_s$  降低而塑性变形能力则将提高, 材料将产生蠕变现象, 即应力不变而应变不断随时间而增长的现象。通常的塑性力学将不考虑这种现象。以下将假设应力和应变只依赖于加载路径而不随时间的长短变化。
- (2) 静水压力. 在不太大的静水压力 (例如几倍  $\sigma_s$ ) 的作用下, 应力-应变曲线  $\sigma = \phi(\varepsilon)$  没有什么变化。另外, 若只有静水压力的作用, 材料体积有弹性变化而无塑性永久变化。
- (3) 变形速度. 如果实验的变形 (或加载) 速度比通常的实验速度快几个数量级, 将发现屈服应力提高了, 但塑性变形能力则降低了。对于一般加载速度的情形, 我们将不考虑这个影响, 在考虑撞击载荷或爆炸载荷的情形时则需加以考虑。

至于复杂应力状态下的试验, 同样需要创造均匀应力的区域, 测量均匀应变。随着加载 (变形) 路径的多样化, 试验就变得十分复杂。我们将在第三、四章再行介绍。

### § 1.3 应力-应变简化模型

一般情况下用 $\sigma = \phi(\varepsilon)$ 的关系解问题还是很复杂的。根据不同的具体问题，对不同材料在不同条件下可以作不同的简化，最常用的有以下一些简化模型。

1. 理想弹塑性模型(参考图 4)。对于软钢或强化率较低的材料，当应变不太大时可忽略强化，而假设如图 4 中实线所示情形。为简单起见，考虑从零应力开始，在历史上未曾卸过载荷的情形，则塑性规律可写成：

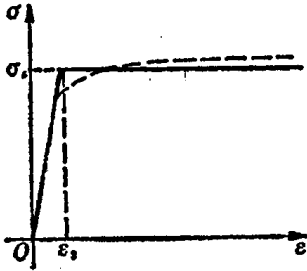


图 4

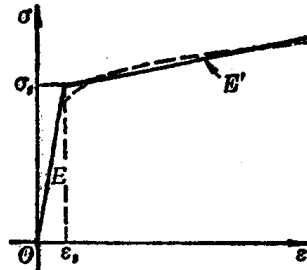


图 5

$$\left. \begin{array}{l} |\sigma| < \sigma_s, \quad \varepsilon = \sigma/E \\ |\sigma| = \sigma_s, \quad \text{而 } \sigma d\sigma \geq 0, \quad \varepsilon = \sigma/E + \lambda \text{sign } \sigma \text{ (加载)} \\ \quad \quad \quad \text{而 } \sigma d\sigma < 0, \quad d\varepsilon = d\sigma/E \quad \quad \quad \text{(卸载)} \end{array} \right\} (5)$$

其中 $\lambda$ 为一个大于或等于零的参数，而

$$\text{sign } \sigma = \begin{cases} 1, & \text{当 } \sigma > 0 \\ 0, & \text{当 } \sigma = 0 \\ -1, & \text{当 } \sigma < 0 \end{cases}$$

同样地，可用应变来表示加载准则，则可写成：

$$\left. \begin{array}{l} |\varepsilon| \leq \varepsilon_s, \quad \sigma = E\varepsilon \\ |\varepsilon| > \varepsilon_s, \quad \text{而 } \sigma d\varepsilon > 0, \quad \sigma = \sigma_s \text{sign } \varepsilon \text{ (加载)} \\ \quad \quad \quad \text{而 } \sigma d\varepsilon < 0, \quad d\varepsilon = d\sigma/E \quad \quad \quad \text{(卸载)} \end{array} \right\} (5a)$$

2. 线性强化弹塑性模型(参考图 5)。当材料有显著强化率

时可用两条直线代替原有曲线，塑性规律可写成：

$$\left. \begin{aligned} |\sigma| \leq \sigma_s, \quad \varepsilon = \sigma/E \\ |\sigma| > \sigma_s, \quad \begin{cases} \text{而 } \sigma d\sigma > 0, \quad \varepsilon = \frac{\sigma}{E} + (|\sigma| - \sigma_s) \left( \frac{1}{E'} - \frac{1}{E} \right) \text{sign } \sigma \\ \text{而 } \sigma d\sigma < 0, \quad d\varepsilon = d\sigma/E \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

