HANSHU GOUZAOLUN DAOYIN HANSHU GOUZAOLUN DAOYIN

函数构造论导引

[美] J. 托德 著

上海科学技术出版社

函数构造论导引

〔美〕J. 托德 著

冯慈璞 译　　谢庭藩 校

上海科学技术出版社

INTRODUCTION TO THE CONSTRUCTIVE THEORY OF FUNCTIONS

by
JOHN TODD

函数构造论导引

〔美〕J.Todd 著
冯慈璜 译
谢庭藩 校

上海科学技术出版社出版
（上海瑞金二路450号）
新华书店上海发行所发行 丹阳人民印刷厂印刷
开本787×1092 1/32 印张4.25 字数91,000
1980年12月第1版 1983年10月第2次印刷
印数 7,301—13,700

书号：13119·880 定价：（科四）0.43 元

内 容 提 要

本书是函数构造论的一本入门读物。作者以其特有的风格，在不大的篇幅中介绍了这一学科的基本思想和重要结果，尤其重视它们在数值计算中的应用。而且叙述简明扼要，富有启发性。

全书共分九章：第一章代数与分析中的一些结论；第二章 Weierstrass 定理；第三章 Chebyshev 理论；第四章 Markoffs 定理；第五章正交多项式；第六章内插法与内插过程；第七章 Bernoulli 多项式；第八章函数空间；第九章近似求积。各章配有一定数量的习题，书末附有答案及提示。

原书系 I. S. N. M 丛书的一种，可供大学数学物理系学生、数学工作者和科技人员参考。

序　　言

这本小册子的目的在于三个不同方面：

(1) 向未来的数学工作者介绍古典分析中某些精致而通常又被忽视的内容，它们在初学阶段是可接受的．我们希望，这将有助于为他们提供一个数学的均衡观，特别要指出，在这个水平上，分析中是有着富有魅力的新思想的．

(2) 为数值分析的某些适度宣传提供一个园地．必须明确，本书并非数值分析中的主要教程，只不过相当于入门或趣味读物．书中也包含一些必要的数值例子，这是由于几乎没有几个科学家不为令人重视的数值逼近与计算过程的特有效力所吸引．然而我们要指出，这里经常用到的确切的、最佳的结果与近于现行运算水平的实际数值分析中的必要含糊是个鲜明的对照，尽管这些结果都是有其内在联系的．

(3) 以通畅的行文记录下经典正交多项式的一些基本公式与性质，这是大多数科学家经常需要的．

我们考虑本书的核心是第三章中所概述的 Chebyshev 理论．这一章及第五章关于正交多项式所用的某些思想，其有效准备乃是熟悉 Sturm 序列的理论．书中虽然没有直接运用这一理论，但是了解这方面的一些内容与其发展，将是有益的．

关于 Chebyshev 及 Legendre 多项式的基本公式，已经在或问题中阐述，而关于 Laguerre 及 Hermite 多项式的相结果，则录而不证．

在第六章的问题中，强调了 Aitken 内插算法——这是一个很有价值的工具. 在第七章中，我们认为 Euler-Maclaurin 求和公式以及应用它导出 Stirling 公式的内容是不可省略的. 第八章简要地介绍了泛函分析，从而可给出最佳 Chebyshev 逼近存在性的严格证明. 在第九章中，Gauss 求积思想是主要的. 我们作了相当努力，收集了大约一百个例子供读者练习. 很多解答已附在书末.

J. Todd

记号与缩写

$\in$	属于
$\Rightarrow$	蕴涵着
$\Leftarrow$	蕴涵于
$\equiv$	恒等于
$[\ \ ]$	闭区间
$(\ \ )$	开区间
$[\ \ ),\ (\ \ ]$	半开区间
F. C.	Fourier 系数
F. S.	Fourier 级数
(C.)N. O. S.	(完备)规范正交系
$\tilde{p}$	如果 p 是多项式 $p=k_nx^n+\cdots$，其中 $k_n\neq 0$，那末 $\tilde{p}=k_n^{-1}p=x^n+\cdots$ 是 p 乘 k_n^{-1} 后的多项式，它的首项系数为 1.
$(2n)!!=$	$2\times 4\times\cdots(2n-2)(2n)$
$(2n-1)!!=$	$1\times 3\times 5\cdots(2n-3)(2n-1)$
$[q]=$	实数 q 的整数部分
$\delta(m,n)=$	$\begin{cases}0, & 当\ m\neq n\\ 1, & 当\ m=n\end{cases}$ (Kronecker 符号)
$\pi_n(x),\ p_n(x)$	n 阶多项式
$O,\ o$	通常阶的记号
$\mathscr{I}$	闭区间 $[0,1]$
lub	最小上界
glb	最大下界
$a(h)a+nh$	$a,\ a+h,\ a+2h,\ \cdots,\ a+(n-1)h,\ a+nh$
$\mathscr{R}z$	复数 z 的实部
$\mathscr{I}z$	复数 z 的虚部
R_n	n 维欧氏空间

