

高等学校教材

# 结 构 力 学

(第三版)

下 册

李廉锟 主编

结构力学  
(第三版)  
下册  
李廉锟  
主编

7342  
L28  
(3)2

版社

高等教育出版社



0342

L28

(3)2

446393

高等学校教材

# 结构力学

(第三版)

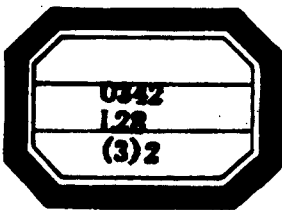
下册

李廉锟 主编



00446393

/ 5



高等教育出版社

(京) 112号

### 内 容 提 要

本书是在第二版(曾获1987年国家教委优秀教材二等奖)的基础上,根据国家教委审定的《结构力学课程教学基本要求》修订的。本书取材适宜,内容精炼,由浅入深,联系实际,并反映了本学科的新内容。

全书共十七章,分上下两册出版。上册包括绪论、平面体系的机动分析、静定梁与静定刚架、静定拱、静定平面桁架、影响线及其应用、结构位移计算、力法、力法应用、位移法、渐近法、矩阵位移法、平面刚架静力分析程序十三章;下册包括结构的极限荷载、结构弹性稳定、结构动力学、悬索计算四章。全书各章均附有复习思考题和习题,上、下册各附有自测题两组,便于学习。

本书可作为铁路工程、公路工程、桥梁与隧道等专业的教材,也可作土建、水利类专业教材,以及供有关工程技术人员参考。

责任编辑 余美茵

### 图书在版编目(CIP)数据

D208/10

结构力学 下册/李廉锟主编. - 3版. - 北京:高等教育出版社,1997(1999重印)

高等学校教材

ISBN 7-04-005305-5

I. 结… I. 李… III. 结构力学-高等学校-教材 N.O  
342

中国版本图书馆 CIP 数据核字(97)第 26047 号

---

出版发行 高等教育出版社

社 址 北京市东城区沙滩后街 55 号

邮政编码 100009

电 话 010-64054588

传 真 010-64014048

网 址 <http://www.hep.edu.cn>

经 销 新华书店北京发行所

印 刷 高等教育出版社印刷厂

开 本 787×1092 1/16

版 次 1979 年 5 月第 1 版

印 张 8.75

1996 年 5 月第 3 版

字 数 210 000

印 次 1999 年 6 月第 4 次印刷

定 价 9.00 元

---

凡购买高等教育出版社图书,如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请在所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

# 目 录

<b>第十四章 结构的极限荷载</b> .....	(1)	<b>第十六章 结构动力学</b> .....	(61)
§ 14-1 概述 .....	(1)	§ 16-1 概述 .....	(61)
§ 14-2 极限弯矩和塑性铰·破坏机构·静定梁的计算 .....	(2)	§ 16-2 结构振动的自由度 .....	(61)
§ 14-3 单跨超静定梁的极限荷载 .....	(4)	§ 16-3 单自由度结构的自由振动 .....	(63)
§ 14-4 比例加载时有关极限荷载的几个定理 .....	(6)	§ 16-4 单自由度结构在简谐荷载作用下的强迫振动 .....	(68)
§ 14-5 计算极限荷载的穷举法和试算法 .....	(7)	§ 16-5 单自由度结构在任意荷载作用下的强迫振动 .....	(73)
§ 14-6 连续梁的极限荷载 .....	(9)	§ 16-6 多自由度结构的自由振动 .....	(76)
§ 14-7 刚架的极限荷载 .....	(10)	§ 16-7 多自由度结构在简谐荷载作用下的强迫振动 .....	(87)
*§ 14-8 矩阵位移法求刚架极限荷载的概念 .....	(12)	§ 16-8 振型分解法 .....	(91)
复习思考题 .....	(13)	*§ 16-9 无限自由度结构的振动 .....	(95)
习题 .....	(13)	§ 16-10 计算频率的近似法 .....	(100)
<b>第十五章 结构弹性稳定</b> .....	(15)	复习思考题 .....	(105)
§ 15-1 概述 .....	(15)	习题 .....	(106)
§ 15-2 用静力法确定临界荷载 .....	(16)	<b>* 第十七章 悬索计算<sup>①</sup></b> .....	(111)
§ 15-3 具有弹性支座压杆的稳定 .....	(20)	§ 17-1 概述 .....	(111)
§ 15-4 用能量法确定临界荷载 .....	(24)	§ 17-2 集中荷载作用下的单根悬索计算 .....	(111)
§ 15-5 变截面压杆的稳定 .....	(31)	§ 17-3 分布荷载作用下的单根悬索计算 .....	(113)
§ 15-6 剪力对临界荷载的影响 .....	(35)	§ 17-4 悬索的变形协调方程及初态终态问题求解 .....	(118)
§ 15-7 组合压杆的稳定 .....	(37)	§ 17-5 悬索体系的计算 .....	(122)
*§ 15-8 弹性介质上压杆的稳定 .....	(40)	复习思考题 .....	(127)
*§ 15-9 圆环及拱的稳定 .....	(43)	习题 .....	(127)
§ 15-10 窄条梁的稳定 .....	(48)	<b>附录 下册自测题</b> .....	(129)
*§ 15-11 用矩阵位移法计算刚架的稳定 .....	(50)	<b>主要参考书目</b> .....	(133)
复习思考题 .....	(57)		
习题 .....	(57)		

## 第十四章 结构的极限荷载

### § 14-1 概 述

约自 19 世纪中叶开始,人们便在结构设计中采用容许应力法计算结构的强度,这种方法是把结构当作理想弹性体来分析,故又称为弹性分析方法。这种方法认为,结构的最大应力达到材料的极限应力  $\sigma_u$  时结构将会破坏,故其强度条件为

