

程 佩 青

数字滤波 与 快速傅里叶变换

清华大学出版社

73.412

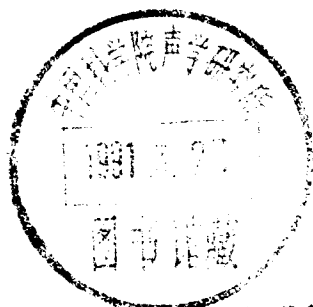
688

2

DG66/16

数字滤波与快速傅里叶变换

程 佩 青



清华大学出版社

1014011

内 容 简 介

本书系统地讨论了数字信号处理的基本理论和方法。前三章是离散时间信号与系统的基本理论,包括离散时间信号与系统、 z 变换及离散傅里叶变换,四、五、六章是数字滤波器的结构、理论和设计方法,第七章讨论了各种快速傅里叶变换算法,最后一章(第八章)讨论数字信号处理中的有限字长效应,它是误差分析的基础。

全书条理清楚,深入浅出,便于自学。

本书供大专院校无线电技术与信息系统,信号与系统,信号处理与图象处理等本科生作为教材,也可供在通信、雷达、遥感、声纳、生物医学、地震等有关领域从事信号处理的科技工作者参考。

数字滤波与快速傅里叶变换

程 佩 青

☆

清华大学出版社出版

北京 清华园

中国科学院印刷厂印刷

新华书店总店科技发行所发行

☆

开本: 787×1092 1/16 印张: 20.75 字数: 492千字

1990年10月第1版 1990年10月第1次印刷

印数: 0001~4000

ISBN 7-302-00641-5/TN·15

定价: 4.15元

前 言

数字信号处理是在 60 年代中期迅速发展起来的一门重要学科,它是采用计算机和专用处理设备,以数值计算的方法对信号进行分析、变换、滤波、检测、估计与识别等加工处理,以达到提取信息便于使用的目的。数字信号处理技术精确度高、使用灵活、可靠性高,在其功能上具有模拟设备所没有的许多优点,故它已广泛地应用于各个科学技术领域,例如语音、通信、雷达、声纳、遥感、图象、生物医学以及许多工程应用领域,对这些领域起了很大的推动作用,因而人们对它愈来愈加以重视。近年来新算法、新器件、新设备不断涌现,理论与技术上都更加成熟。

本书是作为数字信号处理的教材而编写的,侧重于数字信号处理的基本理论基础和基本的分析方法。

本书共有八章。第一章离散时间信号与系统,第二章 z 变换,这两章的部分内容在《信号与系统》中已有介绍,但是考虑到课程的系统性,因而这里有一定的重复,第三章离散傅里叶变换(DFT)。这三章是数字信号处理的基础部分,研究时域和频域的关联以及对它们的基本分析方法。第四、五、六章分别为数字滤波器的基本结构、无限长单位冲激响应(IIR)数字滤波器的设计方法、有限长单位冲激响应(FIR)数字滤波器的设计方法,这三章是离散时间线性移不变系统——数字滤波器设计的基础,数字滤波是数字信号处理的一个重要分支。第七章为快速傅里叶变换(FFT),它是数字信号处理的另一个主要分支——频谱分析的一种快速算法,是用得最广泛的一种线性变换工具。第八章为数字信号处理中有限字长效应,它是数字信号处理实际实现时误差与精度的分析基础,是非线性问题,但是又涉及到统计分析方面的内容,是较为深入的知识内容。

在使用本教材时,应以前七章为主,尤其要着重于前三章,第八章则可视学生情况来具体选择,或全部或部分或舍去不用。学习本书时一定要演算习题,有条件的话,应尽量安排上机练习,便于学生有较多的训练机会,能更好地掌握课程内容。

