应用数学丛书

圆柱函数

刘颖 编著

国防工业出版社

应用数学丛书

圆柱函数

刘颖 编著

国防工业出版社

内容简介

本书是为工程技术人员与工科院校师生编写的关于圆柱函数(也称贝塞耳函数)的参考书。主要内容是：第一章至第四章讲圆柱函数，第五章讲变型圆柱函数，第六章讲圆柱函数的路积分表达式，第七章讲渐近表达式，第八、九两章讲一些常见的应用。

本书比较完整地介绍了在某些专业(如无线电技术)中经常应用的一种特殊函数——圆柱函数的基础知识，内容由浅入深，条理清楚，推证详细。读者只要具有工科高等数学及复变函数基础知识就能容易地阅读。

本书可供工科院校高年级大学生、研究生、专业教师及从事科研工程的技术人员参考。

应用数学丛书
圆柱函数
刘颖　编著
*
国防工业出版社出版
新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售
国防工业出版社印刷厂印装
*
$850\times1168\ ^1/_{32}$　印张 $6\ ^3/_4$　166千字
1983年3月第一版　1983年3月第一次印刷　印数：0,001—6,000册
统一书号：15034·2446　定价：0.87元

出 版 说 明

近二十年来，电子工程、控制工程、系统工程及其它领域都获得巨大发展。众所周知，这些科学技术研究的发展是与现代逐渐形成的应用数学学科紧密相关，相辅相成。尤其近年发展起来的边缘学科，更是与数学紧密接合。但一般数学专著比较偏重于论证严谨，全面系统，篇幅较大，理论较深。广大科技工作者学习此类著作，往往需时较多，与工作结合不紧，收效不大。本丛书将为目前在电子工程、控制工程、系统工程等领域工作的同志在数学基础的提高上，提供适合其工作特点的数学参考书。

本丛书是一种介于现代应用数学专著与工程专业理论书籍之间的桥梁参考著作。更着重于科技工作中应用较多的数学概念，分析和解题的基本技巧；也包括一部分适合于实际工作者为学习更高深的现代应用数学专著所需之基础知识。

本丛书选材包括三个方面：基础数学，应用数学有关领域的基础介绍，应用于科技中的典型基础专业理论。出版采用分册形式，各册内容独立，自成体系，但仍有少量交叉，分期分批出版。

丛书可供大专院校有关专业研究生、教师、从事科研生产的工程师参考。

序

圆柱函数（也称贝塞耳函数）是理论物理与某些技术科学中经常遇到的一种特殊函数。因而从事这类专业工作的工程技术人员和大学学生都必须具备圆柱函数理论的基础知识。在国外已有许多关于圆柱函数的专著，大多内容浩繁，不易阅读，如瓦特商“贝塞耳函数理论”等。在国内则还缺乏这方面比较适当的专著或参考书籍。有的只在工程数学一类的书籍中稍为提及，内容比较简略，特别是在有些教科书中对圆柱函数的某些内容只提到结论而不讲其推证，使学习者莫名其妙；有些专讲特殊函数的书籍中虽内容较丰富，却又数学理论性较强，不适于工科学生阅读。

本书是专为工程技术人员与工科院校师生编写的关于圆柱函数基础知识的参考书。本书力求较为完整地介绍圆柱函数的基本内容，同时在数学理论上尽量使有工科高等数学及复变函数基础知识的读者能容易地阅读，因而把一些较严密的数学条件就从略了，例如一致收敛的概念就没有提到。

本书在前四章中详尽地介绍了三类圆柱函数的来源与常用到的性质。为了由浅入深便于读者阅读，只限于讲实变数的圆柱函数，并且把其阶数也限于实数，这并不失其一般性，因为能自然地推广到自变数与阶数为复数的情况。在第五章中讲了二类变型圆柱函数及开尔文函数，也只用到复数知识。在第六、七两章中讲圆柱函数的路积分与渐近表达式，这里用到了复变函数知识，同时把圆柱函数的自变量与阶数扩展为复数。这一部分内容在许多工程数学教科书中较为简略，只提出结论而不作推证，本书详细地论述了其根源并作了推证。应用到圆柱函数的方面甚为广泛，本书中不可能详为列述，只是在第八、九两章中讲了一些在数学

