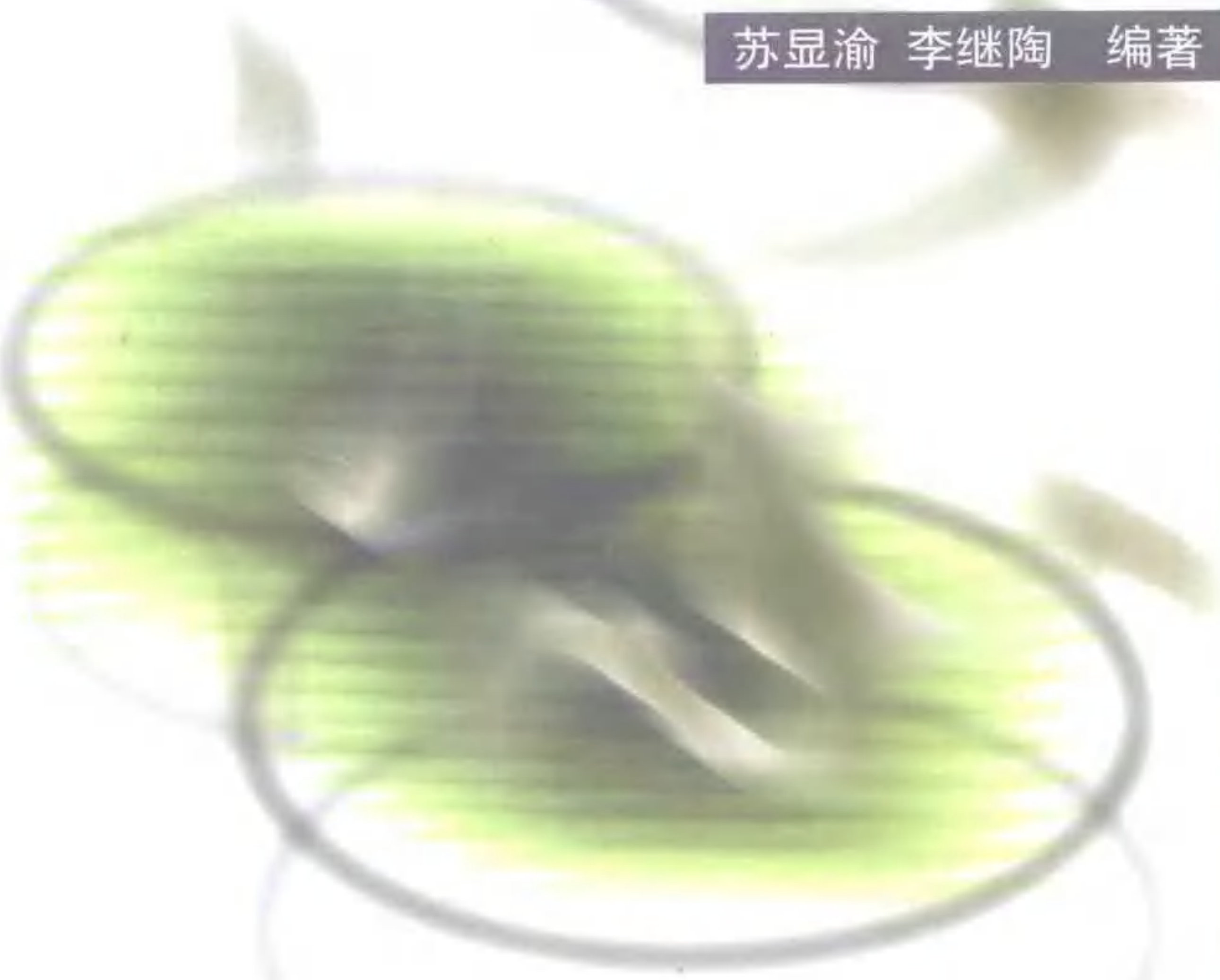
高等院校选用教材系列

信息光学

苏显渝 李继陶 编著



科学出版社

高等院校选用教材系列

信 息 光 学

苏显渝 李继陶 编 著

科 学 出 版 社

1999

内 容 简 介

信息光学是应用光学、计算机和信息科学相结合而发展起来的一门新的光学学科，是信息科学的一个重要组成部分，也是现代光学的核心.