由于编者水平有限,不妥和错误之处,请读者批评指正。

编 者

1988.5

目 录

绪 论	1
第一章 离散时间信号与系统	5
1.1 离散时间信号——序列	5
1.2 线性移不变系统	14
1.3 常系数线性差分方程	20
1.4 连续时间信号的抽样	26
习题	33
第二章 z 变换	35
2.1 引言	35
2.2 z 变换的定义及收敛域	35
2.3 z 反变换	40
2.4 z 变换的基本性质和定理	49
2.5 z 变换与拉普拉斯变换、傅里叶变换的关系, 序列的傅里叶变换	59
2.6 傅里叶变换的一些对称性质	62
2.7 离散系统的系统函数, 系统的频率响应	64
习题	73
第三章 离散傅里叶变换	75
3.1 引言	75
3.2 傅里叶变换的几种可能形式	75
3.3 周期序列的离散傅里叶级数 (DFS)	79
3.4 离散傅里叶级数的性质	81
3.5 离散傅里叶变换 (DFT)——有限长序列的离散频域表示	83
3.6 离散傅里叶变换的性质	85
3.7 抽样 z 变换——频域抽样理论	97
3.8 利用 DFT 对连续时间信号的逼近	101
习题	104
第四章 数字滤波器的基本结构	107
4.1 数字滤波器结构的表示方法	107
4.2 无限长单位冲激响应 (IIR) 滤波器的基本结构	108
4.3 有限长单位冲激响应 (FIR) 滤波器的基本结构	113

习题	119
第五章 无限长单位冲激响应 (IIR) 数字滤波器的设计方法	121
5.1 引言	121
5.2 由模拟滤波器来设计 IIR 数字滤波器	124
5.3 冲激响应不变法	125
5.4 阶跃响应不变法	129
5.5 双线性变换法	132
*5.6 常用模拟低通滤波器特性	138
5.7 设计 IIR 滤波器的频率变换法	153
5.8 先利用模拟域频带变换法,再利用数字化法设计数字各型滤波器	154
5.9 先将模拟归一化低通原型数字化为数字低通,再利用数字域频带变换法设计数字各型滤波器	171
5.10 直接在数字域设计 IIR 数字滤波器	174
习题	183
第六章 有限长单位冲激响应 (FIR) 数字滤波器的设计方法	185
6.1 引言	185
6.2 线性相位 FIR 滤波器的特点	185
6.3 窗函数设计法	193
6.4 频率抽样设计法	203
6.5 IIR 与 FIR 数字滤波器的比较	212
习题	213
第七章 快速傅里叶变换 (FFT)	215
7.1 引言	215
7.2 直接计算 DFT 的问题及改进的途径	215
7.3 按时间抽取 (DIT) 的 FFT 算法(库利-图基算法)	217
7.4 按频率抽取 (DIF) 的 FFT 算法(桑德-图基算法)	228
7.5 离散傅里叶反变换 (IDFT) 的快速计算方法	233
7.6 N 为复合数的 FFT 算法——任意基算法	234
7.7 线性调频 z 变换 (Chirp z 变换)算法	241
7.8 线性卷积与线性相关的 FFT 算法	246
习题	252
第八章 数字信号处理中的有限字长效应	254
8.1 引言	254
8.2 二进制数的表示及其对量化的影响	254

8.3 A/D 变换的量化效应	265
8.4 数字滤波器的系数量化效应	270
8.5 数字滤波器运算中的有限字长效应	281
8.6 FFT 算法的有限字长效应	309
习题	320
参考文献	323

绪 论

一、数字信号处理的研究对象

数字信号处理是一个新的学科领域,它是把数字或符号表示的序列,通过计算机或专用处理设备,用数字的方式去处理这些序列,以达到更符合人们要求的信号形式。例如,对信号的滤波,提取和增强信号的有效分量,削弱无用的分量;或是估计信号的某些特征参数。总之,凡是用数字方式对信号进行滤波、变换、增强、压缩、估计、识别等都是数字信号处理的研究对象。

二、数字信号处理的学科概貌

数字信号处理的学科概貌可见图 I, 其中,离散线性移(时)不变(LSI)系统理论和离散傅里叶变换(DFT)是数字信号处理领域的理论基础。而数字滤波和数字频谱分析是数字信号处理的两个基本的学科分支。