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma] = \frac{\sigma_u}{k}$$

式中  $\sigma_{\max}$  为结构的实际最大应力;  $[\sigma]$  为材料的容许应力;  $\sigma_u$  为材料的极限应力,对于脆性材料为其强度极限  $\sigma_b$ ,对于塑性材料则为其屈服极限  $\sigma_s$ ;  $k$  是安全系数。

容许应力法至今在工程中仍广泛应用。然而,由塑性材料制成的结构,尤其是超静定结构,当某一局部应力达到屈服极限时,结构并不破坏,还能承受更大的荷载而进入塑性阶段继续工作。可见,按容许应力法以个别截面的局部应力来衡量整个结构的承载能力是不够经济合理的,而且用以确定容许应力的安全系数  $k$  也不能反映整个结构的强度储备。因此,从本世纪三、四十年代以来,又建立和发展了按极限荷载计算结构强度的方法。这种方法不是以结构在弹性阶段的最大应力达到极限应力作为结构破坏的标志,而是以结构进入塑性阶段并最后丧失承载能力时的极限状态作为结构破坏的标志,故又称为塑性分析方法。结构在极限状态时所能承受的荷载称为极限荷载,而强度条件表示为

$$P \leq \frac{P_u}{K}$$

式中  $P$  为结构实际承受的荷载,  $P_u$  为极限荷载,  $K$  为安全系数。

显然,按极限荷载的方法设计结构将更为经济合理,而且安全系数  $K$  是从整个结构所能承受的荷载来考虑的,故能较正确地反映结构的强度储备。但须指出,按极限荷载计算结构的方法也有其局限性,这就是它只反映了结构的最后状态,而不能反映结构由弹性阶段到塑性阶段再到极限状态的过程,而且在给定安全系数  $K$  后,结构在实际荷载作用下处于什么工作状态也无法确定。事实上,结构在设计荷载作用下,大多仍处于弹性阶段,因此弹性分析对于研究结构的实际工作状态及其性能仍是很重要的。所以,在结构设计中,塑性计算与弹性计算是互相补充的。

在结构的塑性分析中,为了使所建立的理论比较简便实用,有必要对材料的力学性能即应力与应变的关系作某些合理的简化。通常采用图 14-1 所示的应力-应变图形,即认为应力达到屈服极限  $\sigma_s$  以前,材料是理想弹性的,应力与应变成正比;而应力达到  $\sigma_s$  后,材料转为理想塑性的,即应力保持不变,应变可以任意增长,如  $AB$  所示。同时认为材料受拉和受压时的性能相同。

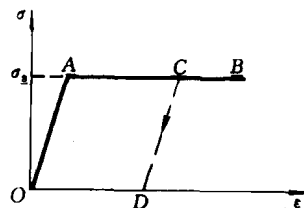


图 14-1

当材料到达塑性阶段的某点  $C$  时,如果卸载,则应力应变将沿着与  $OA$  平行的直线  $CD$  下降。应力减至零时,有残余应变  $OD$ 。也就是说,加载时,应力增加,材料是弹塑

性的，卸载时，应力减小，材料是弹性的。

符合上述应力与应变关系的材料，称为理想弹塑性材料。一般的建筑用钢具有相当长的屈服阶段，在实际的钢结构中，加载后其应变通常不致于超过这一阶段，故采用上述简化图形是适宜的。钢筋混凝土受弯构件，在混凝土受拉区出现裂缝后，拉力完全由钢筋承受，故也可以采用上述简化图形。

需要指出，在结构的塑性分析中，叠加原理不再适用，因此对于各种荷载组合都必须单独进行计算。在本章中，我们只考虑荷载一次加于结构，且各荷载按同一比例增加，即所谓比例加载的情况。

## § 14-2 极限弯矩和塑性铰·破坏机构·静定梁的计算

首先研究梁在弹、塑性阶段的工作情况，并由此说明几个基本概念。

设梁的横截面有一对称轴(图 14-2a)，并承受位于对称平面内的竖向荷载作用。当荷载增加时，梁将逐渐由弹性阶段过渡到塑性阶段。实验表明，无论在哪一阶段，都可以认为梁的横截面仍保持为平面。

当荷载较小时，梁完全处于弹性阶段，截面上的正应力都小于屈服极限  $\sigma_s$ ，并沿截面高度成直线分布(图 14-2b)。当荷载增加到一定值时，若暂不考虑剪应力影响，则最外边缘处正应力将首先达到屈服极限  $\sigma_s$ (图 14-2c)，相应于此时的弯矩称为屈服弯矩，以  $M_s$  表示，按照弹性阶段的应力计算公式可知

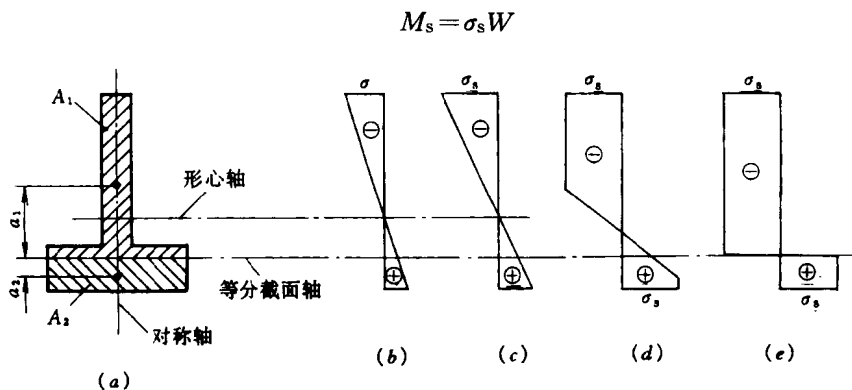


图 14-2

式中  $W$  为抗弯截面系数。

当荷载再增加时，该截面上由外向内将有更多的部分相继进入塑性流动阶段，它们的应力都保持  $\sigma_s$  的数值，但其余纤维仍处于弹性阶段(图 14-2d)。随着荷载的继续增加，塑性区域将由外向里逐渐扩展，最后扩展到全部截面，整个截面的应力都达到了屈服极限  $\sigma_s$ ，正应力分布图形成两个矩形(图 14-2e)。这时的弯矩达到了该截面所能承受的最大数值，称为该截面的极限弯矩，以  $M_u$  表示。此时，该截面的弯矩不能再增大，但弯曲变形则可任意增长，这就相当于在该截面处出现了一个铰，我们称此为塑性铰。塑性铰与普通铰有所区别：第一，普通铰不能承受弯矩，而塑性铰则承受着极限弯矩  $M_u$ ；第二，普通铰可以向两个方向自由转动，即为双向铰，而塑性铰是单向铰，只能沿着弯矩的方向转动，当弯矩减小时，材料则恢