物理方法及无线电技术上常用到的例子，其它应用可参考有关的专业书籍。

如果本书能对有关专业的工程技术人员的工作和大学师生的教学上有所帮助，就达到编著者的目的了。

目　录

第一章　预备知识

§1.1　引　　言

圆柱函数和其它许多的数学分支一样，是起源于求物理问题的解。在物理和工程技术中，常可把所研究的过程和现象归结为求形如

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+(x^2-p^2)y=0 \qquad (1\text{-}1.1)$$

微分方程的解。我们称此方程的解为圆柱函数。例如在研究波动方程时，如利用圆柱坐标系就会遇到这种形状的方程，因而就把其解叫做圆柱函数了。

1764年欧拉研究拉紧的圆膜振动时得到方程（1-1.1），并求出p为整数时的幂级数解。更早一些，贝努利在1732年研究直悬链的摆动问题时，得到形如

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}+\frac{k^2}{x}y=0 \qquad (1\text{-}1.2)$$

的微分方程，并求出此方程的幂级数解。此方程可转换为式（1-1.1）。1770年拉格朗日在关于天体力学的研究中，得到了一个方程，此方程的解可以表示成无穷级数的形式，此级数的系数就是圆柱函数。1822年傅立叶发表的关于热传导的论文里得到方程（1-1.1）的一个特殊情况，并求出其解。总之，在1824年以前，微分方程（1-1.1）的各种情况，数学家已经有所研究，但没有系统地研究这种方程，并且“贝塞耳函数”这一专门名词也未出现。

贝塞耳在1824年关于天文学问题的研究中，碰到了这种函数，它们是以依赖于参数的定积分表达的。他研究了这些用积分

表示的函数的性质，并指出当 p 为整数时，这些函数是方程（1-1.1）的解。同时贝塞耳还编制出这些函数具有十位小数的函数表。从此以后，圆柱函数就被人称为“贝塞耳函数”，方程(1-1.1)也就叫做贝塞耳方程。后来圆柱函数引起很多数学家的注意，并且被广泛地应用到物理学和技术科学中。

§1.2 贝塞耳方程的来源

柱坐标系下的拉普拉斯方程的求解过程中便会出现贝塞耳方程。

在电磁场理论中，无源静电场的电位分布满足三维拉普拉斯方程

$$\nabla^2 u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0 \qquad (1\text{-}2.1)$$

在求解此方程时，要根据边界形状而采用不同的坐标系。如果采用的是柱坐标系，利用柱坐标与直角坐标的关系

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta,\quad z=z$$

则可把方程（1-2.1）化为

$$\nabla^2 u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0 \qquad (1\text{-}2.2)$$

在数学物理方法中常用所谓分离变量法求解方程（1-2.2)。即设

$$u(r,\ \theta,\ z)=R(r)\Phi(\theta)Z(z)$$

代入式（1-2.2)，得

$$\Phi Z\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{\Phi Z}{r}\frac{dR}{dr}+\frac{RZ}{r^2}\frac{d^2\Phi}{d\theta^2}+R\Phi\frac{d^2Z}{dz^2}=0$$

以 $\frac{r^2}{R\Phi Z}$ 遍乘各项后再作移项，得

$$\frac{r^2}{R}\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{r}{R}\frac{dR}{dr}+\frac{r^2}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}=-\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\theta^2}$$

上式左边是 r 和 z 的函数，与 θ 无关；而右边是 θ 的函数，与 r 和 z 无关。在这种情况只有两端都是同一常数时，等式才能成立。设此常数为 λ，则有

$$\frac{r^2}{R}\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{r}{R}\frac{dR}{dr}+\frac{r^2}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}=-\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\theta^2}=\lambda$$