本书共分 13 章. 1～4 章介绍了信息光学的基础理论；5～11 章介绍了光学全息、计算全息、空间滤波、光学相干和非相干处理等，是本书的重点；12～13 章介绍了最近发展起来的数字光计算机和三维面形测量. 本书既阐述了信息光学的基本理论，也介绍了这一学科的最新进展.

本书可作为高等院校光学、光学工程、光信息科学技术，电子科学技术等有关专业本科生和硕士研究生教材，也可供相应专业的教师和科技工作者参考.

图书在版编目（CIP）数据

信息光学/苏显渝，李继陶编著. -北京：科学出版社，1999. 9
（高等院校选用教材系列）
ISBN 7-03-007721-0

Ⅰ. 信… Ⅱ. ①苏… ②李… Ⅲ. 通信光学-高等学校-教材 Ⅳ. O438

中国版本图书馆 CIP 数据核字（1999）第 27505 号

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717

新 蕾 印 刷 厂 印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

1999 年 9 月第 一 版 开本：787×1092 1/16
1999 年 9 月第一次印刷 印张：23
印数：1—3 000 字数：534 000

定价：**35.00** 元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉）

前 言

光学是一门较早发展的学科，它在科学与技术的发展史上占有重要地位，近50年来，由于光学自身的发展以及和其它科学技术的广泛结合与相互渗透，这门古老学科迸发出新的青春活力．随着新技术的出现，新的理论也不断发展，形成了许多新的分支学科或边缘学科．信息光学是近40年发展起来的一门新兴学科，它是在全息术、光学传递函数和激光的基础上，从传统的、经典的波动光学中脱颖而出的．

1948年全息术的提出，1955年作为像质评价的光学传递函数的建立，以及1960年激光的诞生，是现代光学发展中的几件大事．激光的应用使全息术获得了新的生命，全息术和光学传递函数的进一步发展，加上将数学中的傅里叶变换和通信中的线性系统理论引入光学，使光学和通信这两个不同的领域在信息学范畴内统一起来，从“空域”走向“频域”．光学工程师不再仅仅限于用光强、振幅或透过率的空间分布来描述光学图像，也像电气工程师那样用空间频率的分布和变化来描述光学图像，为光学信息处理开辟了广阔的应用前景．与其它形态的信号处理相比，光学信息处理具有高度并行、大容量的特点．近年来，这一学科发展很快，理论体系已日趋成熟，信息光学已渗透到科学技术的诸多领域，成为信息科学的重要分支，得到越来越广泛的应用．

本书是为高年级大学生和研究生的教学需要而编写的，也可供教师及科研人员参考，主要介绍信息光学的基础理论．全书共分13章，除包含传统的线性系统、标量衍射、传递函数、部分相干、全息和信息处理等内容外，还介绍了莫尔条纹、分数傅里叶变换、阿达玛变换、光学小波变换、光计算和三维面形测量等内容．在本书的基础部分还编写了习题，为便于教师讲授和学生自学，我们对习题给出了简单解答．

承蒙苗军、陆成强二同志为本书绘制插图，我们深表谢意．

虽然本书是在作者多年教学和科研工作的基础上完成的，但由于作者水平有限，缺点和错误实难避免，敬请专家和读者批评指正．

苏显渝　李继陶

1999年3月于四川大学

目　　录

第一章　线性系统分析

一般说来，一个光学系统可以用一个输入和输出的方框图来表示．光学系统对输入信号的作用可以是线性的，也可以是非线性的．对于非线性系统，除一些特例外，目前还没有通用的技术来求解．虽然任何一个光学系统都不是严格线性的，但许多光学系统都可以作为线性系统来处理．由于光学系统几乎都用二维空间变量来描述，所以作为本书的开头将简述有关二维线性系统的一些基本知识．

1.1　几个常用的非初等函数

1.1.1　矩形函数

一维矩形函数定义为

$$\mathrm{rect}\left(\frac{x-x_0}{a}\right)=\begin{cases}1, & \left|\dfrac{x-x_0}{a}\right|\leqslant\dfrac{1}{2}\\ 0, & \text{其它}\end{cases}\tag{1.1.1}$$

函数图像如图 1.1.1 所示，表示函数以 x_0 为中心，宽度为 $a(a>0)$，高度为 1 的矩形．当 $x_0=0$，$a=1$ 时，矩形函数形式变成 $\mathrm{rect}(x)$，它是以 $x=0$ 为对称轴的，高度和宽度均为 1 的矩形．二维矩形函数可表为一维矩形函数的乘积 $\mathrm{rect}\left(\frac{x-x_0}{a}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{y-y_0}{b}\right)$．其中 $a,b>0$．