复弹性，塑性铰即告消失。

截面的极限弯矩值可根据图 14-2e 所示的正应力分布图形确定。设受压和受拉部分截面面积分别为  $A_1$  和  $A_2$ ，由于梁受竖向荷载作用时轴力为零，故有

$$\sigma_s A_1 - \sigma_s A_2 = 0$$

因而

$$A_1 = A_2 = \frac{A}{2}$$

式中  $A$  为梁截面面积。这表明，此时截面上的受压和受拉部分的面积相等，亦即中性轴为等分截面轴。而截面上两个方向相反、大小相等均为  $\sigma_s \frac{A}{2}$  的力则组成为一力偶，也就是该截面的极限弯矩  $M_u$ ：

$$M_u = \sigma_s A_1 a_1 + \sigma_s A_2 a_2 = \sigma_s (S_1 + S_2)$$

式中  $a_1$  和  $a_2$  分别为面积  $A_1$  和  $A_2$  的形心到等分截面轴的距离， $S_1$  和  $S_2$  即为  $A_1$  和  $A_2$  对该轴的静矩。若令

$$W_s = S_1 + S_2 \quad (14-1)$$

称为塑性截面系数，即受压和受拉部分面积对等分截面轴的静矩之和，则极限弯矩可表为

$$M_u = \sigma_s W_s \quad (14-2)$$

当截面为  $bh$  的矩形时，有

$$W_s = S_1 + S_2 = 2 \frac{bh}{2} \frac{h}{4} = \frac{bh^2}{4}$$

故

$$M_u = \frac{bh^2}{4} \sigma_s$$

而相应的弹性截面系数和屈服弯矩分别为

$$W = \frac{bh^2}{6}, \quad M_s = \frac{bh^2}{6} \sigma_s$$

可见，这两种弯矩的比值为

$$\frac{M_u}{M_s} = 1.5$$

这表明，对于矩形截面梁来说，按塑性计算比按弹性计算可使截面的承载能力提高 50%。

一般说来，比值

$$\alpha = \frac{M_u}{M_s} = \frac{W_s}{W} \quad (14-3)$$

与截面形状有关，称为截面形状系数。对于几种常用截面， $\alpha$  值如下：

矩形  $\alpha = 1.5$

圆形  $\alpha = 1.70$

薄壁圆环形  $\alpha \approx 1.27 \sim 1.4$  (一般可取 1.3)

工字形  $\alpha \approx 1.1 \sim 1.2$  (一般可取 1.15)

以上推导梁的极限弯矩时，我们忽略了剪力的影响。由于剪力的存在，截面的极限弯矩值将会降低，但这种影响一般很小，可以忽略。

当结构出现若干塑性铰而成为几何可变或瞬变体系时，称为破坏机构，此时结构已丧失了承载能力，即达到了极限状态。

对于静定梁，出现一个塑性铰即成为破坏机构。对于等截面梁，塑性铰必定首先出现在

弯矩绝对值最大的截面即  $|M|_{\max}$  处。根据塑性铰处的弯矩值等于极限弯矩  $M_u$  和平衡条件，将很容易求得静定梁的极限荷载  $P_u$ 。

例如图 14-3a 所示等截面简支梁，跨中截面弯矩最大，该处出现塑性铰时，梁将成为破坏机构(图 14-3b，用黑小圆表示塑性铰)，同时该截面弯矩达到极限弯矩  $M_u$ 。根据平衡条件作出弯矩图(图 14-3c)，由

$$\frac{P_u l}{4} = M_u$$

便可求得极限荷载为

$$P_u = \frac{4M_u}{l}$$

对于变截面梁，塑性铰则首先出现在所受弯矩  $M$  与极限弯矩  $M_u$  之比绝对值最大的截面，即  $\left| \frac{M}{M_u} \right|_{\max}$  处，或者  $\left| \frac{M_u}{M} \right|_{\min}$  处。

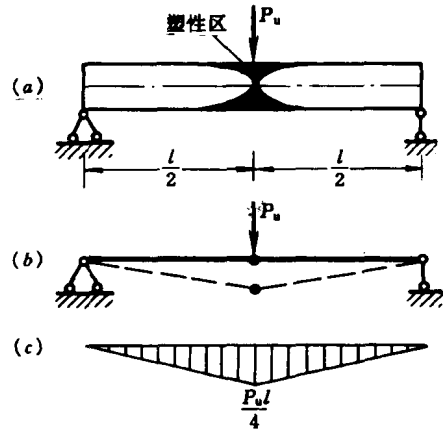


图 14-3

### § 14-3 单跨超静定梁的极限荷载

超静定梁由于具有多余联系，当出现一个塑性铰时，梁仍是几何不变的，并不会破坏，还能承受更大的荷载。只有当相继出现更多的塑性铰而使梁变成几何可变或瞬变体系，亦即成为破坏机构时，才会丧失承载能力。

