郑崇友
樊 磊
崔宏斌
著

FRAME与连续格

首都师范大学出版社

Frame与连续格

郑崇友　樊　磊　崔宏斌　著

首都师范大学出版社

Zheng Chong-you

Fan Lei

Cui Hong-bin

Introduction to Frames and Continuous Lattices

Capital Normal University Press,

Beijing, China

(京)新208号

国家自然科学基金资助项目

The Project supported by the National Natural Science Foundation of China

Frame与连续格

著　　者　郑崇友　樊　磊　崔宏斌
出版发行　首都师范大学出版社
社　　址　北京西三环北路105号(邮政编码100037)
经　　销　全国新华书店
印　　刷　三河科教 印刷厂 印刷
开　　本　850×1168　1/32　印　数 0,001—1,000册
字　　数　200 千字　印　张　7.75
版　　本　1994年 6 月　第1版
　　　　　1994年 6 月　第1次印刷
书　　号　ISBN7-81039-114-3/G・101
定　　价　8.10　元

内容简介

本书系统地论述Frame理论(或Locale理论)与连续格理论的基本内容。全书共分四章，第1章是关于范畴理论的基本知识的介绍；第2章介绍偏序集与格，着重讨论偏序集上的伴随函子理论；第3章论述Locale理论的基本内容，以及Frame理论研究中的一些新结果；第4章论述连续格理论中的两个主要部分，即以连续偏序集的Lawson-Hoffmann理论为核心，采用极小集方法讨论连续偏序集与完全分配格之间的关系，以及通过集中连续格理论中的几个基本结果探讨连续格与Lawson交半格、Locale和T_0空间范畴之间的联系，等等。

本书适合作为高等学校数学系的本科生选修课与研究生的教材，也可供高等学校理工专业师生和研究工作者阅读参考。

前　言

自从F. Hausdorff在1914年引进开集(或邻域)作为研究抽象空间中连续性的基本概念之后，虽然拓扑空间就可视为是一种具有由某些开集构成的格结构的对象，但是拓扑与格论之间的联系引起人们的重视却是到了30年代末期M.H.Stone关于Boole代数与分配格的拓扑表示定理出现之后。Stone表示定理表明可以从纯代数的结构出发得到拓扑学中若干有趣的空间，并且运用格论的方法与技巧对这些空间的特性进行研究，从而得出关于拓扑学中带有普遍意义的结论。这种借助于代数学求得拓扑学自身发展的方法，常常是很有成效的。到了50年代，这一领域的研究成果已相当丰富。然而这时格论仍是作为一种工具出现的，它的最终目的还在于研究拓扑空间的本身.1957年，C.Ehresmann提出了一种新的观点[21]，他认为具有某种分配性的格（如完备Heyting代数）本身就有作为一种广义拓扑空间的研究价值，而不论它是否可以表示为某一拓扑空间的开集格。在这种新的观点的影响下使研究工作发生了根本变化，后来的研究工作表明这种融拓扑结构与序结构于一体的探讨是有其特色的。1982年出版的P. T. Johnstone的著作《Stone Spaces》是对这一领域的研究工作的系统而科学的总结[54].这样，经C.Ehresmann的倡导而发展起来的研究工作，称之为Frame理论，或Locale理论。它成为通常称为格上拓扑学的一个重要分支，又因为其研究方法一般不涉及点的概念，也称之为无点式拓扑学。连续格理论也是对某类格的研究。连续格概念是D. Scott于1971年

因理论计算机问题的需要而提出的[32]。在连续格文献中，这个提法是在 D. Scott 的一篇题为"Continuous Lattices"的论文中第一次出现的[114]。这篇论文的发表极大地推进了连续格理论的研究，大约在同一时期，K.H. Hofmann和 J. D. Lawson 等在紧拓扑半格，格与格序代数的谱理论等方面的深入工作，从不同的途径发展了连续格理论[32]，建立了它与数学的其它分支，尤其是与 Frame 理论的联系。鉴于连续格理论与计算机科学、代数学、分析学和拓扑学等学科的密切联系，因此引起了广泛的注意。近 20 多年来取得了一系列引人注目的重要研究成果，如文献[3，32，44，45，54，93]等。目前，连续格理论的研究正处于活跃时期，有大量的相关问题等待解决，如文献[32]中提出的问题，其中一部分问题至今仍未解决，以及J. D. Lawson 和M. Mislove 在文献[63]中从拓扑学和 Domain 理论的交叉角度提出了未解决的许多公开问题，等等。