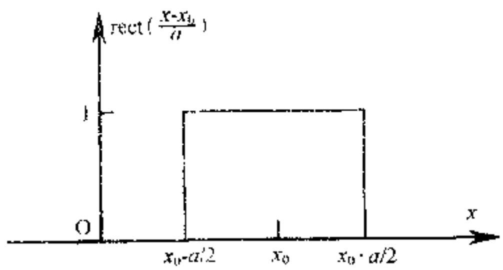


图 1.1.1　矩形函数

1.1.2　sinc 函数

sinc 函数定义为

$$\mathrm{sinc}\left(\frac{x-x_0}{a}\right)=\frac{\sin\pi(x-x_0)/a}{\pi(x-x_0)/a}\tag{1.1.2}$$

式中 $a>0$，函数在 $x=x_0$ 处有最大值 1．零点位于 $x-x_0=\pm na(n=1,2\cdots)$．对于 $x_0=0$，

$a=1$ 的情况,(1.1.2)式变成 $\mathrm{sinc}(x)$,函数图像如图 1.1.2 所示.

1.1.3 三角形函数

$$\Lambda\left(\frac{x}{a}\right)=\begin{cases}1-\left|\frac{x}{a}\right|, & |x|\leqslant a\\ 0, & \text{其它}\end{cases} \tag{1.1.3}$$

其中 $a>0$,函数以原点为中心,底边长为 $2a$,高度为 1 的等腰三角形.图 1.1.3 给出了 $a=1$ 时 $\Lambda(x)$ 的图像.

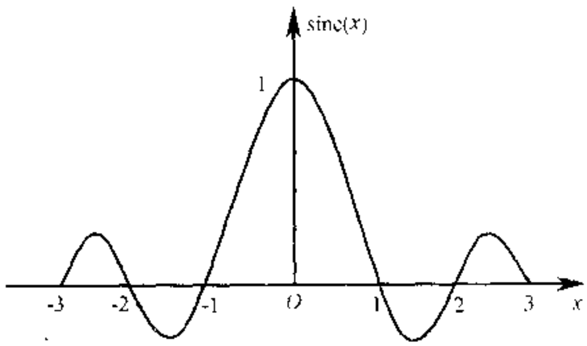


图 1.1.2 sinc 函数

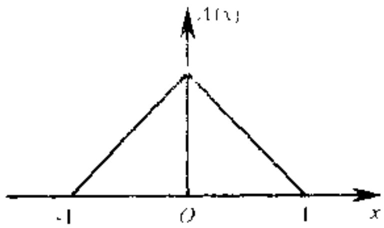


图 1.1.3 三角形函数

1.1.4 符号函数

符号函数定义为

$$\mathrm{sgn}(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases} \tag{1.1.4}$$

此函数图像如图 1.1.4 所示.

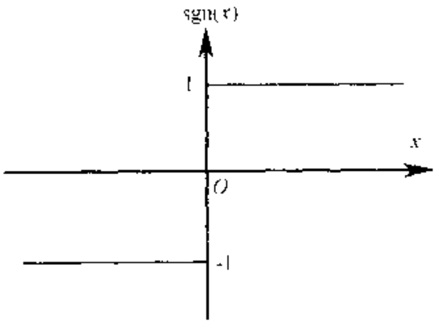


图 1.1.4 符号函数

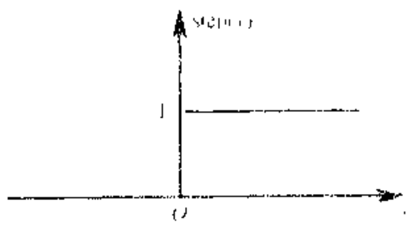


图 1.1.5 阶跃函数

1.1.5 阶跃函数

阶跃函数定义为

$$\mathrm{step}(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x<0\end{cases} \tag{1.1.5}$$

其图像如图 1.1.5 所示.