例如图 14-4a 所示一端固定一端铰支的等截面梁，在跨中承受集中荷载作用。梁在弹性阶段的弯矩图可按解算超静定的方法求得如图 14-4b 所示，截面 A 的弯矩最大。当荷载增大到一定值时，A 端弯矩首先达到极限值  $M_u$  并出现塑性铰。此时梁成为在 A 端作用有已知弯矩  $M_u$  并在跨中承受荷载  $P$  的简支梁，因而问题已转化为静定的，其弯矩图根据平衡条件即可求出(图 14-4c)。但此时梁并未破坏，它仍是几何不变的，承载能力尚未达到极限值。若荷载继续增大，A 端弯矩将保持不变，最后跨中截面 C 的弯矩也达到极限值  $M_u$ ，从而在该截面也形成塑性铰。这样，梁就成为几何可变的机构，也就是达到了极限状态。此时的弯矩图按平衡条件可作出如图 14-4d 所示。由图可得

$$\frac{P_u l}{4} - \frac{M_u}{2} = M_u$$

故得 
$$P_u = \frac{6M_u}{l} \quad (14-4)$$

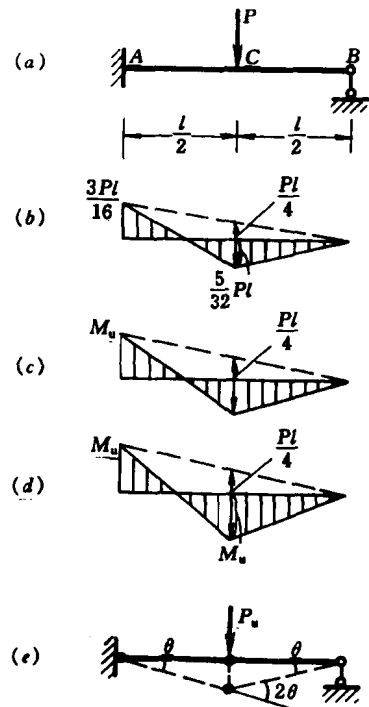


图 14-4



由以上讨论可以看出，极限荷载的计算实际上无需考虑弹塑性变形的发展过程，只要确定了结构最后的破坏机构的形式，便可由平衡条件求出极限荷载，此时问题已成为静定的。对于超静定梁，只需使破坏机构中各塑性铰处的弯矩都等于极限弯矩，并据此按静力平衡条件作出弯矩图，即可确定极限荷载。这种利用静力平衡条件确定极限荷载的方法称为静力法。

此外，计算极限荷载的问题既然是平衡问题，因此也可以利用虚功原理来求得极限荷载，这就是机动法。例如在图 14-4e 中，设机构沿荷载正方向产生任意微小的虚位移，由第七章式 (7-1)  $W=W_i$  即外力虚功等于变形虚功，可得

$$P_u \frac{l}{2} \theta = M_u \theta + M_u \times 2\theta$$

这里略去了微小的弹性变形，故在等式右边内力所作的变形虚功中只有各塑性铰处的极限弯矩在其相对转角上所作的功。由上式同样得到

$$P_u = \frac{6M_u}{l}$$

下面再举两个例子说明单跨超静定梁极限荷载的计算。

**例 14-1** 试求图 14-5a 所示两端固定的等截面梁的极限荷载。

**解：**此梁须出现三个塑性铰才能成为瞬变体系而进入极限状态。由于最大负弯矩发生在两固端截面 A、B 处，而最大正弯矩发生在截面 C 处，故塑性铰必定出现在此三个截面。用静力法求解时，作出极限状态的弯矩图如图 14-5b 所示，由平衡条件有

$$\frac{P_u ab}{l} = M_u + M_u$$

可得

$$P_u = \frac{2l}{ab} M_u$$

若用机动法求解，作出机构的虚位移图(图 14-5c)，有

$$P_u a \theta = M_u \theta + M_u \frac{l}{b} \theta + M_u \frac{a}{b} \theta$$

可得

$$P_u = \frac{2l}{ab} M_u$$

结果与静力法相同。

**例 14-2** 试求一端固定另一端铰支的等截面梁在均布荷载作用时(图 14-6a)的极限荷

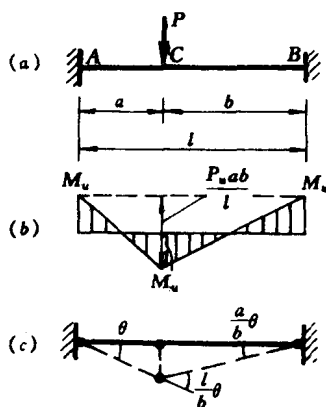


图 14-5

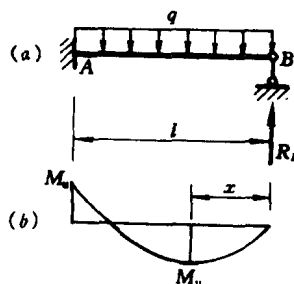


图 14-6

载  $q_u$ 。

**解：**此梁出现两个塑性铰即到达极限状态。一个塑性铰在最大负弯矩所在截面，即固定端  $A$  处；另一塑性铰在最大正弯矩即剪力为零处，此截面位置有待确定，设其至铰支端距离为  $x$  (图 14-6b)。现用静力法求解，由  $\Sigma M_A = 0$  有

$$R_B = \frac{q_u l}{2} - \frac{M_u}{l}$$

再由

$$Q_x = -R_B + q_u x = -\left(\frac{q_u l}{2} - \frac{M_u}{l}\right) + q_u x = 0$$

有

$$q_u = \frac{M_u}{l\left(\frac{l}{2} - x\right)} \quad (a)$$

而最大正弯矩之值亦等于  $M_u$ ，故有

$$\frac{q_u (2x)^2}{8} = M_u$$

将式(a)代入，化简后有

$$x^2 + 2lx - l^2 = 0$$

解得  $x = (\sqrt{2} - 1)l = 0.4142l$  (另一根为  $-(1 + \sqrt{2})l$ , 舍去)