目 录

第一章　代数与分析中的一些结论

这里叙述一些以后需要的基本事实.

(1.1) *每个多项式都有一个零点.*

这是代数基本定理. 由此可推出如下的:

(1.2) *n次多项式至多有n个零点.*

(1.3) *n次多项式被它在$n+1$个不同点$x_0, x_1, \cdots, x_n$上的值所唯一确定.*

证明

(1) (Lagrange). 引进如下记号:

$$w_i(x)=\prod_{j\neq i}(x-x_j),\quad l_i(x)=\frac{w_i(x)}{w_i(x_i)},\quad i=0,\ 1,\ \cdots,\ n.$$

则 $w_i(x)$ 与 $l_i(x)$ 都是 n 次多项式, 并且 $l_i(x_i)=1$, $l_i(x_j)=0$, $i\neq j$. 因此

$$L_n(f,\ x)\equiv\sum_{i=0}^{n}f_il_i(x)$$

是一个在点 x_i 取值 f_i 的 n 次多项式. 由(1.2)推得, 这样的多项式是唯一的, 这个证明有着构造性的特点.

(2) (Vandermonde). 假设

$$p_n(x)\equiv a_0x^n+\cdots+a_{n-1}x+a_n.$$

那末, 含 $n+1$ 个未知数 $a_0, \cdots, a_n$ 的 $n+1$ 个线性方程的集

$$p_n(x_i)=f_i\quad(i=0,\ 1,\ \cdots,\ n)$$

有解: 方程组的系数行列式是 Vandermonde 型, 由于诸 x_i 互不相同, 所以它不为零. 这个证明实际上更象一个存在定理.

函数 $f(x)$ 的差分，当间隔为 h 时，定义如下：

$$\Delta f(x)=f(x+h)-f(x),$$
$$\Delta^{n+1}f(x)=\Delta(\Delta^n f(x)),\quad n\geqslant 1.$$

若有必要指明间隔 h，则可作为下标附加于 Δ. 我们称 $\Delta^n f(x)$ 为 $f(x)$ 的 n 阶（前）差分. 对任何 n，Δ^n 显然是一个线性算子：$\Delta^n(aA(x)+bB(x))=a\Delta^n A(x)+b\Delta^n B(x)$.

(1.4) *n 次多项式的 n 阶差分为常数，$n+1$ 阶差分为零. 这些差分可取在任一固定间隔 h 上.*

证明 用归纳法.

我们以实数系的一些性质为基础，在这些性质中，我们将用到如下定理.

(1.5) *囿于上（下）的实数集有最小上（最大下）界.*

(1.6) *有界的单调序列有极限.*

(1.7) (Bolzano-Weierstrass) *有界的无穷点集必有一极限点.*

(1.8) (Borel) *若一个有界闭区间能被一簇开区间所覆盖，则它能被一个有限的子簇所覆盖.*

下面需用一元实变函数连续性的概念：如果对任意给定的 $\varepsilon>0$，有 $\delta=\delta(\varepsilon, x_0)$，使得当 $|x-x_0|<\delta$ 时，$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$. 则说 $f(x)$ 在 x_0 处是连续的. 下面的结论是必需的.

(1.9) *在有界闭区间上连续的函数必在该区间上有界，并且在那里达到它的界.*

(1.10) (Bolzano) *如果 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号，那末在 a 与 b 之间有一点，而 $f(x)$ 在该点为零.*

(1.11) (Heine) *如果 $f(x)$ 在有界闭区间 $[a, b]$ 上是连续的，那末它在该区间上是一致连续的，意即对于任意给定的 $\varepsilon>0$，可以找到 $\delta=\delta(\varepsilon)$，使得当 $|x'-x''|<\delta$，$a\leqslant x'$，$x''\leqslant b$*

时，$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.