于是就分解为两个方程

$$\frac{d^2\Phi}{d\theta^2}+\lambda\Phi=0 \tag{1-2.3}$$

及

$$\frac{r^2}{R}\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{r}{R}\frac{dR}{dr}+\frac{r^2}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}=\lambda \tag{1-2.4}$$

方程（1-2.3）中的函数 $\Phi(\theta)$ 显然应是以 2π 为周期的函数，即有性质 $\Phi(\theta+2\pi)=\Phi(\theta)$，否则 $\Phi(\theta)$ 便是 θ 的多值函数，这与实际情况不合。要使式（1-2.3）的解满足此条件，λ 必须取值

$$\lambda=n^2 \qquad (n=1,\ 2,\ \cdots) \tag{1-2.5}$$

与其相应的方程（1-2.3）的解为

$$\Phi(\theta)=A\cos n\theta+B\sin n\theta \tag{1-2.6}$$

在式（1-2.6）中 $n=0$ 是可以的，因此式（1-2.5）中的 n 可取 $n=0,\ 1,\ 2\cdots$。

λ 值取定后，方程（1-2.4）可写为

$$\frac{r^2}{R}\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{r}{R}\frac{dR}{dr}+\frac{r^2}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}=n^2$$

各项均除以 r^2，再移项，得

$$\frac{1}{R}\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{rR}\frac{dR}{dr}-\frac{n^2}{r^2}=-\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}$$

此式左边只是 r 的函数，与 z 无关，右边只是 z 的函数，与 r 无关。两端只能是等于同一常数时才能成立。设此常数为 $-\mu$，则有

$$\frac{1}{R}\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{rR}\frac{dR}{dr}-\frac{n^2}{r^2}=-\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}=-\mu$$

此式又可分解为两个方程

$$\frac{d^2Z}{dz^2}-\mu Z=0 \tag{1-2.7}$$

及

$$\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dR}{dr}+\left(\mu-\frac{n^2}{r^2}\right)R=0 \tag{1-2.8}$$

按照所给问题的边界条件，把常微分方程(1-2.3)，(1-2.7)，(1-2.8) 分别解出，就得到所求问题的解，关于此问题的具体例子将在讲应用时列举，这里只是企图导出方程 (1-2.8)。

在方程 (1-2.8) 中，若 $\mu>0$，可作变量变换 $x=\sqrt{\mu}\ r$，并把 $R(r)$ 写成 $y(x)$，于是式 (1-2.8) 化为

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}+\left(1-\frac{n^2}{x^2}\right)=0 \tag{1-2.9}$$

或

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+(x^2-n^2)y=0 \tag{1-2.10}$$

方程 (1-2.9) 或 (1-2.10) 称为 n 阶贝塞耳方程。

在许多科技问题中，n 不一定是正整数，也可以是任何实数或复数。因此一般把 n 写作 p，于是方程为

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+(x^2-p^2)y=0 \tag{1-2.11}$$

或

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}+\left(1-\frac{p^2}{x^2}\right)y=0 \tag{1-2.12}$$

就是一般的 p 阶贝塞耳方程。

在方程 (1-2.8) 中，若 $\mu<0$，令 $x=\sqrt{-\mu}\ r$，且写 $R(r)$ 为 $y(x)$，则式 (1-2.8) 化为

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}-(x^2+p^2)y=0 \tag{1-2.13}$$

或

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{x}\ \frac{dy}{dx}-\left(1+\frac{p^2}{x^2}\right)y=0 \qquad (1\text{-}2.14)$$