前面提到的两部著作[32，54]都是出版于十年前的名著。近十年来，我国学者在 Frame(或Locale)理论与连续格理论的研究中也有许多出色工作，除了在文献[87](自然科学年鉴，1989年)中已作介绍外，还有[27，89，128，157，167，175]等。然而，迄今我国还没有一部介绍 Frame理论与连续格理论的著作。为了弥补这点不足，国内许多学者完全可以成为更权威的作者，但是他们无暇顾及于此，所以我们也就努力地编写了本书。它系统地论述了 Frame 理论和连续格理论的基本内容，其中也包含了我国学者近些年来在这些领域的一些研究成果。全书共分四章，第 1 章为范畴论，它作为一种理论对于数学的许多分支，以及它们之间联系的研究起着重要的作用，本章介绍范畴理论的基本知识；第 2 章为格论，这一章除了讲述偏序集与格的基本概念和相关知识外，着重讨论与本书主题相关联的偏序集上伴随函子理论；第 3 章为 Locale 与拓扑空间。本章论述 Locale 理论的基本知识，以及 Frame 理论研究中的若干新结果，特别是为

Locale理论对于L-fuzzy拓扑学的应用提供一些线索；第4章为连续格理论，这一章以连续偏序集的Lawson-Hoffmann 理论为核心，采用近些年来我国学者所强调的极小集方法讨论连续偏序集与完全分配格之间的关系，以及通过集中连续格理论中的几个基本结果探讨连续格与Lawson交半格、Locale和T_0空间范畴之间的联系，等等。应当指出，本书并不是一部已经完善的著作，在这些领域中的许多研究成果和新近进展都没有被介绍进来，其中一部分只是作为参考文献列举在书末。特别是本书所论述的理论有许多都正在发展之中，所以作者非常希望本书能起到抛砖引玉的作用，期望着在不久将来见到更好的著作出版。

本书写作过程中受到了四川大学副校长刘应明教授、陕西师范大学校长王国俊教授、国家教育委员会师范司司长金长泽教授、西安交通大学研究生院副院长张文修教授与徐州师范学院王戈平教授等的热情鼓励和大力支持；又首都师范大学出版社的同志们为本书的出版给予了热情的帮助和付出了辛勤的劳动，在此一并致以诚挚的谢意。

由于作者的学识和水平所限，书中错误与不当之处在所难免，恳请读者批评指正。

本书的写作得到了国家自然科学基金的资助，它的出版得到了首都师范大学校长出版基金的资助。

郑崇友

1994年1月于首都师范大学

目　　录

Contents

第1章 范 畴 论

范畴是从数学的各个领域中概括出来的一个高度抽象的数学系统．对其研究始于Eilenberg和MacLane在代数拓扑学中的工作，它是在1945年被正式提出的．这种理论提出之后就受到普遍重视而迅速发展起来，并且被引进到数学的许多分支中．范畴论作为一种理论，它对于数学的许多分支以及它们之间的联系起着重要作用．本章介绍范畴论中的基本概念和相关的基本知识，如范畴、函子、自然变换、泛态射、极限、伴随函子、范畴等价和Monad等概念，以及它们的基本性质．对于乘积、余积、等化子、余等化子、拉回与推出等概念，在本章中均作为极限或余极限概念的特例处理的．

§1.1 范 畴

(1.1.1) **定义** 一个范畴C由下列内容组成：

(i) 一个对象类 $ob(C)$，$ob(C)$的元称作C中对象，通常用A，B，…表示；

(ii) 对于C中对象的每个有序偶 (A, B) 对应一个集 $Hom_C(A, B)$，或简记$Hom(A, B)$．$Hom(A, B)$的元称作C中以A为定义域，以B为值域的态射．若 $f\in Hom(A, B)$，则记作 f：$A\to B$，或 $A\xrightarrow{f}B$；

(iii) 对于C中对象的每个有序三元组(A, B, C)对应一个称作合成(或复合)的映射

$$\begin{array}{ccc} Hom(A,B)\times Hom(B,C) & \to & Hom(A,C) \\ (f,g) & \longmapsto & gf, \end{array}$$

gf称作f 和 g 的合成(或复合)。

要求$\mathbf{C}$中对象与态射满足下列公理：

(Ⅰ)若$(A, B) \neq (C, D)$，则$Hom(A, B) \cap Hom(C, D) = \phi$；

(Ⅱ)若$f \in Hom(A, B)$，$g \in Hom(B, C)$和$h \in Hom(C, D)$，则$(hg)f = h(gf)$；

(Ⅲ)$\forall A \in ob(\mathbf{C})$，存在$id_A \in Hom(A, A)$使得$\forall f \in Hom(A, B)$与$\forall g \in Hom(C, A)$，有

$$fid_A = f \text{ 与 } id_A g = g,$$

id_A称作A上恒同态射.