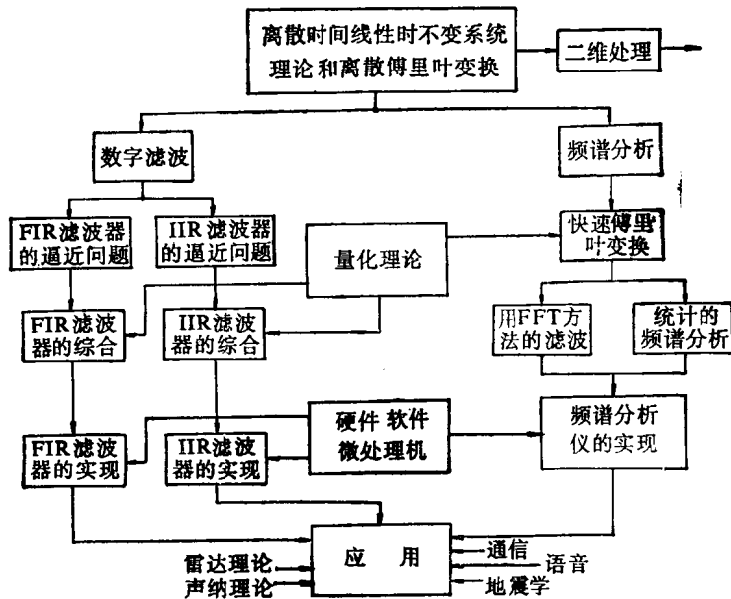


图 I 数字信号处理的学科概貌

数字滤波领域则分为无限长单位冲激响应(IIR)数字滤波器和有限长单位冲激响应(FIR)数字滤波器两部分内容。包括它们的数学逼近问题、综合问题(包括选择滤波器结构及选择运算字长)以及具体的硬件或计算机软件实现问题。

频谱分析包括两部分内容: (1) 确定信号的频谱分析, 这可采用离散傅里叶变换

(DFT) 法来进行分析,或者对于较复杂的情况,可采用线性调频 z 变换 (CZT)。(2) 随机信号的频谱分析,这就是统计的谱分析方法。实际谱分析技术中都要用到快速傅里叶变换 (FFT) 和一些快速卷积算法。FFT 且可用来实现 FIR 数字滤波运算,而统计频谱分析法又可用于研究数字信号处理系统的量化噪声效应。

二维和多维信号处理则是最新发展的领域。

三、数字信号处理系统的基本组成

我们先讨论模拟信号的数字化处理系统,此系统先把模拟信号变换为数字信号,然后用数字技术进行处理,最后再还原成模拟信号。这一系统的方框图见图 II 所示。图 III 表示了框图中的各有关信号波形,输入模拟信号 $x_a(t)$ (见图 III(a)) 先经过前置预滤波器,作用是将输入信号 $x_a(t)$ 中高于某一频率(称折叠频率,等于抽样频率的一半)的分量加以滤除,然后在模拟-数字变换器 (A/D 变换器) 中每隔 T 秒(抽样周期)取出一次 $x_a(t)$ 的幅度,抽样后的信号称为离散时间信号,它只表示一些离散时间点 $0, T, 2T, \dots, nT, \dots$ 上的信号值 $x_a(0), x_a(T), \dots, x_a(nT), \dots$, 如图 III(b) 所示,抽样过程即是对模拟信号的时间量化的过程。随之在 A/D 变换器的保持电路中将抽样信号进一步变换

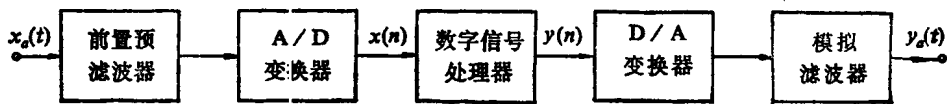


图 II 数字信号处理系统的简单方框图

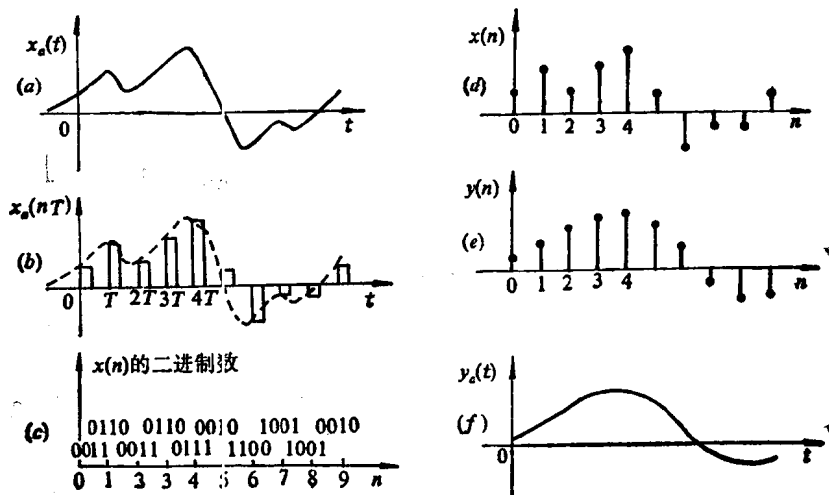


图 III 数字信号处理过程波形图

- (a) 输入模拟信号波形;
- (b) 抽样信号;
- (c) 数字码;
- (d) 量化后的输入信号序列;
- (e) 输出信号序列;
- (f) 输出模拟信号。