1.1.6 圆柱函数

在直角坐标系内圆柱函数的定义式为

$$\mathrm{circ}\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{a}\right)=\begin{cases}1, & \sqrt{x^2+y^2}<a\\ 0, & \text{其它}\end{cases} \tag{1.1.6}$$

极坐标内的定义式为

$$\mathrm{circ}\left(\frac{r}{a}\right)=\begin{cases}1, & r<a\\ 0, & r>a\end{cases} \tag{1.1.7}$$

圆柱函数的图像如图 1.1.6 所示.

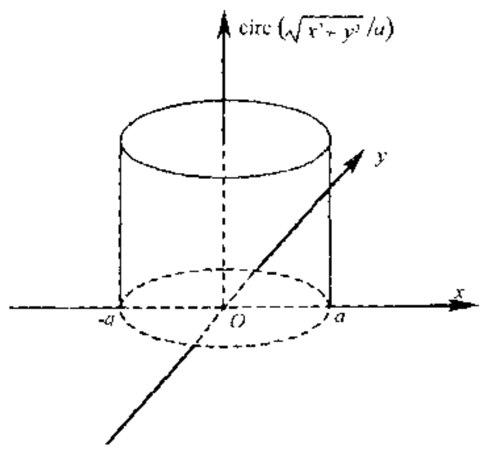


图 1.1.6 圆柱函数

1.2 δ 函数

在物理学和工程技术中,人们常常要考察质量或能量在空间或时间上高度集中的各种现象.为此,人们设想了诸如质点、点电荷、点光源,以及瞬时脉冲等物理模型.δ 函数就是用来描述这类物理模型的数学工具.δ 函数不是普通函数,它不像普通函数那样完全由数值对应关系确定.它是广义函数,其属性完全由它在积分中的作用表现出来.然而,从应用的角度看,也可以把 δ 函数与普通函数联系起来,用普通函数描述它的性质.这样既简单、直观,又能充分满足要求.

1.2.1 δ 函数的定义

1. 类似普通函数形式的定义

$$\left.\begin{aligned}&\delta(x,y)=\begin{cases}0, & x\neq 0, y\neq 0\\ \infty, & x=y=1\end{cases}\\ &\iint_{-\infty}^{\infty}\delta(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1\end{aligned}\right\}\tag{1.2.1}$$

在这个 δ 函数定义中，与普通函数类似之处，就是保留了数值对应关系的痕迹.

2. 普通函数序列极限形式的定义

$$\delta(x,y)=\lim_{n\to\infty}g_n(x,y)\tag{1.2.2}$$

并且对函数序列中的任一函数 $g_n(x,y)$来说，皆有

$$\left.\begin{aligned}&\iint_{-\infty}^{\infty}g_n(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1\\ &\lim_{n\to\infty}g_n(x,y)=0, x\neq 0, y\neq 0\end{aligned}\right\}\tag{1.2.3}$$

常用的表现形式有

$$\delta(x,y)=\lim_{n\to\infty}n^2\exp[-n^2\pi(x^2+y^2)]\tag{1.2.4}$$

$$\delta(x,y)=\lim_{n\to\infty}n^2\mathrm{rect}(nx)\mathrm{rect}(ny)\tag{1.2.5}$$

$$\delta(x,y)=\lim_{n\to\infty}n^2\mathrm{sinc}(nx)\mathrm{sinc}(ny)\tag{1.2.6}$$

3. 广义函数形式的定义

δ 函数是一个广义函数，它赋予检验函数 $\phi(x,y)$以一个数 $\phi(0,0)$，即

$$\iint_{-\infty}^{\infty}\delta(x,y)\phi(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\phi(0,0)\tag{1.2.7}$$

其中 $\phi(x,y)$在原点处连续. 上式表明，$\delta(x,y)$在该式左端积分中的作用，就是赋予 $\phi(x,y)$在 $x=y=0$ 处的数值 $\phi(0,0)$. 不同形式的函数，只要它在积分中的作用和(1.2.7)式相同，就可认为它们与 $\delta(x,y)$相等.