方程（1-2.13）或（1-2.14）称为p阶虚变量的贝塞耳方程。实际上只要把贝塞耳方程中的变量x换为ix，贝塞耳方程就化为虚变量的贝塞耳方程了。

微分方程（1-2.11）或（1-2.12）的一定形式的解称为圆柱函数，或者称为贝塞耳函数，其中参数p与自变量x无关，称为方程（1-2.11）或（1-2.12）的阶数，也是其解圆柱函数的阶数。方程（1-2.13）或（1-2.14）的一定形式的解称为变型圆柱函数，或者称为变型贝塞耳函数。本书主要讨论圆柱函数及变型圆柱函数的各种性质及其应用。

§1.3 Γ函数与B函数

本节介绍在本书中常用到的二种特殊函数：Γ函数（伽马函数）和B函数（贝塔函数）作为预备知识。

一、Γ函数

含参量p的广义积分

$$\int_0^\infty e^{-x}x^{p-1}dx$$

当$p>0$时收敛，由此积分所确定的p的函数叫做伽马函数，通常记为

$$\Gamma(p)=\int_0^\infty e^{-x}x^{p-1}dx \qquad (p>0) \qquad (1\text{-}3.1)$$

当$p=1$时，$\Gamma(1)=\int_0^\infty e^{-x}dx=1$ (1-3.2)

取 $$\Gamma(p+1)=\int_0^\infty e^{-x}x^p dx$$

对此积分应用分部积分法，

$$\Gamma(p+1)=-\int_0^\infty x^p de^{-x}=-x^pe^{-x}\Big|_0^\infty+p\int_0^\infty e^{-x}x^{p-1}dx$$

当 $p>0$ 时 $\lim\limits_{x\to\infty}x^{p}e^{-x}=0$，所以

$$\Gamma(p+1)=p\int_{0}^{\infty}e^{-x}x^{p-1}dx=p\Gamma(p)$$

于是得到常用的递推公式

$$\Gamma(p+1)=p\Gamma(p) \qquad (p>0) \tag{1-3.3}$$

逐次利用此公式，可得

$$\begin{aligned}\Gamma(p)&=(p-1)\Gamma(p-1)\\&=(p-1)(p-2)\Gamma(p-2)\\&=(p-1)(p-2)\cdots(p-m)\Gamma(p-m)\end{aligned} \tag{1-3.4}$$

此式说明自变量大于1时的Γ函数值的计算可化为自变量小于1时Γ函数值的计算。

特别是当 $p=n$ 是正整数时有

$$\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)=n(n-1)\cdots2\cdot1\Gamma(1)=n!$$

即

$$\Gamma(n+1)=n! \tag{1-3.5}$$

在式（1-3.1）中作变换 $x=t^{2}$，可得Γ函数的另一种形式：

$$\Gamma(p)=2\int_{0}^{\infty}e^{-t^{2}}t^{2p-1}dt \tag{1-3.6}$$

由此式可推出今后常用到的 p 为奇数之半的Γ函数值。当 $p=1/2$ 时，

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=2\int_{0}^{\infty}e^{-t^{2}}\,dt=\sqrt{\pi} \tag{1-3.7}$$

此积分是熟知的概率积分。利用递推公式可推出

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3\sqrt{\pi}}{4}$$

一般，

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi} \qquad (1\text{-}3.8)$$

由式（1-3.1），Γ函数只当 $p>0$ 时有定义，现在利用式（1-3.3）可把Γ函数的定义域扩大到不含负整数的负数域上。当 $-1<p<0$ 时，可由

$$\Gamma(p)=\frac{\Gamma(p+1)}{p} \qquad (1\text{-}3.9)$$

定义Γ(p）的值，因这时 $p+1>0$，$\Gamma(p+1)$是有定义的，故由上式Γ(p）有确定的值。同样可由式（1-3.9）定义Γ函数在 $-2<p<-1$ 的值，逐次做下去就可将Γ函数的定义域扩充到不包含负整数的负数域上了。

在 $p=0$ 处

$$\lim_{p\to0}\Gamma(p)=\lim_{p\to0}\frac{\Gamma(p+1)}{p}=\infty \qquad (1\text{-}3.10)$$