(1.12) (Rolle) 如果 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，$f(a)=0$，$f(b)=0$，并且 $f'(x)$ 在 (a, b) 内存在，那末在 (a, b) 内有一点 c，使 $f'(c)=0$.

下面要用到序列极限(或与它等价的无穷级数和)的概念：$\lim\limits_{n\to\infty} S_n=S$ 的意义是指：对于任一给定的 $\varepsilon>0$，存在 $n_0=n_0(\varepsilon)$，使得当 $n\geqslant n_0$ 时，$|S-S_n|<\varepsilon$.

设 $S_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$，

如果
$$\lim S_n=S,$$
则记
$$u_0+u_1+\cdots=\sum_{r=0}^{\infty}u_r=S.$$

我们要用到下述结果：

(1.13) 正项级数收敛的充要条件是它的部分和序列有界.

(1.14) (Leibniz) 若 $u_0\geqslant u_1\geqslant\cdots$，且 $u_n\to 0$，则交错级数
$$\sum_{0}^{\infty}(-1)^n u_n$$
收敛.

设收敛序列的项 $S_n(x)$ 是与参数 x 有关的. 如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$，可以找到与 x 无关的 $n_0=n_0(\varepsilon)$，使得当 $n>n_0$ 时，$|S(x)-S_n(x)|<\varepsilon$ 对于一切 x 都成立，则称这序列关于参数 x 是一致收敛的. 类似地，可定义级数 $\sum u_n(x)$ 的一致收敛. 为保证 $\sum u_n(x)$ 一致收敛，一个非常简单的充分条件是：

(1.15) (Weierstrass M-判别法) 如果存在收敛级数 $\sum M_n$，使对所有的 x，有
$$|u_n(x)|\leqslant M_n,\quad n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$$
成立，则 $\sum u_n(x)$ 一致收敛.

设级数 $\sum u_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛. 如果每一项都可

积，那就可以“逐项”积分，即对$[a, b]$上的x，有

$$(1.16)\quad \int_a^x \sum u_n(t)\,dt=\sum\int_a^x u_n(t)\,dt.$$

并且右边的级数在$[a, b]$上是一致收敛的. 如果每一项$u_n(x)$在x_0处连续，那末可以“逐项”求极限:

$$(1.17)\quad \lim_{x\to x_0}\sum u_n(x)=\sum\{\lim_{x\to x_0}u_n(x)\}.$$

下面要用到微分学的中值定理:

(1.18) 假定$f(x)$在$[a, b]$上连续，又设$f'(x)$在(a, b)内存在，则存在点$\zeta\ (a<\zeta<b)$，使得

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(\zeta).$$

而对于 Taylor 定理，在此给出它的一种形式:

(1.19) (Taylor) 若$f^{(n+1)}(x)$在$[a, x]$上连续，则

$$f(x)=f(a)+\frac{(x-a)}{1!}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+\cdots$$

$$+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+R_{n+1},$$

其中
$$R_{n+1}=\int_a^x\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,dt.$$

另外还需要积分学中值定理:

(1.20) (Dirichlet) 设$f(x)$和$w(x)$在$[a, b]$上连续，又设$w(x)\geqslant 0$, $a\leqslant x\leqslant b$，则有一点$\zeta\ (a\leqslant\zeta\leqslant b)$，使得

$$\int_a^b f(x)w(x)\,dx=f(\zeta)\int_a^b w(x)\,dx.$$

第一章问题

1.1 将级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+x+1)(n+x+2)}$$

的通项表示成部分分式，并据此求它的和以及 n 项之后的余项 $R_n(x)$. 对 $\varepsilon=0.05$, $x=10$, 1, 0.1, 0.01, 0.001, 0, 分别找出使 $|R_n(x)|<\varepsilon$ 成立的最小值 $n_0=n_0(x,\ \varepsilon)$.

1.2 (Stokes). 同问题 1.1, 但级数是

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x(x+2)n^2+x(4-x)n+1-x}{n(n+1)[(n-1)x+1](nx+1)}.$$

1.3 对于 $n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$ 设 $\varepsilon_n=2^{-n}$, 用 P_n 表示点 $(\varepsilon_n,\ 0)$; Q_{2n} 表示点 $(\varepsilon_{2n},\ \varepsilon_n)$.