1.2.2 δ 函数的性质

δ 函数的常用性质有

1. 筛选性质

设函数 $f(x,y)$在(x_0,y_0)点连续，则有

$$\iint_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\delta(x-x_0,y-y_0)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=f(x_0,y_0)\tag{1.2.8}$$

2. 坐标缩放性质

设 a,b 为实常数，则有

$$\delta(ax,by)=\frac{1}{|ab|}\delta(x,y)\tag{1.2.9}$$

3. 可分离变量性

$$\delta(x,y) = \delta(x)\delta(y) \tag{1.2.10}$$

4. 与普通函数乘积的性质

函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点连续，则有

$$f(x,y)\delta(x-x_0,y-y_0) = f(x_0,y_0)\delta(x-x_0,y-y_0) \tag{1.2.11}$$

1.2.3 梳状函数

1. 一维梳状函数

一维梳状函数定义为

$$\mathrm{comb}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(x-n) \tag{1.2.12}$$

这是一个间隔为 1 的 δ 函数的无穷序列，其图像如图 1.2.1 所示. 显然，梳状函数也是广义函数，其性质可由 δ 函数的性质推出.

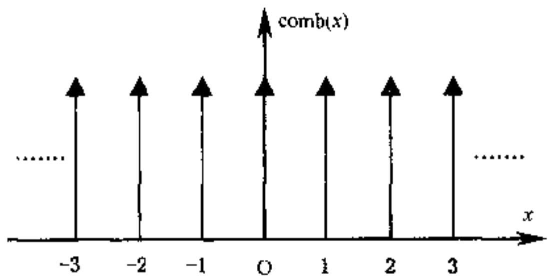


图 1.2.1 梳状函数

2. 二维梳状函数

通常总是在直角坐标系内考察二维梳状函数，并将它记为 $\mathrm{comb}(x,y)$，其定义式为

$$\mathrm{comb}(x,y) = \mathrm{comb}(x)\mathrm{comb}(y) \tag{1.2.13}$$

式中

$$\mathrm{comb}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(x-n) \tag{1.2.14}$$

$$\mathrm{comb}(y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta(y-m) \tag{1.2.15}$$

1.3 二维傅里叶变换

1.3.1 傅里叶级数

一个周期函数 $f(t)$，周期 $\tau = \dfrac{1}{\nu}$，它满足狄里赫利条件，即函数在一个周期内有有限个极值点和第一类间断点（所谓第一类间断点是函数的不连续点，在该点附近函数的值有限，其左右极限存在），则 $f(t)$ 可展开成三角级数

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos 2\pi n\nu t + b_n\sin 2\pi n\nu t) \tag{1.3.1}$$

其中傅里叶系数

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\tau}\int_0^{\tau} f(t)\mathrm{d}t \\ a_n &= \frac{2}{\tau}\int_0^{\tau} f(t)\cos 2\pi n\nu t\mathrm{d}t \\ b_n &= \frac{2}{\tau}\int_0^{\tau} f(t)\sin 2\pi n\nu t\mathrm{d}t \end{aligned}\right\} \tag{1.3.2}$$

也可以等效地把周期函数 $f(t)$ 展开成指数傅里叶级数形式

$$\boldsymbol{f}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \boldsymbol{C}_n \exp(\mathrm{j}2\pi n\nu t) \tag{1.3.3}$$

其中

$$\boldsymbol{C}_n = \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} \boldsymbol{f}(t)\exp(-\mathrm{j}2\pi n\nu t)\mathrm{d}t, n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \tag{1.3.4}$$

$\boldsymbol{C}_n$ 一般是频率 ν 的复函数,通常称为频谱函数.由于周期函数只包含 $0, \pm\nu, \pm 2\nu, \cdots$ 频率分量,频率的取值是离散的,所以周期函数只有离散谱.

1.3.2 傅里叶变换

1. 直角坐标系内的二维傅里叶变换

非周期函数 $\boldsymbol{f}(x,y)$ 在整个无限 xy 平面上满足狄里赫利条件,且 $\iint_{-\infty}^{\infty} |\boldsymbol{f}(x,y)| \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 存在,则二元函数 $\boldsymbol{f}(x,y)$ 的傅里叶变换定义为

$$\boldsymbol{F}(\xi,\eta) = \iint_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{f}(x,y)\exp\{-\mathrm{j}2\pi(\xi x + \eta y)\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{1.3.5}$$

其中 (ξ,η) 是与函数 $\boldsymbol{F}$ 对应的直角坐标系的两个坐标变量,(x,y,ξ,η) 都是实变量.函数 $\boldsymbol{f}(x,y)$ 可以是实函数,亦可以是复函数,$\boldsymbol{F}(\xi,\eta)$ 或实或复由函数 $\boldsymbol{f}(x,y)$ 的性态决定.式中的 $\exp\{-j2\pi(\xi x+\eta y)\}$ 称为二维傅里叶变换的核.类似地,定义

$$\boldsymbol{f}(x,y) = \iint_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{F}(\xi,\eta)\exp[\mathrm{j}2\pi(\xi x + \eta y)]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \tag{1.3.6}$$

为二元函数 $\boldsymbol{F}(\xi,\eta)$ 的二维傅里叶逆变换.利用(1.3.6)式可以把非周期函数分解为连续频率的余弦分量的积分,$\boldsymbol{F}(\xi,\eta)$ 表示各连续频率成分的权重因子.