或

$$\left. \begin{aligned} |\varepsilon| \leq \varepsilon_s, \quad \sigma = E\varepsilon \\ |\varepsilon| > \varepsilon_s, \quad \begin{cases} \text{而 } \sigma d\varepsilon > 0, \quad \sigma = [\sigma_s + E'(|\varepsilon| - \varepsilon_s)] \text{sign } \varepsilon \\ \text{而 } \sigma d\varepsilon < 0, \quad d\sigma = E d\varepsilon \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (6a)$$

3. 一般加载规律还可写成以下形式：

$$\sigma = \phi(\varepsilon) = E\varepsilon [1 - \omega(\varepsilon)] \quad (7)$$

其中

$$\omega(\varepsilon) = 0 \quad \text{当 } |\varepsilon| \leq \varepsilon_s$$

$$\omega(\varepsilon) = \frac{E\varepsilon - \phi(\varepsilon)}{E\varepsilon}, \quad \text{当 } |\varepsilon| > \varepsilon_s$$

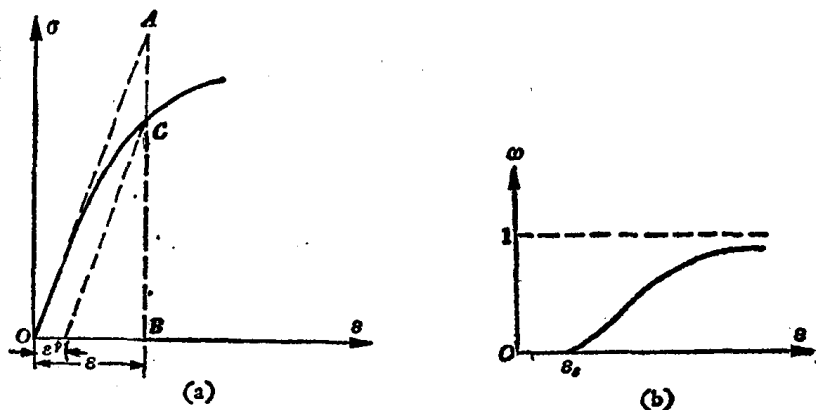


图 6

参考图 6,  $\omega(\varepsilon) = \overline{AC}/\overline{AB}$ 。这个表示法用于迭代法求解时很方

便。容易验证，对于线性强化弹性材料在加载时，当 $|\varepsilon| > \varepsilon_s$ ，

$$\omega(\varepsilon) = \left(1 - \frac{E'}{E}\right) \left(1 - \frac{\varepsilon_s}{\varepsilon} \text{sign } \varepsilon\right) \quad (7a)$$

4. 幂次强化模型，其加载规律写成：

$$\sigma = A |\varepsilon|^n \text{sign } \varepsilon \quad (8)$$

其中 $A > 0$ 为常数， $0 < n < 1$ 。这种模型在 $\varepsilon = 0$ 处，斜率为无穷大，近似性并不好，不过在数学处理上比较方便。

5. Ramberg-Osgood 模型，其加载规律可写成：

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} = \frac{\sigma}{\sigma_1} + \frac{3}{7} \left(\frac{\sigma}{\sigma_1}\right)^n \quad (9)$$

其中下标1相当于割线 $0.7E$ 的应力与应变。这个规律有三个参数能较好地代表真实材料，而在数学表达式上也还简单。

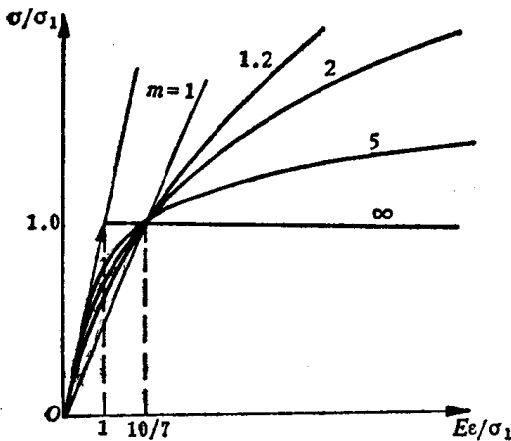


图 7

在总的应变较大的情形， $\varepsilon' \ll \varepsilon''$ 时，为简化计算还常常忽略弹性应变部分，则称为刚塑性模型。人们在寻求结构物的塑性极限载荷时常作这样的简化。