设函数 $f(x)$ 在 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上的图形是由折线 $Q_0P_1Q_2P_3Q_4\cdots$ 及原点组成.

(1) 在 $0\leqslant x\leqslant 1$, $f(x)$ 是不是多边函数?

(2) 在 $0\leqslant x\leqslant 1$, $f(x)$ 是不是连续函数?

(3) 在 $0\leqslant x\leqslant 1$, $f(x)$ 是不是一致连续的?

(4, 5, 6) 同(1, 2, 3), 但区间为 $\varepsilon\leqslant x\leqslant 1$, 这里 $0<\varepsilon<1$. [不引用定理，而用一些基本的原则来检验你的答案. 在此多边函数应理解为这样的函数，它的图形由直线段 R_0R_1, R_1R_2, $\cdots$, $R_{n-1}R_n$ 组成，这里 R_r 是点 $(a_r,\ b_r)$, $r=0,\ 1,\ \cdots,\ n$.]

1.4 从一些基本原则证明: 多项式在任何有界区间上是一致连续的.

1.5 (De Rham). 用 $[y]$ 表示不超过 y 的最大整数，分别作出 $u_0=\phi(x)=\left|1-\left[x+\frac{1}{2}\right]\right|$, $u_1=\frac{1}{2}\phi(2x)$, $u_2=\frac{1}{4}\phi(4x)$, $u_3=2^{-3}\phi(2^3x)$ 的图形;

分别作 u_0+u_1, $u_0+u_1+u_2$, $u_0+u_1+u_2+u_3$ 的图形. 关于级数

$$\sum_{k=0}^{\infty}2^{-k}\phi(2^kx)$$

的性态，你能作些怎样的推测? 它是否收敛? 是否一致收敛? 如果它有和函数 $\Phi(x)$, 则 $\Phi(x)$ 是否连续? 是否可导?

证明 $\Phi(x)$ 满足函数方程

$$\Phi(x)-\frac{1}{2}\Phi(2x)=\phi(x).$$

1.6 设间隔 $h=1$, 证明

$$\Delta^n f(0)=f(n)-\binom{n}{1}f(n-1)+\binom{n}{2}f(n-2)+\cdots+(-1)^n f(0).$$

1.7 对于 $n=1, 2, \cdots$及 $\nu=1, 2, \cdots$, 计算 $\Delta^n\binom{x}{\mu}$.这里差分是关于 x 而言的, 间隔为 1. [对于任何 x 与任何整数 $\nu\geqslant 1$, 二项式系数 $\binom{x}{\nu}$定义为

$$\frac{x(x-1)\cdots(x-\nu+1)}{1\times 2\times\cdots\times\nu};$$

若 $\nu=0$, 则对任何 x, 二项式系数都定义为 1.]

1.8 (Newton). 证明: 对于 $\mu=0, 1, 2, \cdots, n$, 如果

$$a_\mu=\binom{\mu}{0}f(\mu)-\binom{\mu}{1}f(\mu-1)+\cdots+(-1)^\mu\binom{\mu}{\mu}f(0),$$

则
$$p_n(x)=a_0\binom{x}{0}+a_1\binom{x}{1}+\cdots+a_n\binom{x}{n}$$

是满足
$$p_n(\mu)=f(\mu)\quad(\mu=0, 1, 2, \cdots, n)$$

的 n 次多项式.

1.9 当 $f=1$, $f=x$, $f=x^2$, $f=x^3$ 时, 计算下式的值:

$$B_n(f, x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}f\left(\frac{k}{n}\right).$$

1.10 证明在 $B_n(f, x)$ 中, x^k 的系数是

$$\binom{n}{k}\Delta^k f(0),$$

这里差分的间隔 $h=n^{-1}$.

1.11 证明

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k q^{n-k}(k-np)=0,$$

其中 $p+q=1$.

1.12 证明

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k q^{n-k}(k-np)^2=npq,$$

其中 $p+q=1$.

[问题 1.11～12 的提示:把 p, q 看作自变量,将恒等式

$$\sum\binom{n}{k}p^kq^{n-k}=(p+q)^n$$

关于 p 求导.]