2. 存在条件

为了保证如上定义的二维傅里叶变换对的存在,函数 $\boldsymbol{f}(x,y)$ 要满足狄里赫利条件和绝对可积条件.从纯数学观点看,对这种条件的探讨自然是有意义的.这里不讨论这个理论问题,而是从应用的观点指出以下两点.

(1)在应用傅里叶变换的各个领域中的大量事实表明,作为时间或空间函数而实际存在的物理量,总具备保证其傅里叶变换存在的基本条件.可以说,物理上的可能性是保证傅里叶变换存在的充分条件.因此,从应用的角度看,可以认为傅里叶变换实际上总是存在的.

(2)在应用问题中,也会遇到一些理想化的函数,例如余弦函数、阶跃函数以至最简单

的卷积等。它们都是光学中常用的,但不满足保证其傅里叶变换存在的充分条件;同时它们在物理上也是不可能严格实现的. 对这类函数难以讨论其经典意义下的傅里叶变换,然而借助函数序列极限概念或 δ 函数性质可以得到这类函数的广义傅里叶变换. 这种广义傅里叶变换不仅在理论上自洽,而且在应用上也能给出符合实际的结果.

由此可以认为,今后涉及到的函数都存在着相应的傅里叶变换,只是有狭义和广义之分罢了.

3. 极坐标系内的二维傅里叶变换

(1)定义式

设 xy 平面上的极坐标为 r,θ;$\xi\eta$ 平面上的极坐标为 ρ,φ. 显然有以下关系

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\theta,\ y = r\sin\theta \\ \xi &= \rho\cos\varphi,\ \eta = \rho\sin\varphi \end{aligned}\right\} \tag{1.3.7}$$

按照以上关系式,(1.3.5)式可改写成

$$\boldsymbol{F}(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi) = \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}\boldsymbol{f}(r\cos\theta,r\sin\theta)\exp[-\mathrm{j}2\pi\rho r\cos(\theta-\varphi)]r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \tag{1.3.8}$$

令

$$\boldsymbol{G}(\rho,\varphi) = \boldsymbol{F}(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi) \tag{1.3.9}$$

$$\boldsymbol{g}(r,\theta) = \boldsymbol{f}(r\cos\theta,r\sin\theta) \tag{1.3.10}$$

于是,极坐标系内二维傅里叶变换对的定义式可一般地表示为

$$\boldsymbol{G}(\rho,\varphi) = \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} r\boldsymbol{g}(r,\theta)\exp[-\mathrm{j}2\pi\rho r\cos(\theta-\varphi)]\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \tag{1.3.11}$$

$$\boldsymbol{g}(r,\theta) = \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} \rho\boldsymbol{G}(\rho,\varphi)\exp[\mathrm{j}2\pi\rho r\cos(\theta-\varphi)]\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi \tag{1.3.12}$$

与直角坐标系内的二维傅里叶变换对的定义式相比,极坐标形式显得很复杂. 然而,当函数 $\boldsymbol{g}$ 具有圆对称性时,极坐标将显示其方便之处.

(2)傅里叶-贝塞尔变换

设函数 $\boldsymbol{g}(r,\theta)$ 具有圆对称性,即 $\boldsymbol{g}$ 与 θ 无关,于是可以写成 $\boldsymbol{g}(r,\theta)=\boldsymbol{g}(r)$,将其代入(1.3.11)式可得

$$\boldsymbol{G}(\rho,\varphi) = \int_0^{\infty} r\boldsymbol{g}(r)\left\{\int_0^{2\pi}\exp[-\mathrm{j}2\pi\rho r\cos(\theta-\varphi)]\mathrm{d}\theta\right\}\mathrm{d}r$$

利用贝塞尔函数关系式

$$\int_0^{2\pi}\exp[-\mathrm{j}a\cos(\theta-\varphi)]\mathrm{d}\theta = 2\pi\,\mathrm{J}_0(a)$$