代入式(a)求得

$$q_u = (6 + 4\sqrt{2}) \frac{M_u}{l^2} = \frac{11.66M_u}{l^2}$$

#### § 14-4 比例加载时有关极限荷载的几个定理

在前述确定极限荷载的算例中，结构和荷载都较简单，其破坏机构的形式较容易确定。当结构和荷载较复杂时，真正的破坏机构形式则较难确定，其极限荷载的计算可借助于本节所述比例加载时的几个定理。

比例加载是指作用于结构上的各个荷载增加时，始终保持它们之间原有的固定比例关系，且不出现卸载现象。此时所有荷载都包含一个公共参数  $P$ ，称为荷载参数，因此确定极限荷载实际上就是确定极限状态时的荷载参数  $P_u$ 。

由前述分析可知，结构处于极限状态时，应同时满足下述三个条件：

(1) 机构条件 在极限状态中，结构必须出现足够数目的塑性铰而成为机构(几何可变或瞬变体系)，可沿荷载作正功的方向发生单向运动。

(2) 内力局限条件 在极限状态中，任一截面的弯矩绝对值都不超过其极限弯矩，即  $|M| \leq M_u$ 。

(3) 平衡条件 在极限状态中，结构的整体或任一局部仍须维持平衡。

为了便于讨论，我们把满足机构条件和平衡条件的荷载(不一定满足内力局限条件)称为可破坏荷载，用  $P^+$  表示；而把满足内力局限条件和平衡条件的荷载(不一定满足机构条件)称为可接受荷载，用  $P^-$  表示。由于极限状态同时须满足上述三个条件，故可知极限荷载既是可破坏荷载，又是可接受荷载。

比例加载时有关极限荷载的几个定理是：

##### 1. 极小定理

极限荷载是所有可破坏荷载中的最小者。

## 2. 极大定理

极限荷载是所有可接受荷载中的最大者。

## 3. 唯一性定理

极限荷载值只有一个确定值。因此，若某荷载既是可破坏荷载，又是可接受荷载，则可断定该荷载即为极限荷载。

下面给出定理的证明。首先来证明可破坏荷载  $P^+$  恒不小于可接受荷载  $P^-$ ，即  $P^+ \geq P^-$ 。

取任一破坏机构，给以单向虚位移，由虚功方程有

$$P^+ \delta = \sum_{i=1}^n |M_{ui}| \cdot |\theta_i|$$

式中  $n$  为塑性铰的数目，因塑性铰是单向铰，极限弯矩  $M_{ui}$  与相对转角  $\theta_i$  恒同向，总是作正功，故可取二者绝对值相乘。又取任一可接受荷载  $P^-$ ，相应的弯矩用  $M^-$  表示，令结构产生与上述机构相同的虚位移，则有

$$P^- \delta = \sum_{i=1}^n M_i^- \theta_i$$

由内力局限条件可知

$$M_i^- \leq |M_{ui}|$$

故有

$$\sum_{i=1}^n M_i^- \theta_i \leq \sum_{i=1}^n |M_{ui}| \cdot |\theta_i|$$

从而

$$P^+ \geq P^-$$

得证。

再来证明上述三个定理：

(1) 极小定理 因  $P_u$  属于  $P^-$ ，故  $P_u \leq P^+$ 。得证。

(2) 极大定理 因  $P_u$  属于  $P^+$ ，故  $P_u \geq P^-$ 。得证。

(3) 唯一性定理 设有两个极限荷载  $P_{u1}$  和  $P_{u2}$ ，因  $P_{u1}$  为  $P^+$ ， $P_{u2}$  为  $P^-$ ，故有  $P_{u1} \geq P_{u2}$ ；又因  $P_{u1}$  亦为  $P^-$ ， $P_{u2}$  亦为  $P^+$ ，故又有  $P_{u1} \leq P_{u2}$ ，于是只有  $P_{u1} = P_{u2}$ 。得证。

## § 14-5 计算极限荷载的穷举法和试算法

当结构或荷载情况较复杂，难于确定极限状态的破坏机构形式时，根据上节的定理，可采用下述方法之一来求得极限荷载：

(1) 穷举法 也称机构法或机动法。列举所有可能的各种破坏机构，由平衡条件或虚功原理求出相应的荷载，取其中最小者即为极限荷载。

(2) 试算法 任选一种破坏机构，由平衡条件或虚功原理求出相应的荷载，并作出其弯矩图，若满足内力局限条件，则该荷载即为极限荷载；若不满足，则另选一机构再行试算，…，直至满足。