成数字信号,一般采用有限位二进制码,所以它所表示的信号幅度就是有一定限制的,例

如 4 位码, 只能表示 $2^4=16$ 种不同的信号幅度, 把这些幅度称为量化电平, 当离散时间信号幅度与量化电平不相同, 就要以最接近的一个量化电平来近似它。所以经 A/D 变换器后, 不但时间量化了, 而且幅度也量化了, 这种信号就被称为数字信号, 它是数的序列, 每个数则用有限个二进制数码来表示(如图 III(c) 所示), 我们用 $x(n)$ 来代表输入数字化后的序列, 自变量 n 是整型变量, 它表示这个数在序列中的次序, 为了形象起见, 用一个垂直线段来表示其数值大小, 如图 III(d) 所示。随后, 数字信号序列通过数字信号处理系统的核心部分, 即数字信号处理器, 按照预定的要求, 在处理器中将信号序列 $x(n)$ 进行加工处理, 得到输出数字信号 $y(n)$ (如图 III(e) 所示)。再后, $y(n)$ 通过数字-模拟 (D/A) 变换器, 将数字序列反过来变换成模拟信号, 这些信号在时间点 $0, T, 2T, \dots, nT, \dots$ 上的幅度应等于序列 $y(n)$ 中相应数码所代表的数值大小。最后还要通过一个模拟滤波器, 以滤除掉不需要的高频分量, 平滑成所需的模拟输出信号 $y_a(t)$, 如图 III(f) 所示。

图 II 讨论的是模拟信号数字处理系统, 实际的系统并不一定要包括它的所有框图, 例如有些系统只需数字输出, 可直接以数字形式显示或打印, 那么就不需要 D/A 变换器。另一些系统, 其输入就是数字量, 因而就不需要 A/D 变换器。对于纯数字系统, 则只需要数字信号处理器这一核心部分就行了。

四、数字信号处理的特点

数字信号处理系统具有以下一些明显的优点:

(1) 精度高。模拟网络的精度由元器件决定, 模拟元器件的精度很难达到 10^{-3} 以上, 而数字系统只要 14 位字长就可达到 10^{-4} 的精度。在高精度系统中, 有时只能采用数字系统。

(2) 灵活性高。数字系统的性能主要由乘法器的系数决定, 而系数是存放在系数存储器中的, 只需改变存储的系数, 就可得到不同的系统, 比改变模拟系统方便得多。

(3) 可靠性强。因为数字系统只有两个信号电平“0”、“1”, 因而受周围环境温度以及噪声的影响较小, 而模拟系统, 各元器件都有一定的温度系数, 且电平是连续变化的, 易受温度、噪声、电磁感应等的影响。如采用大规模集成电路, 可靠性就更高。

(4) 容易大规模集成。这是由于数字部件有高度规范性, 便于大规模集成、大规模生产, 对电路参数要求不严, 故产品成品率高。尤其是对于低频信号, 例如地震波分析, 需要过滤几赫兹到几十赫兹信号, 用模拟网络处理时, 电感器、电容器的数值、体积和重量都非常大, 性能亦不能达到要求, 而数字信号处理系统在这个频率处却非常优越。

(5) 时分复用。也就是利用数字信号处理器同时处理几个通道的信号, 它的框图见图 IV, 由于某一路信号的相邻两抽样值之间存在着很大的空隙时间, 因而可在同步器的控制下, 在此时间空隙中送入其他路的信号, 而各路信号则利用同一个信号处理器, 后者在同步器的控制下, 算完一路信号后, 再算另