式中 $\mathrm{J}_0(\cdot)$ 是第一类零阶贝塞尔函数. 于是

$$\boldsymbol{G}(\rho) = 2\pi\int_0^{\infty} r\boldsymbol{g}(r)\,\mathrm{J}_0(2\pi\rho r)\mathrm{d}r \tag{1.3.13}$$

由于上式右端与 φ 无关,故已将 $\boldsymbol{G}(\rho,\varphi)$ 写成 $\boldsymbol{G}(\rho)$,这表明圆对称函数的傅里叶变换仍为圆对称

类似地,可写出 $\boldsymbol{G}(\rho)$ 的傅里叶逆变换

$$\boldsymbol{g}(r) = 2\pi\int_0^{\infty} \rho\boldsymbol{G}(\rho)\,\mathrm{J}_0(2\pi\rho r)\mathrm{d}\rho \tag{1.3.14}$$

对比(1.3.13)和(1.3.14)可见,在极坐标系内,圆对称函数的傅里叶正变换与逆变换

的运算相同.人们将这种特殊形式的傅里叶变换称为傅里叶-贝塞尔变换.

1.3.3 广义傅里叶变换

如果只考虑经典意义(或称狭义的)傅里叶变换,那么对一些很有用的函数,都无法确定其傅里叶变换,这给傅里叶变换带来很大的局限性.傅里叶变换之所以获得如此广泛的应用,在很大程度上与引入广义傅里叶变换有关.所谓广义傅里叶变换,是指极限意义下的傅里叶变换和 δ 函数的傅里叶变换.

1. 极限意义下的傅里叶变换

设 $f(x)$ 是一个无法确定狭义傅里叶变换的函数.如 $f(x)$ 和一个函数序列 $f_n(x)$($n = 1,2,\cdots,\infty$)具有以下关系

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \tag{1.3.15}$$

并且对函数序列中的每一个函数 $f_n(x)$ 来说,它的狭义傅里叶变换

$$F_n(\xi) = \mathscr{F}\{f_n(x)\}$$

都存在,而且当 $n\to\infty$ 时,函数序列 $F(\xi)$ 也有确定的极限,则称该极限为函数在极限意义下的傅里叶变换.在应用中,无需对这种傅里叶变换与狭义傅里叶变换作区分.仍用 $\mathscr{F}\{\cdot\}$ 表示极限意义下的傅里叶变换,即

$$\mathscr{F}\{f(x)\} = \lim_{n\to\infty} \mathscr{F}\{f_n(x)\} \tag{1.3.16}$$

作为例子,考察符号函数 $\mathrm{sgn}(x)$ 的傅里叶变换.由于 $\mathrm{sgn}(x)$ 不满足绝对可积条件,无法确定其狭义傅里叶变换.为此选取适当的函数序列

$$f_n(x) = \begin{cases} e^{-x/n}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -e^{x/n}, & x < 0 \end{cases} \tag{1.3.17}$$

式中 $n = 1,2,\cdots,\infty$.容易看出

$$\mathrm{sgn}(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} F_n(\xi) &= \mathscr{F}\{f_n(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) e^{-j2\pi\xi x} dx \\ &= \int_0^{\infty} e^{-x/n} e^{-j2\pi\xi x} dx - \int_{-\infty}^{0} e^{x/n} e^{-j2\pi\xi x} dx \\ &= \frac{-j4\pi\xi}{\frac{1}{n^2} + (2\pi\xi)^2} \end{aligned} \tag{1.3.18}$$

根据广义傅里叶变换定义有

$$F(\xi) = \mathscr{F}\{\mathrm{sgn}(x)\} = \lim_{n\to\infty} F_n(\xi) = \begin{cases} -\frac{j}{\pi\xi}, & \xi \neq 0 \\ 0, & \xi = 0 \end{cases} \tag{1.3.19}$$

2. δ 函数的傅里叶变换

δ 函数是一个广义函数,狭义傅里叶变换的概念不适用.然而,根据 δ 函数的定义式,

可直接求出它的傅里叶变换

$$\mathscr{F}\{\delta(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) e^{-j2\pi\xi x} dx = 1 \tag{1.3.20}$$