若范畴$\mathbf{C}$中对象类$ob(\mathbf{C})$是集，则称范畴$\mathbf{C}$为小范畴。

(1.1.2) **命题** 若 A 是范畴$\mathbf{C}$中对象，则A上恒同态射是唯一的。

证明 设id_A，$id'_A \in Hom(A, A)$均是A上恒同态射，则由恒同态射的定义，有

$$id_A = id_A \ id'_A = id'_A.$$

这表明 A上恒同态射是唯一的。

(1.1.3) **例**

(i)$\mathbf{Set}$，集与映射的范畴.即$ob(\mathbf{Set})$是全体集构成的类，对于 X，$Y \in ob(\mathbf{Set})$，$Hom(X, Y)$ 是所有映射 $f: X \to Y$ 构成的集，并且$\mathbf{Set}$中态射的合成是映射的合成。

(ii)$\mathbf{Sp}$：拓扑空间与连续映射的范畴。

(iii)$\mathbf{Grp}$：群与同态的范畴。

(iv)$\mathbf{O}$：空范畴。

(v)设X是集，则存在一个范畴，其对象类是集X，并且仅有的态射是恒同态射. 称此范畴为离散(小)范畴. 该范畴可与集X等同看待。

(1.1.4) **定义** 设$\mathbf{C}$与$\mathbf{D}$都是范畴。若

(i)$ob(\mathbf{D})$是$ob(\mathbf{C})$的子类；

(ii)对于$\mathbf{D}$中任意对象A 和 B，有

$$Hom_D(A, B) \subsetneq Hom_C(A, B),$$

并且D中态射的合成以及每一对象上恒同态射都与C中相同，则称D是C的子范畴。

若范畴D是范畴C的子范畴，并且对于D中任意对象A和B有

$$Hom_D(A, B) = Hom_C(A, B),$$

则称D是C的满子范畴。

(1.1.5)例 集与单射(或满射或双射)的范畴是范畴Set的子范畴，但不是满子范畴。有限集与映射的范畴是范畴Set的满子范畴。

(1.1.6)定义 设C_1与C_2都是范畴,则存在一个范畴$C_1 \times C_2$，其对象类

$$ob(C_1 \times C_2) = ob(C_1) \times ob(C_2),$$

对于(A_1, A_2)，$(B_1, B_2) \in ob(C_1 \times C_2)$，规定

$$Hom_{C_1 \times C_2}((A_1, A_2), (B_1, B_2)) = Hom_{C_1}(A_1, B_1) \times Hom_{C_2}(A_2, B_2),$$

对于$(f_1, f_2) \in Hom_{C_1 \times C_2}((A_1, A_2), (B_1, B_2))$，$(g_1, g_2) \in Hom_{C_1 \times C_2}((B_1, B_2), (C_1, C_2))$，有

$$g_1 f_1 \in Hom_{C_1}(A_1, C_1),\quad g_2 f_2 \in Hom_{C_2}(A_2, C_2),$$

并且规定

$$(g_1, g_2)(f_1, f_2) = (g_1 f_1, g_2 f_2).$$

范畴$C_1 \times C_2$称作范畴C_1与范畴C_2的积范畴。

(1.1.7)定义 设C是范畴，则存在一个范畴C^{op}，其对象类$ob(C^{op}) = ob(C)$，态射集$Hom_{C^{op}}(A, B) = Hom_C(B, A)$，并且对于任意$f \in Hom_{C^{op}}(A, B)$和任意$g \in Hom_{C^{op}}(B, C)$，$f$与$g$在$C^{op}$中的合成等于$g$与$f$在$C$中的合成。范畴$C^{op}$称作范畴$C$的对偶范畴。