**例 14-3** 试求图 14-7a 所示变截面梁的极限荷载。

**解：**此梁出现两个塑性铰即成为破坏机构。除了最大负弯矩和最大正弯矩所在的截面 A、

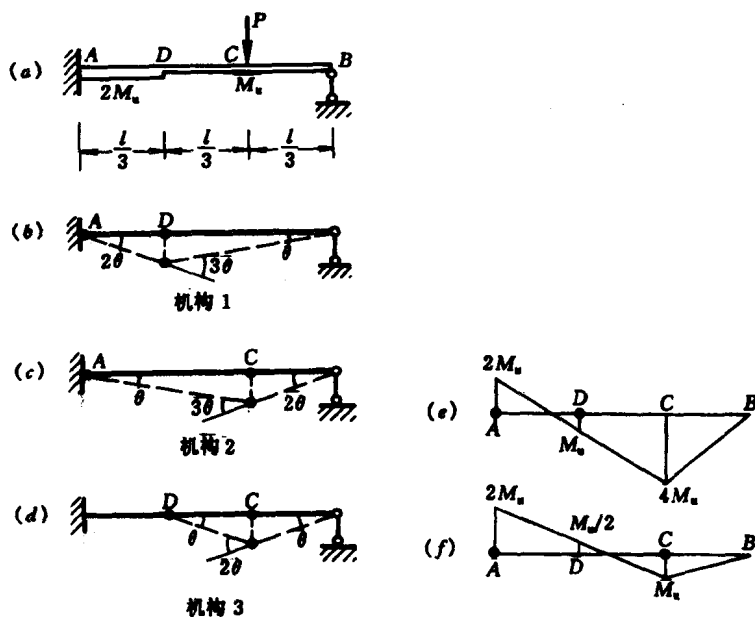


图 14-7

C 外，截面突变处 D 右侧也可能出现塑性铰。

(1) 用穷举法求解 共有 3 种可能的破坏机构：

机构 1：设 A、D 处出现塑性铰(图 14-7b)，由

$$P \frac{l}{3} \theta = 2M_u \times 2\theta + M_u \times 3\theta$$

得 
$$P = \frac{21M_u}{l}$$

机构 2：设 A、C 处出现塑性铰(图 14-7c)，由

$$P \frac{2l}{3} \theta = 2M_u \theta + M_u \times 3\theta$$

得 
$$P = \frac{7.5M_u}{l}$$

机构 3：设 D、C 处出现塑性铰(图 14-7d)，由

$$P \frac{l}{3} \theta = M_u \theta + M_u \times 2\theta$$

得 
$$P = \frac{9M_u}{l}$$

选最小值得

$$P_u = \frac{7.5M_u}{l}$$

即实际的破坏机构是机构 2。

(2) 用试算法求解 设首先选择机构 1(图 14-7b)，可求得其相应的荷载为  $P = \frac{21M_u}{l}$  (计

算同上)。然后由塑性铰  $A$  处的弯矩为  $2M_u$  (上边受拉),  $D$  (右侧) 处弯矩为  $M_u$  (下边受拉), 以及无荷区段弯矩图为直线, 铰  $B$  处弯矩为零, 便可绘出其弯矩图 (图 14-7e)。此时截面  $C$  的弯矩已达  $4M_u$ , 超过了其极限弯矩  $M_u$ , 故此机构不是极限状态。

现另选机构 2 试算 (图 14-7c)。先求得其相应的荷载 (计算同上) 为  $P = \frac{7.5M_u}{l}$ ; 然后同理可作出其弯矩图如图 14-7f 所示。可见所有截面的弯矩均未超过其极限弯矩值, 故此时的荷载为可接受荷载, 因而也就是极限荷载:

$$P_u = \frac{7.5M_u}{l}$$

## § 14-6 连续梁的极限荷载

连续梁 (图 14-8a) 可能由于某一跨出现三个塑性铰或铰支端跨出现两个塑性铰而成为破坏机构 (图 14-8b、c、d), 也可能由相邻各跨联合形成破坏机构 (图 14-8e)。可以证明, 当各跨分别为等截面梁, 所有荷载方向均相同 (通常向下) 时, 只可能出现某一跨单独破坏的机构。因为在这种情况下, 各跨的最大负弯矩只可能发生在两端支座截面处, 而在各跨联合机构中 (图 14-8e) 至少会有一跨在中部出现负弯矩的塑性铰, 因此这是不可能出现的。于是, 对于这种连续梁, 只需将各跨单独破坏时的荷载分别求出, 然后取其中最小者, 便是连续梁的极限荷载。

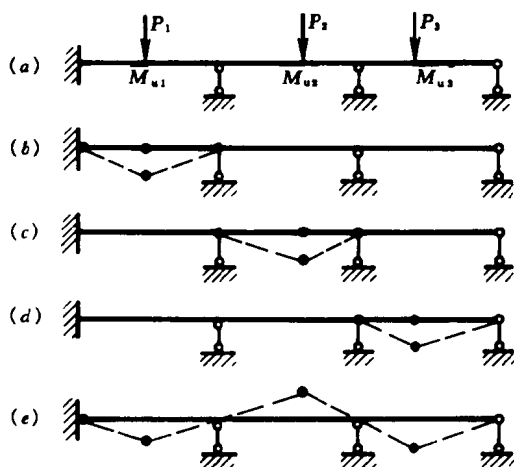


图 14-8

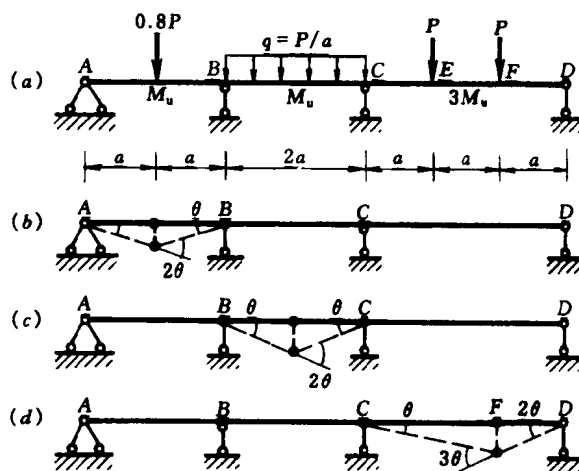


图 14-9

**例 14-4** 试求图 14-9a 所示连续梁的极限荷载。各跨分别为等截面的, 其极限弯矩已标于图上。

**解:** 第 1 跨机构 (图 14-9b):

$$0.8Pa\theta = M_u \times 2\theta + M_u\theta$$

$$P = 3.75M_u/a$$

第 2 跨机构 (图 14-9c): 由对称可知, 最大正弯矩的塑性铰出现在跨度中点。注意到均布荷载所作虚功等于其集度乘虚位移图的面积, 有

$$\frac{P}{a} \frac{2a}{2} a\theta = M_u\theta + M_u \times 2\theta + M_u\theta$$