1.13 若

$$S_m(p)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^kq^{n-k}(k-np)^m,$$

试导出 $S_m(p)$ 的三项递推关系式. 利用它及前述两个结果计算 $S_3(p)$ 和 $S_4(p)$.

1.14 设 $R_n(x)$ 表示问题 1.1 中无穷级数的余项. 计算

$$M_n=\operatorname*{lub}_{0<x<\infty}|R_n(x)|.$$

1.15 对于问题 1.2 中的级数,解问题 1.14.

1.16 设对所有的 $x\in X$,级数 $\sum u_n(x)$ 收敛.试证明下述两个条件中的任意一个都是级数 $\sum u_n(x)$ 一致收敛的充要条件. 设 $R_n(x)$ 是这个级数 n 项之后的余项.

(1) 设 $m(\varepsilon, x)$ 是当 $n\geqslant m(\varepsilon, x)$ 时, 使得 $|R_n(x)|<\varepsilon$ 成立的最小整数.

条件(1): $\operatorname*{lub}_{x\in X} m(\varepsilon, x)$ 对所有 ε 是有限的.

(2) 设 $M_n=\operatorname*{lub}_{x\in X}|R_n(x)|$.

条件(2): M_n 是一个零序列.

1.17 计算 $\det W$, 其中 $W_{ij}=\omega^{ij}$, $i, j=1, 2, \cdots, n$. 而 ω 是 1 的 n 次本原复根.

1.18 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 互不相等, 且是多项式 $\pi_n(x)$ 的零点. 证明在 Lagrange 内插公式

$$L_n(f, x)=L_{\pi_n}(f, x)=\sum f_il_i(x)$$

中,有
$$l_i(x)=\pi_n(x)/[\pi_n'(x_i)(x-x_i)].$$

1.19 (Bernstein). 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续,且 $f(a)=0$, $f(b)=0$,则当 h 充分小时,差分

$$\Delta_hf(x)=f(x+h)-f(x)$$

在该区间内有一个零点.

1.20 具有 Lagrange 余项的 Taylor 定理是

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\cdots$$
$$+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x)+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x+\theta_n h).$$

试证明: 若 $f, f', \cdots, f^{(n+2)}$ 为连续且 $f^{(n+1)}(x)\neq 0$, 则当 $h\to 0$ 时,

$$\theta_n=\frac{1}{n+1}+\frac{nh}{2(n+1)^2(n+2)}\left\{\frac{f^{(n+2)}(x)}{f^{(n+1)}(x)}+o(1)\right\}.$$

第二章 Weierstrass 定理

(**2.1**) 如果 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，那末任意给定 $\varepsilon>0$，都有多项式 $p=p_\varepsilon(x)$ 满足

$$|f(x)-p(x)|\leqslant\varepsilon,\quad a\leqslant x\leqslant b.$$

这个定理是 Weierstrass 于 1885 年建立的．它的另一形式是：

(**2.2**) 如果 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，那末存在多项式级数 $\sum q_n(x)$，它在 $[a, b]$ 上一致收敛于 $f(x)$．

对于区间上的周期连续函数有类似的定理． 这时，可把区间取作 $[0, 2\pi]$．这种定理可以直接建立，也可以从说明它与上述结果等价而间接得到．与(2.1)类似的定理是：

(**2.3**) 若 $F(\theta)$ 是在 $(-\infty, \infty)$ 内连续的函数，它有周期 2π，则对任意给定的 $\varepsilon>0$，都有三角多项式 $T=T_\varepsilon$：

$$T(\theta)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{r=1}^{n}(a_r\cos r\theta+b_r\sin r\theta),$$

使得对于所有的 θ，有

$$|F(\theta)-T(\theta)|\leqslant\varepsilon.$$

这些定理有许多种证法．除去着重讨论 Bernstein(1912) 的证明外，我们先扼要地叙述 Lebesgue (1898) 与 Landau (1908) 的两个比较简单的证明．

证明(2.1)≡(2.2)是容易的．说明(2.3)≡(2.1)也是容易的．通过(2.3)证明(2.1)可参见 Apostol(1957)．

(**2.1**)的 **Lebesgue** 的证明．在此应注意到，由于一致连续性，可用一个多边函数任意接近地逼近 $f(x)$．这种多边函