(1.1.8)注 对偶范畴的一个重要作用在于它提供了对偶原则。

设S是一个对任意范畴都有意义的陈述语，说明一个概念或提出一个命题等。对于任意范畴C，$S(C)$表示S关于C的陈述语，$S(C^{op})$是S关于C^{op}的陈述语。将$S(C^{op})$中C^{op}的对象与态射都换成C的对象与态射，就得到一个关于范畴C的陈述语$S^{op}(C)$，从而得到一个对任意范畴都有意义的陈述语S^{op}，称作S的对偶陈述语。

对偶原则是指，若对于任意范畴C，$S(C)$是真命题，则$S^{op}(C)$也是真命题。

(1.1.9) **定义** 设C是范畴，$A, B\in ob(C)$与$f\in Hom(A, B)$。若存在$g\in Hom(B, A)$使得

$$gf = id_A \text{ 和 } fg = id_B,$$

则称f为可逆态射，或同构态射，简称同构。此时称C中对象A与B是同构的，记作$A\cong B$。

若上述g存在，则易证它是唯一的。通常记作f^{-1}。

(1.1.10) **例** 范畴$\boldsymbol{Set}$中同构态射是双射。范畴$\boldsymbol{Sp}$中同构态射是拓扑空间的同胚映射。范畴$\boldsymbol{Grp}$中同构态射是群同构。

(1.1.11) **命题** 设C是范畴，则C中对象的同构关系是自反的，对称的与传递的。

证明 直接验证。

(1.1.12) **定义** 设C是范畴，$f\in Hom_C(A, B)$。

(i) 若对于C中每个对象C与任意态射$g_1, g_2\in Hom_C(C, A)$（或$Hom_C(B, C)$），

$$fg_1 = fg_2 \text{（或} g_1f = g_2f\text{）蕴涵 } g_1 = g_2,$$

则称f是单（或满）态射；

(ii) 若存在态射$h\in Hom_C(B, A)$使得

$$hf = id_A \text{（或 } fh = id_B\text{）},$$

则称f为可裂单（或可裂满）态射。

(1.1.13) **例** 范畴$\boldsymbol{Set}$中单（或满）态射是单（或满）映射。

(1.1.14) **命题** 设C是范畴，$f\in Hom_C(A, B)$与$g\in$

$Hom_C(B,C)$，则

（i）若 f 与 g 都是单（或满）态射，则 gf 是单（或满）态射；

（ii）若 gf 是单（或满）态射，则 f（或 g）是单（或满）态射；

（iii）可裂单（或可裂满）态射是单（或满）态射。

证明 由定义（1.1.12）直接验证。

（1.1.15）**注** 命题（1.1.14）中关于单态射和满态射的陈述语是互为对偶陈述语。因而根据对偶原则，只需证明单态射或满态射的情形。

（1.1.16）**定义** 设C是范畴，$A\in ob(C)$。若对于C中每个对象B，$Hom(A,B)$（或$Hom(B,A)$）是单元集，则称 A 为始（或终）对象。若A既是始对象又是终对象，则称A为零对象。

（1.1.17）**例** 在范畴Set中，空集ϕ是始对象但不是终对象，单元集是终对象但不是始对象。在范畴 Grp 中，平凡群是零对象。

（1.1.18）**命题** 设C是范畴。若C中对象A_1与A_2都是始（或终）对象，则$A_1\cong A_2$。

证明 若C中A_1与A_2都是始对象，则 $Hom(A_1,A_2)$与$Hom(A_2,A_1)$都是单元集。设

$$f\in Hom(A_1,A_2),\quad g\in Hom(A_2,A_1),$$

于是 $gf\in Hom(A_1,A_1)$。注意到 $id_{A_1}\in Hom(A_1,A_1)$与A_1是始对象，则有$gf=id_{A_1}$。同理，$fg=id_{A_2}$。综上所证，则知$A_1\cong A_2$。

对于A_1与 A_2 都是C中终对象的情形，则由对偶原则立即得到。

（1.1.19）**定义** 设C是范畴，$A\in ob(C)$。若对于C中任意态射$h\in Hom(A,\ C)$（或 $Hom(C,\ A)$）与 $g\in Hom(B,\ C)$（或 $Hom(C,B)$），并且g是满（或单）态射，存在一个态射h'：$A\to B$（或$B\to A$）使得图（1.1.1）（或（1.1.2））可交换，即

$$h=gh'\ (\text{或}h=h'g),$$

此处B和C都是C中任意对象，则称A为投射（或入射）对象。