$$P = 4M_u/a$$

第3跨机构(图14-9d):由弯矩图形状可知最大正弯矩在截面F处,故塑性铰出现在C、F两点。注意C支座处截面有突变,极限弯矩应取其两侧的较小值。故有

$$Pa\theta + P \times 2a\theta = M_u\theta + 3M_u \times 3\theta$$

$$P = 3.33M_u/a$$

比较以上结果,可知第3跨首先破坏,极限荷载为

$$P_u = 3.33M_u/a$$

### § 14-7 刚架的极限荷载

本节讨论刚架极限荷载的计算,所用方法仍是前面介绍的穷举法或试算法。

刚架一般同时承受弯矩、剪力和轴力,前已指出,剪力对极限弯矩的影响较小可略去;由于轴力的存在,极限弯矩的数值也将减小,这里亦暂不考虑其影响。

计算刚架的极限荷载时,首先要确定破坏机构可能的形式。例如图14-10a所示刚架,各杆分别为等截面杆,由弯矩图的形状可知,塑性铰只可能在A、B、C(下侧)、E(下侧)、D五个截面处出现。但此刚架为3次超静定,故只要出现4个塑性铰或在一直杆上出现3个塑性铰即成为破坏机构。因此,有多种可能的机构形式。用穷举法求解时,将各机构一一列举如下:

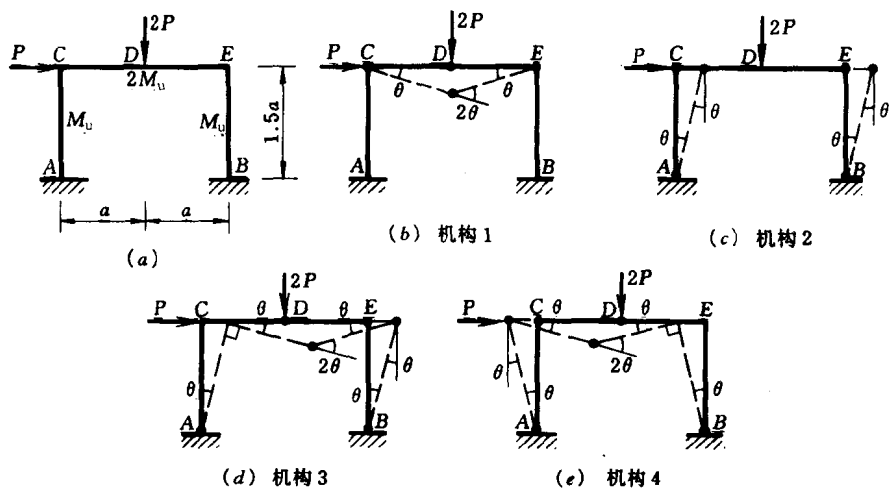


图 14-10

机构1(图14-10b):横梁上出现3个塑性铰而成为瞬变(其余部分仍几何不变),故又称“梁机构”。列出虚功方程为

$$2Pa\theta = M_u\theta + 2M_u \times 2\theta + M_u\theta$$

得

$$P = 3 \frac{M_u}{a}$$

机构2(图14-10c):4个塑性铰出现在A、C、E、B处,各杆仍为直线,整个刚架侧移,

故又称“侧移机构”。此时有

$$P \times 1.5a\theta = 4M_u\theta$$

$$P = 2.67 \frac{M_u}{a}$$

机构 3(图 14-10d): 塑性铰出现在 A、D、E、B 处, 横梁转折, 刚架亦侧移, 故又称“联合机构”。注意到此时刚结点 C 处两杆夹角仍保持直角, 又因位移微小, 故 C 和 E 点水平位移相等。据此即可确定虚位移图中的几何关系, 从而可得

$$P \times 1.5a\theta + 2Pa\theta = M_u\theta + 2M_u \times 2\theta + M_u \times 2\theta + M_u\theta$$

有

$$P = 2.29 \frac{M_u}{a}$$

机构 4(图 14-10e): 亦称“联合机构”。机构发生虚位移时设右柱向左转动, 则 D 点竖直位移向下使较大的荷载 2P 作正功。此时刚架向左侧移, 故 C 点之水平荷载 P 作负功。于是有

$$2Pa\theta - P \times 1.5a\theta = M_u\theta + M_u \times 2\theta + 2M_u \times 2\theta + M_u\theta$$

得

$$P = 16 \frac{M_u}{a}$$

若所得 P 为负值, 则只需将虚位移反方向即可。

经分析可知, 再无其他可能的机构, 因此由上述各 P 值中选取最小者为

$$P_u = 2.29 \frac{M_u}{a}$$

实际的破坏机构为机构 3。

下面再讨论用试算法求解。

设首先选择机构 2(图 14-10c), 求出其相应的荷载为  $P = 2.67M_u/a$ (计算同上)。然后作弯矩图, 两柱的 M 图可首先绘出; 横梁的 M 图用叠加法绘制(图 14-11a), 可知 D 点处弯矩为

$$M_D = \frac{M_u - M_u}{2} + \frac{2P \times 2a}{4} = 2.67M_u > 2M_u$$

可见不满足内力局限条件, 荷载是不可承受的。

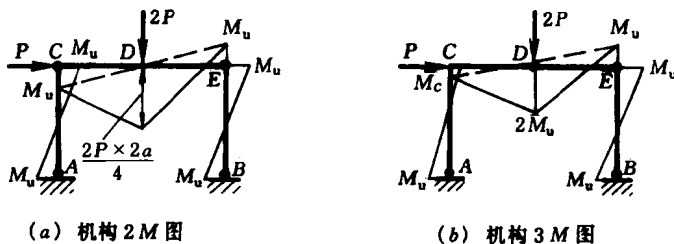


图 14-11

再试选机构 3(图 14-10d), 求得相应荷载为  $P = 2.29M_u/a$ (计算同上)。由各塑性铰处之弯矩等于极限弯矩, 可绘出右柱和横梁右半段的弯矩图(图 14-11b)。设结点 C 处两杆端弯矩为  $M_c$ (内侧受拉), 由横梁弯矩图的叠加法有