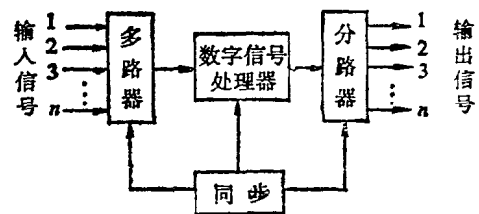


图 IV 时分多路复用数字信号处理系统

一路信号。因而处理器运算速度越高，能处理的信道数目也就越多。

(6) 可获得高性能指标。例如对信号进行频谱分析，模拟频谱仪在频率低端只能分析到 10Hz 以上频率，且难于做到高分辨率(足够窄的带宽)，但在数字的谱分析中，已能做到 10^{-3} Hz 的谱分析。又如有限长冲激响应数字滤波器，则可实现准确的线性相位特性，这在模拟系统中是很难达到的。

(7) 二维与多维处理。利用庞大的存储单元，可以存储一帧或数帧图象信号，实现二维甚至多维信号的处理，包括二维或多维滤波、二维及多维谱分析等。

数字信号处理系统也有其局限性，例如，数字系统的速度还不算高，A/D 变换器、硬件的速度也只在几十兆赫以下，故不能处理很高频率的信号。另外，系统较复杂，因而价格昂贵等也是其缺点。

由于数字信号处理的突出优点，因而在通信、语音、雷达、地震测报、声纳、遥感、生物医学、电视、仪器中得到愈来愈多的应用。

第一章 离散时间信号与系统

1.1 离散时间信号——序列

信号是传递信息的函数。例如交通红绿灯是信号,它传递的信息是红: 停止,绿: 通行。

按信号的特点不同,可表示成一个或几个独立变量的函数。例如图象信号就是空间位置(二元变量)的亮度函数。一维变量可以是时间,也可以是其他参量,一般习惯上将其看成时间。可以有以下几种信号:

连续时间信号: 在连续时间范围内定义的信号,但信号的幅值可以是连续数值,也可以是离散数值。当幅值为连续这一特定情况下又常称为模拟信号。实际上连续时间信号与模拟信号常常通用,用以说明同一信号。

离散时间信号: 时间为离散变量的信号,即独立变量时间被量化了。

数字信号: 时间和幅值都离散化的信号。

我们现在来讨论离散时间信号,它只在离散时间上给出函数值,故是时间上不连续的“序列”。一般,离散时间的间隔是均匀的,以 T 表示,故用 $x(nT)$ 表示此离散时间信号在 nT 点上的值, n 为整数。由于可将信号放于存储器中,供随时取用,加之可以“非实时”的处理,因而可以直接用 $x(n)$ 表示第 n 个离散时间点的序列值。而将序列表示成 $\{x(n)\}$ 。但为了方便,就将 $x(n)$ 表示序列。注意, $x(n)$ 只在 n 为整数时有意义, n 不是整数时没有定义,不能认为是零。

离散时间信号——序列,可以用图形来描述。如图 1-1 所示,横轴为 n ,虽为连续直线,但只在 n 为整数时才有意义。纵轴线段的长短代表各序列值的大小。

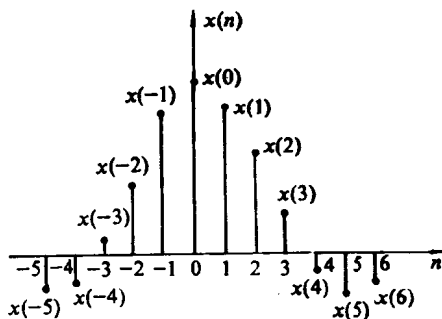


图 1-1 离散时间信号的图形表示

一、序列的运算

包括移位、翻褶、和、积、累加、差分、卷积和等。

1. 序列的移位

设某一序列为 $x(n)$, 当 m 为正时, 则 $x(n - m)$ 是指原序列 $x(n)$ 逐项依次延后(右移) m 位而给出的一个新序列, 而 $x(n + m)$ 则指依次超前(左移) m 位。

[例 1-1]

$$x(n) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n, & n \geq -1 \\ 0, & n < -1 \end{cases}$$

则

$$x(n+1) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}, & n+1 \geq -1 \\ 0, & n+1 < -1 \end{cases}$$

或

$$x(n+1) = \begin{cases} \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^n, & n \geq -2 \\ 0, & n < -2 \end{cases}$$

