高等学校教学用書

高等数学教程

第一卷

陈藎民 著

机械工业出版社

高等工業学校教学用書

高等数学教程

第一卷

陈藎民 著

机械工業出版社

ZNB7/5

序

本書是为工学院編写的高等数学教科書，全書分为四卷，前三卷分别为：解析几何学、数学分析初步、数学分析的进一步发展。这三卷的內容系根据高教部教学大綱(350～380学时)的要求而編写的，曾在北京工业学院以190学时講完（第一卷44学时，第二卷76学时，第三卷70学时），有的专业因为略去了該专业不要求的部分，以160学时講完。第四卷为补充教材，內容系根据某些专业的要求而編写的，其中包括复变函数、拉氏变换、福里哀变换、矩陣分析、概率論等等，約需32～80学时講完，随各专业需要的不同而定。这些項目为了便于不同的专业可以选讀起見，都尽可能彼此独立地加以叙述。

本書在編写时，曾力图遵循辯証唯物主义的認識途徑："从生动的直观到抽象的思維，从思維到实踐❶"，以及"实踐、認識、再实踐、再認識❷"来安排全書的內容。因为，实踐是眞理的标准，也是認識的基础，只有这样才能使学生获得理解而巩固的数学知識，不仅在其他課程的学习中可以灵活应用，而且在日后也能以此为基础进一步地加以充实和扩大数学知識，以适应技术发展的需要。例如在叙述标积、矢积、行列式、导数、微分、不定积分、定积分、重积分、曲綫积分、曲面积分等等概念时，都从具体的問題加以分析、抽象、概括，引出它們的定义。不过，这些定义都只从一个具体事例引出，而不从多个事例引出，因为我認为：多举事例就会分散学生的注意力，反而不易掌握概念的本質屬性，与其在得出定义之前，多举事例，不如抽一部分事例放在得出定义之后来研究，使学生对于定义有更深刻、更巩固的印象，例如导数与定积分的概念我就是这样处理的。又如在一元函数微分学中，把微分法（認識）和它的

❶ 列宁：黑格尔"邏輯学"一書摘要（人民出版社1953年版，134頁）。
❷ 毛泽东选集第一卷295頁。

应用（实踐）都交錯地加以編排，使学生在循环往复的实踐基础上逐步提高来学习微分学的基本理論（中值定理），并以函数作图与方程的近似解作为微分学总結性的实踐，这是企图貫徹辯証唯物論的知行統一观的。在一元函数积分学中，把初等函数积分法的討論放在定积分之后，使学生在前两章的实踐基础上，来学习积分法理論，这也是企图貫徹知行統一观的。至于微分方程紧接在微积分学之后，作为微分法与积分法总結性的实踐，一方面固然是貫徹上面的企图，而另一方面也是为了配合第三学期理論力学的应用才这样做的。

此外，我也拟定下面几条作为編写的原则：

（1）貫徹爱国主义与国际主义的思想教育，并以辯証唯物主义的观点与方法来闡明基本概念与理論；

（2）尽可能配合其它課程（如普通物理与理論力学）的进度，使数学在其它課程中得到及时的应用；

（3）注意系統性与可接受性，并与中学的知識相衔接；

（4）說理力求簡明，举例須有目的，并且要簡单而有說服力；

（5）要深入分析难点或分散难点，以减輕讀者的困难。

我对于以上各点，虽然曾尽过最大的努力，企图貫徹于万一，但是限于政治与业务的水平、学习苏联先进經驗为时不久、編写时間又匆促，显然不能做到这些要求；即使有的地方，在主观上認为做到了一部分，可是恰当与否，仍有待于多次实踐才能判定。譬如反函数概念与台劳公式都是讀者的难点，我用詳細分析的方法处理。换元积分法（§15.4）也是难点，我用分散的方法把它分为两种情形：抽出其中的一种作为积分形式不变性，来推广基本积分表的作用；其它一种仍作为换元法来处理使問題簡单化。又对于有理函数积分法（§17.6）也用分散的方法：先在分解积分法（§15.4）中，通过举例作些預备功夫，然后在第十七章中进行有系統的討論。以上所举难点的处理都只是一种尝試，不能遽然