在应力改变符号并产生反方向屈服的情形，常采用的简化模型有以下两种：

1. 等向强化模型：认为拉伸时的强化屈服极限和压缩时的强化屈服极限总是相等的，其表达式为

$$|\sigma| = \psi \left( \int |d\varepsilon^p| \right) \quad (10)$$

参看图 3 中的  $BB''$ ，这里  $\int |d\varepsilon^p|$  表示塑性应变按绝对值进行累积，不论其为拉伸或压缩都使屈服极限提高。

2. 随动强化模型：认为弹性的范围不变，犹如图 3 中的  $BB'$  在塑性变形后将原点从  $O$  移到  $O'$ 。因此可写成

$$|\sigma - H(\varepsilon^p)| = \sigma_s \quad (11)$$

在线性强化的情形写成

$$|\sigma - c\varepsilon^p| = \sigma_s \quad (11a)$$

## § 1.4 轴向拉伸时的塑性失稳

在图 2 中我们看到在应力达到最高点  $C$  以前，要增加变形必须增大应力，这是通常称为稳定材料的情形。而在点  $C$  以后，增大变形时，应力反而下降。通常意义下这根杆是处于不稳定的情形，即所谓拉伸失稳。然而从截面上应力的情形看，实际上应力却并不一定下降，因为这时拉伸杆件出现颈缩，截面积减少了，使得杆承受的载荷减小了，而图 2 的纵坐标是载荷被初始截面积除的，未曾反映颈缩处截面积的变化。

现考虑用瞬时截面积  $A'$  来表示应力，即令

$$\tilde{\sigma} = P/A' \quad (12)$$

称为真应力。同时用杆的瞬时长  $l'$  来表示应变，则每一瞬时的应变增量为

$$d\varepsilon = dl/l'$$

从  $l_0$  开始变形所累积的应变应该是

$$\tilde{\varepsilon} = \int_{l_0}^{l'} d\varepsilon = \ln(l'/l_0) = \ln(1 + \varepsilon) \quad (13)$$



这个应变称为对数应变或自然应变。在考虑大变形的情形，用这样的应变表示式比较合理。例如将原长  $l_0$  的柱体压缩到长度趋近零的情形，则有  $\varepsilon \rightarrow -1$ ， $\tilde{\varepsilon} \rightarrow -\infty$ 。这里通常的应变  $\varepsilon$  并没有表现出这种变形的极端不合理性。

如果用  $\tilde{\sigma}-\tilde{\varepsilon}$  作图表示图 2 的曲线，将发现一般在试件断裂前并不出现失稳现象， $\tilde{\sigma}-\tilde{\varepsilon}$  曲线是单调上升的，与点 C 对应的点可以寻得如下：设材料是不可压缩的，则

$$A_0 l_0 = A' l'$$

$$\tilde{\sigma} = \frac{P}{A'} = \frac{P}{A_0} \frac{l'}{l_0} = \sigma e^{\tilde{\varepsilon}}$$

微分上式，可得

$$\frac{d\tilde{\sigma}}{d\tilde{\varepsilon}} = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{d\tilde{\varepsilon}} e^{\tilde{\varepsilon}} + \sigma e^{\tilde{\varepsilon}}$$

在  $\sigma-\varepsilon$  曲线上点 C 对应于  $d\sigma/d\varepsilon=0$ ，那么在  $\tilde{\sigma}-\tilde{\varepsilon}$  曲线上对应于斜率等于

$$\frac{d\tilde{\sigma}}{d\tilde{\varepsilon}} = \sigma e^{\tilde{\varepsilon}} = \tilde{\sigma}$$

的点。

以上说明点 C 是杆件在拉伸时失稳的分界点，而不是材料本身的失稳现象。然而材料本身也是有失稳现象的，图 2(b) 在屈服阶段开始时，从上屈服应力点突然下降到下屈服应力点就是这样一个现象。在研究地震机制时，人们也考虑如何代表岩石在某种条件下突然发生错动的失稳现象，称为应变弱化。

以下几节将举几个简单的例题说明这些模型的应用。

## § 1.5 理想弹塑性材料的简单桁架

考虑图 8 所示的三杆桁架受竖直力  $P$  作用。各杆截面积均为