$x(n)$ 及 $x(n+1)$ 如图 1-2 所示。

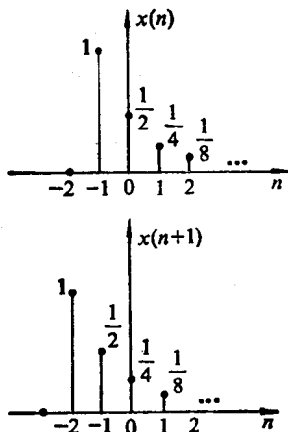


图 1-2 序列 $x(n)$ 及超前序列 $x(n+1)$

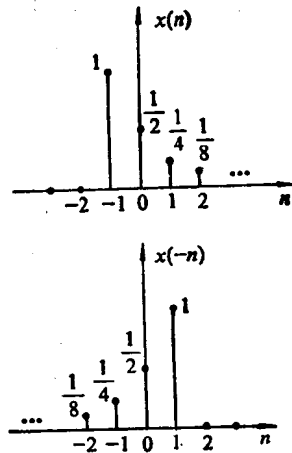


图 1-3 序列 $x(n)$ 及翻褶后的序列 $x(-n)$

2. 序列的翻褶

如果序列为 $x(n)$, 则 $x(-n)$ 是以 $n=0$ 的纵轴为对称轴将序列 $x(n)$ 加以翻褶。

【例 1-2】

$$x(n) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n, & n \geq -1 \\ 0, & n < -1 \end{cases}$$

翻褶的序列为

$$x(-n) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{-n}, & n \leq 1 \\ 0, & n > 1 \end{cases}$$

$x(n)$ 及 $x(-n)$ 如图 1-3 所示。

3. 和

两序列的和是指同序号 (n) 的序列值逐项对应相加而构成一个新的序列, 表示为

$$z(n) = x(n) + y(n)$$

[例 1-3]

$$x(n) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n, & n \geq -1 \\ 0, & n < -1 \end{cases}$$

$$y(n) = \begin{cases} 2^n, & n < 0 \\ n + 1, & n \geq 0 \end{cases}$$

则

$$x(n) + y(n) = \begin{cases} 2^n, & n < -1 \\ \frac{3}{2}, & n = -1 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n + n + 1, & n \geq 0 \end{cases}$$

$x(n)$ 、 $y(n)$ 及 $x(n) + y(n)$ 如图 1-4 所示。

4. 积

两序列相乘是指同序号 (n) 的序列值逐项对应相乘。

表示为

$$z(n) = x(n) \cdot y(n)$$

[例 1-4] 同上例中的 $x(n)$ 、 $y(n)$ ，则

$$x(n) \cdot y(n) = \begin{cases} 0, & n < -1 \\ \frac{1}{2}, & n = -1 \\ \frac{1}{2}(n+1) \left(\frac{1}{2}\right)^n, & n \geq 0 \end{cases}$$

5. 累加

设某序列为 $x(n)$ ，则 $x(n)$ 的累加序列 $y(n)$ 定义为

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^n x(k)$$

它表示 $y(n)$ 在某一个 n_0 上的值等于这一个 n_0 上的 $x(n_0)$ 值以及 n_0 以前的所有 n 值上的 $x(n)$ 值之和。

[例 1-5]

设

$$x(n) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n, & n \geq -1 \\ 0, & n < -1 \end{cases}$$

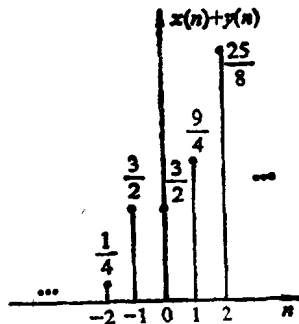
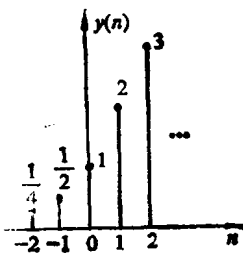
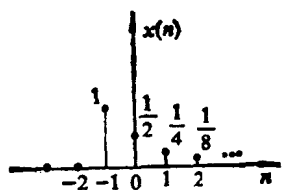


图 1-4 两序列相加

则

$$\begin{cases} y(n) = \sum_{k=-1}^n \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^k, & n \geq -1 \\ y(n) = 0, & n < -1 \end{cases}$$