$$\frac{M_u - M_c}{2} + 2M_u = \frac{2P \times 2a}{4} = Pa = 2.29M_u$$

可得

$$M_c = 0.42M_u < M_u$$

这样便可绘出全部弯矩图，并可见满足内力局限条件。故此机构即为极限状态，极限荷载为

$$P_u = 2.29 \frac{M_u}{a}$$

### \*§ 14-8 矩阵位移法求刚架极限荷载的概念

前面介绍的穷举法和试算法，适合于手算，只能求解一些简单的刚架。矩阵位移法适合于电算，故能解决更复杂的求极限荷载的问题。

本节所介绍的方法称为增量法或变刚度法，其要点是从弹性阶段开始，一步一步计算，每步增加一个塑性铰，而每当出现一个塑性铰，就把该处改为铰结再进行下一步计算；并求出下一个塑性铰出现时荷载的增量值，这样直到成为机构，便可求得极限荷载。具体计算步骤如下：

(1) 令荷载参数  $P=1$  加于结构，用矩阵位移法进行弹性计算，求出相应的内力，其弯矩为  $\bar{M}_1$ 。第一个塑性铰必将出现在  $\left| \frac{M_u}{\bar{M}_1} \right|_{\min}$  处，当其出现时荷载值为

$$P_1 = \left| \frac{M_u}{\bar{M}_1} \right|_{\min}$$

弯矩为

$$M_1 = P_1 \bar{M}_1$$

以上是第一轮计算。

(2) 将第一个塑性铰处改为铰结，结构降低了一次超静定，这便改变了结构的计算简图，因此应相应地修改总刚。然后令  $P=1$  进行第二轮计算(仍为弹性计算)，求得弯矩为  $\bar{M}_2$ 。第

二个塑性铰将出现在  $\left| \frac{M_u - M_1}{\bar{M}_2} \right|_{\min}$  处，且当其出现时荷载值为

$$\Delta P_2 = \left| \frac{M_u - M_1}{\bar{M}_2} \right|_{\min}$$

弯矩为

$$\Delta M_2 = \Delta P_2 \bar{M}_2$$

这便是第二轮计算中荷载的增量和弯矩的增量。

第一、二轮累计，荷载和弯矩值为

$$P_2 = P_1 + \Delta P_2$$

$$M_2 = M_1 + \Delta M_2$$

(3) 将第二个塑性铰处改为铰结，结构又降低了一次超静定，然后修改总刚。再令  $P=1$  作第三轮计算，求得  $\bar{M}_3$ 。同理，第三个塑性铰出现时荷载及弯矩值为

$$\Delta P_3 = \left| \frac{M_u - M_2}{\bar{M}_3} \right|_{\min}$$

$$\Delta M_3 = \Delta P_3 \bar{M}_3$$

累计荷载及弯矩值为

$$P_3 = P_2 + \Delta P_3$$

$$M_3 = M_2 + \Delta M_3$$



(4) 如此重复进行下去, ..., 若到第  $n$  轮, 总刚成为奇异矩阵, 则结构已成为机构, 上一轮的累计荷载值  $P_{n-1}$  即为极限荷载  $P_u$ 。

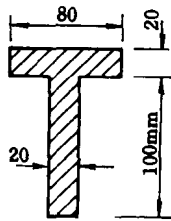
最后需指出, 以上每步都应计算各塑性铰处的相对转角, 若发现产生反方向变形, 则应恢复为刚结重算。

### 复习思考题

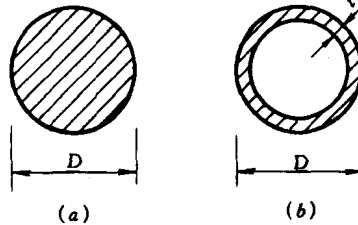
1. 什么叫极限状态和极限荷载? 什么叫极限弯矩、塑性铰和破坏机构?
2. 静定结构出现一个塑性铰时是否一定成为破坏机构?  $n$  次超静定结构是否必须出现  $n+1$  个塑性铰才能成为破坏机构?
3. 结构处于极限状态时应满足哪些条件?
4. 什么叫可破坏荷载和可接受荷载? 它们与极限荷载的关系如何?

### 习 题

14-1 已知材料的屈服极限  $\sigma_s = 240\text{MPa}$ , 试求下列截面的极限弯矩值: (a) 矩形截面  $b = 50\text{mm}$ ,  $h = 100\text{mm}$ ; (b) 20a 号工字钢; (c) 图示 T 形截面。



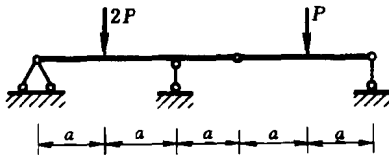
题 14-1c



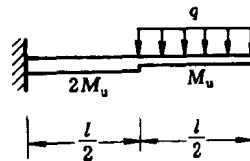
题 14-2

14-2 试求图示圆形截面及圆环形截面的极限弯矩, 设材料的屈服极限为  $\sigma_s$ 。

14-3 试求等截面静定梁的极限荷载。已知  $a = 2\text{m}$ ,  $M_u = 300\text{kN} \cdot \text{m}$ 。



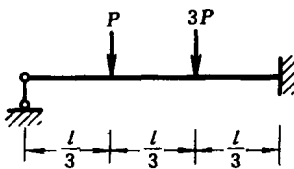
题 14-3



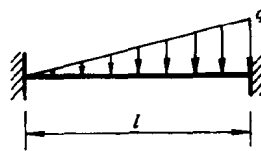
题 14-4

14-4 试求阶梯形变截面梁的极限荷载。

14-5~14-6 求等截面梁的极限荷载。



题 14-5



题 14-6