依此类推，在 p 为负整数处，当 $p\to-1$，$p\to-2$，…，$p\to-n$（n 为正整数）时，$\Gamma(p)\to\infty$。因而我们规定当 $n=0$，-1，-2，…时

$$\frac{1}{\Gamma(n)}=0 \qquad (1\text{-}3.11)$$

Γ函数的图形如图 1.1。

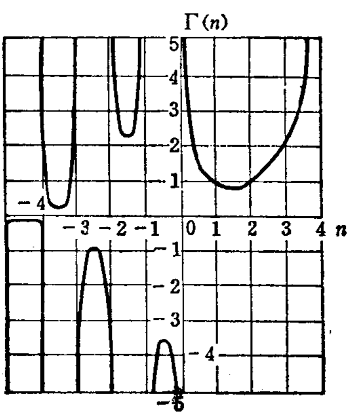

图1.1 Γ函数的图形

Γ函数有下列公式

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p)=\frac{\pi}{\sin p\pi} \qquad (1\text{-}3.12)$$

证　当 $0<p<1$ 时，由定义有

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p)=\int_0^\infty e^{-x}x^{p-1}dx\int_0^\infty e^{-y}y^{-p}dy$$

$$=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x+y)}x^{p-1}y^{-p}dxdy$$

作变量变换，令 $u=x+y$，$v=\frac{x}{y}$，即有 $x=\frac{uv}{1+v}$，$y=\frac{u}{1+v}$，得

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p)=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-u}v^{p-1}\frac{dudv}{1+v}$$

$$=\int_0^\infty e^{-u}du\int_0^\infty \frac{v^{p-1}}{1+v}dv=\int_0^\infty \frac{v^{p-1}}{1+v}dv$$

由已知积分

$$\int_0^\infty \frac{v^{p-1}}{1+v}dv=\frac{\pi}{\sin p\pi}$$

故得

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p)=\frac{\pi}{\sin p\pi}$$

这就证明了当 $0<p<1$ 时式（1-3.12）成立。对于其它 p 值可直接应用式（1-3.3）推出。例如 $1<p<2$，设 $p=q+1$，由式(1-3.3)

$$\Gamma(p)=\Gamma(q+1)=q\Gamma(q)$$

$$\Gamma(1-p)=\Gamma(-q)=-\frac{1}{q}\Gamma(1-q)$$

由此得

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p)=-\Gamma(q)\Gamma(1-q)=-\frac{\pi}{\sin q\pi}$$

由于$0<q<1$，有$\sin q\pi=\sin(p-1)\pi=-\sin p\pi$，代入上式，有

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p)=\frac{\pi}{\sin p\pi}$$

其它p值可仿此得证。

二、B函数

含参量p，q的广义积分

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$$

当$p>0$，$q>0$时收敛，由此积分所确定的p，q的函数叫做贝塔函数。记作

$$B(p,\ q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx \qquad (1\text{-}3.13)$$

作变换$1-x=t$，于是

$$B(p,\ q)=-\int_1^0 (1-t)^{p-1}t^{q-1}dt$$

$$=\int_0^1 (1-t)^{p-1}t^{q-1}dt$$

$$=\int_0^1 x^{q-1}(1-x)^{p-1}dx$$

所以

$$B(p,\ q)=B(q,\ p) \qquad (1\text{-}3.14)$$

即积分式（1-3.13）中指数p与q可以对调。

作变换$x=\sin^2\varphi$，得B函数的另一种形式：

$$B(p,\ q)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2p-1}\varphi\cos^{2q-1}\varphi\, d\varphi \qquad (1\text{-}3.15)$$

可以证明：B函数与Γ函数间有关系式：

$$B(p,\ q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \quad (p>0,\ q>0) \qquad (1\text{-}3.16)$$

证　由式（1-3.6）