因而

$$n = -1 \quad y(-1) = 1$$

$$n = 0 \quad y(0) = y(-1) + x(0) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$n = 1 \quad y(1) = y(0) + x(1) = \frac{3}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$$

$$n = 2 \quad y(2) = y(1) + x(2) = \frac{7}{4} + \frac{1}{8} = \frac{15}{8}$$

其他 $y(n)$ 值可依次类推。 $x(n)$ 及 $y(n)$ 如图 1-5 所示。

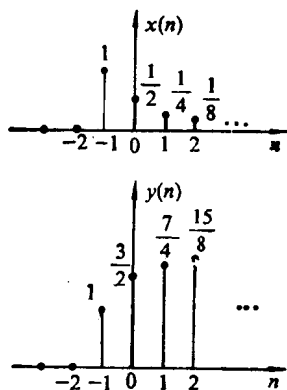


图 1-5 序列 $x(n)$ 及其累加序列 $y(n)$

6. 差分运算

$$\text{前向差分} \quad \Delta x(n) = x(n+1) - x(n)$$

$$\text{后向差分} \quad \nabla x(n) = x(n) - x(n-1)$$

由此得出

$$\nabla x(n) = \Delta x(n-1)$$

[例 1-6]

设

$$x(n) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n, & n \geq -1 \\ 0, & n < -1 \end{cases}$$

则

$$\Delta x(n) = x(n+1) - x(n)$$

$$\Delta x(n) = \begin{cases} 0, & n < -2 \\ 1, & n = -2 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n = -\frac{1}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^n, & n > -2 \end{cases}$$

而

$$\nabla x(n) = x(n) - x(n-1)$$

$$\nabla x(n) = \begin{cases} 0, & n < -1 \\ 1, & n = -1 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n, & n > -1 \end{cases}$$

$x(n)$ 、 $\Delta x(n)$ 及 $\nabla x(n)$ 如图 1-6 所示。

7. 卷积和

我们知道卷积积分是求连续线性时不变系统输出响应(零状态响应)的主要方法。同

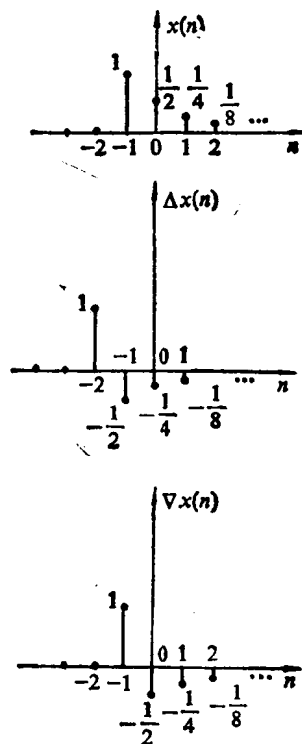


图 1-6 $x(n)$ 、前向差分 $\Delta x(n)$ 及后向差分 $\nabla x(n)$

样,对离散系统“卷积和”也是求线性时不变系统输出响应(零状态响应)的主要方法。这里我们来一般性地讨论卷积和的定义及运算方法。

设两序列为 $x(n)$ 、 $h(n)$,则 $x(n)$ 、 $h(n)$ 的卷积和定义为

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m) = x(n) * h(n) \quad (1-1)$$

其中,把卷积和用“*”来表示。卷积和的运算在图形表示上可分为四步:翻褶、移位、相乘、相加,如图 1-7 所示。

(1) 翻褶 先在哑变量坐标 m 上作出 $x(m)$ 和 $h(m)$,将 $h(m)$ 以 $m=0$ 的垂直轴为轴翻褶成 $h(-m)$ 。

(2) 移位 将 $h(-m)$ 移位 n ,即得 $h(n-m)$ 。当 n 为正整数时,右移 n 位。当 n 为负整数时,左移 n 位。

(3) 相乘 再将 $h(n-m)$ 和 $x(m)$ 的相同 m 值的对应点值相乘。

(4) 相加 把以上所有对应点的乘积叠加起来,即得 $y(n)$ 值。

依上法,取 $n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$ 各值,即可得全部 $y(n)$ 值。

一般求解时,可能要分成几个区间来分别加以考虑,可用下例来加以说明。

[例 1-7]

设

$$x(n) = \begin{cases} \frac{1}{2}n & 1 \leq n \leq 3 \\ 0, & \text{其他 } n \end{cases}$$

$$h(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 2 \\ 0, & \text{其他 } n \end{cases}$$

则

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{m=1}^3 x(m)h(n-m)$$

分段考虑如下:

(1) 当 $n < 1$ 时, $x(m)$ 和 $h(n-m)$ 相乘,处处为零,故

$$y(n) = 0, \quad n < 1$$

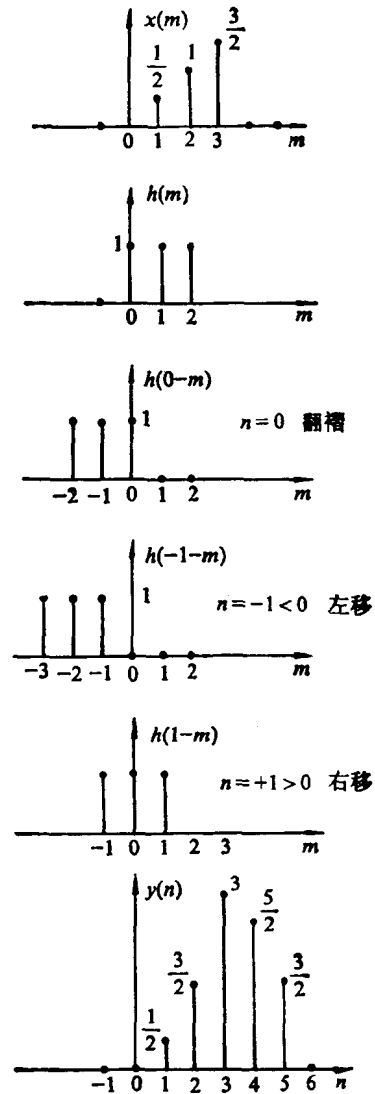


图 1-7 $x(n)$ 和 $h(n)$ 的卷积和图解

(2) 当 $1 \leq n \leq 2$ 时, $x(m)$ 和 $h(n-m)$ 有交迭相乘的非零项是从 $m=1$ 到 $m=n$, 故

$$y(n) = \sum_{m=1}^n x(m)h(n-m) = \sum_{m=1}^n \frac{1}{2} m = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} n(n+1)$$

也就是

$$y(1) = \frac{1}{2}, \quad y(2) = \frac{3}{2}.$$

(3) 当 $3 \leq n \leq 5$ 时, $x(m)$ 和 $h(n-m)$ 交迭而非零值的 m 范围的下限是变化的($n=3, 4, 5$ 分别对应 m 的下限为 $m=1, 2, 3$), 而 m 的上限是 3。

$$y(3) = \sum_{m=1}^3 x(m)h(3-m) = \sum_{m=1}^3 \frac{1}{2} m = \frac{1}{2}(1+2+3) = 3$$

$$y(4) = \sum_{m=2}^3 x(m)h(4-m) = \sum_{m=2}^3 \frac{1}{2} m = \frac{1}{2}(2+3) = \frac{5}{2}$$

$$y(5) = x(3)h(5-3) = \frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{3}{2}$$

当 $n \geq 6$ 时, $x(m)$ 和 $h(n-m)$ 没有非零的交迭部分, 故 $y(n) = 0$ 。

卷积和的图解表示可见图 1-7。

由式(1-1)看出卷积和与两序列的先后次序无关, 可证明如下:

令 $n-m=m'$ 代入(1-1)式, 然后再将 m' 换成 m , 即得

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)x(n-m)$$

因此

$$y(n) = x(n) * h(n) = h(n) * x(n)$$

二、几种常用序列

1. 单位抽样序列(单位冲激) $\delta(n)$

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases} \quad (1-2)$$

$\delta(n)$ 类似于连续时间信号与系统中的单位冲激函数 $\delta(t)$, 但是 $\delta(t)$ 是 $t=0$ 点脉宽趋于零, 幅值趋于无限大, 面积为 1 的信号, 是极限概念的信号, 或由分配函数来加以定义。而这里 $\delta(n)$ 在 $n=0$ 时取值为 1, 既简单又易计算。单位抽样序列如图 1-8 所示。

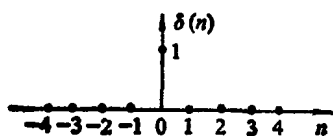


图 1-8 单位抽样序列

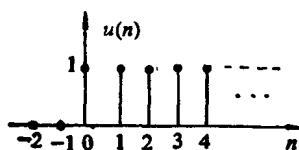


图 1-9 单位阶跃序列