即 $\delta(x)$的傅里叶变换是常数 1.那么常数 1 的傅里叶逆变换 $\mathscr{F}^{-1}\{1\}$是否为 $\delta(x)$.为此我们考察 $\mathscr{F}^{-1}\{1\}$在积分中的作用是否与 $\delta(x)$相同.于是考察积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathscr{F}^{-1}\{1\} \boldsymbol{f}(x) dx$$

其中 $\boldsymbol{f}(x)$是一个具有傅里叶变换的函数.设 $\mathscr{F}\{\boldsymbol{f}(x)\} = \boldsymbol{F}(\xi)$,可以写出

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \mathscr{F}^{-1}\{1\} \boldsymbol{f}(x) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot e^{j2\pi\xi x} d\xi \right] \boldsymbol{f}(x) dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{f}(x) e^{j2\pi\xi x} dx \right] d\xi \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{F}(-\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{F}(\xi) d\xi \\
&= \boldsymbol{f}(0)
\end{aligned}$$

亦即

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathscr{F}^{-1}\{1\} \boldsymbol{f}(x) dx = \boldsymbol{f}(0)$$

这表明 $\mathscr{F}^{-1}\{1\}$在积分中的作用与 $\delta(x)$相同,故有

$$\mathscr{F}^{-1}\{1\} = \delta(x) \tag{1.3.21}$$

类似地有

$$\mathscr{F}\{1\} = \delta(\xi) \tag{1.3.22}$$

即

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi\xi x} dx = \delta(\xi) \tag{1.3.23}$$

这是一个很重要的结果,解决了关于常数的傅里叶变换问题.

3. *广义傅里叶变换计算举例*

(1)阶跃函数 step(x)的傅里叶变换

阶跃函数可借助符号函数表示为

$$\mathrm{step}(x) = \frac{1}{2}[1 + \mathrm{sgn}(x)] \tag{1.3.24}$$

于是 step(x)的傅里叶变换可写成

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}\{\mathrm{step}(x)\} &= \frac{1}{2}\mathscr{F}\{1 + \mathrm{sgn}(x)\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\delta(\xi) - \frac{j}{\pi\xi}\right\}
\end{aligned} \tag{1.3.25}$$

(2)梳状函数 $\mathrm{comb}\left(\frac{x}{a}\right)$($a$ 为正实数)的傅里叶变换

按梳状函数定义有

$$\mathrm{comb}\left(\frac{x}{a}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(\frac{x}{a}-n\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left[\frac{1}{a}(x-na)\right]$$
$$=a\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(x-na) \tag{1.3.26}$$

所以 $\mathrm{comb}\left(\frac{x}{a}\right)$ 是周期为 a 的周期函数,可将其展开成傅里叶级数,即

$$\mathrm{comb}\left(\frac{x}{a}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\exp(\mathrm{j}2\pi nx/a)$$

其中

$$c_0=\frac{1}{a}\int_{-a/2}^{a/2}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\int_{-a/2}^{a/2}a\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(x-na)\mathrm{d}x$$
$$=\int_{-a/2}^{a/2}\delta(x)\mathrm{d}x=1$$
$$c_n=\frac{1}{a}\int_{-a/2}^{a/2}f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi nx/a}\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\int_{-a/2}^{a/2}a\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(x-na)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi nx/a}\mathrm{d}x$$
$$=\int_{-a/2}^{a/2}\delta(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi nx/a}\mathrm{d}x=1$$

于是

$$\mathrm{comb}\left(\frac{x}{a}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp(\mathrm{j}2\pi nx/a) \tag{1.3.27}$$

所以,$\mathrm{comb}\left(\frac{x}{a}\right)$ 的傅里叶变换为

$$\mathscr{F}\left\{\mathrm{comb}\left(\frac{x}{a}\right)\right\}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathscr{F}\{\exp(\mathrm{j}2\pi nx/a)\}$$
$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi nx/a}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\xi x}\mathrm{d}x$$
$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(\xi-\frac{n}{a}\right)$$
$$=a\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(a\xi-n)$$
$$=a\,\mathrm{comb}(a\xi) \tag{1.3.28}$$

若 $a=1$,则有

$$\mathrm{comb}(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp(\mathrm{j}2\pi nx) \tag{1.3.29}$$
$$\mathscr{F}\{\mathrm{comb}(x)\}=\mathrm{comb}(\xi) \tag{1.3.30}$$

1.4 卷积和相关

卷积和相关都是由含参变量的无穷积分定义的函数,与傅里叶变换有密切关系.