認为恰当，尙有待于同志們的帮助与指正。

我在1950年，由于任課的需要，曾編过工学院的数学分析講义。但經过教学改革、学习苏联先进經驗、鉆研苏联教材与教学原理后，就发覺我的講义有进一步加以修改的必要。因此，根据我对学习的体会，提出前面的基本精神与編写原則，并結合我国的具体情况，于1956年开始重行增删原有講义，改名为“高等数学教程”。这次，接受国防工业出版社的建議，把它陆續印出来，向广大同志們請求教益，希望同志們指出錯誤和缺点，以便再版时加以补充和修正。

在本書緒論中关于中国数学史部分，曾蒙科学院李儼先生指正；又本書在編写过程中，北京工业学院数学教研組同志們曾給以很大的帮助，并于試教后提出很多宝貴的意見，謹向他們一并表示衷心的感謝。此外，国防工业出版社編輯徐家宗同志在整理本書原稿时，曾提供了許多建議，特向他表示深切的謝意。

陈藎民

1958年2月于北京

第 一 卷

目　次

第 一 編　平面解析几何学

第一章　坐　标　法

第二章　曲綫与方程

第三章　直　　綫

第四章 圓 錐 曲 綫

第五章 参 量 方 程

第六章 极坐标 曲綫的分类

第七章　行列式及綫性方程組

第二編　空間解析几何学

第八章　矢量代数学基础

第九章 空間的曲面及曲綫

緒　　論

§1　恩格斯的数学定义

数学的研究对象是什么？这是数学的哲学問題，哲学观点不同的人就有不同的答案。唯心論的哲学家与数学家，如英国的罗素❶，他說："数学是永远不知道所談論的是什么，也不知道所說的是否眞实的一种科学。"他把数学看作是癡人說梦的科学，旣不知道所談的是什么，又不知道所說的是眞是假。这种荒誕无稽的說法，显然是不可知論者的本来面目，不能作为科学的数学定义。其他数学家，如美国的皮尔斯❷，他想不涉及数学的对象，只从数学的方法給数学下定义。他說："数学是推出必然的結論的科学。"这种說法不仅犯了定义太寬的邏輯錯誤，也未脫唯心論者空洞无际的窠臼，自然也不能作为数学的定义。德国著名数学家克莱因❸曾反对这种唯心的看法，他說："把数学的研究对象看作是空虛的記号，这是一切科学报死的鐘声。"他也同意托馬教授。把那些只研究抽象記号的扩張，而不注意記号的实际意义的人，給以"无思想的思想家"的称号。但是，克莱因并沒有提出他的数学定义。我們認为恩格斯所說的：

数学是以现实世界的空間形式与数量（注1）关系为对象的科学。这是最正确的数学定义。我們知道，任何一門科学都是遵

---

❶ 見B.Russell:International Monthly, Uol.4, 1901, p.84。

❷ 見J.W.Young:Lectures on fundamental concepts of algelra and geometry, "Defintion of Peirce and Russell"。

❸ F.Klein:Elementarmathematik Vom höheren Standpunkte aus, Band II, 384頁。

循邏輯方式：由簡单到复杂，由具体到抽象，在抽象中把握自己的对象再向抽象的理論而发展的。恩格斯的定义，就具有这样的邏輯性。又从历史上来看，任何一門科学的对象，不是永恒不变的，它是随着社会生产的活动和其他科学的发展而发展的。恩格斯的定义，也具有这种历史性。恩格斯提出这个定义的时候，离現在虽然有半个世紀以上，数学已有非常迅速的发展，但是，他的定义仍能随着数学的发展而得到日益丰富的含义。

苏联数学家科尔莫果洛夫院士，在他为苏联大百科全書而写的数学論文中，把数学对象的发展分为三个阶段来闡明恩格斯的定义的邏輯性和历史性，已引起数学界普遍地贊同。他把17世紀以前的时期作为数学发展的**第一阶段：数学的对象为数、量和几何图形**；19世紀初期以前作为**第二阶段：数学的对象为量的变化和几何图形的变换**；19世紀中期以后为**第三阶段：数学的对象为現实世界最一般性的数量形式和空間形式**。恩格斯的定义，就包含了这三个不同的发展阶段，所以，我們認为它是最正确而最令人满意的一个定义。現在我把这三个阶段，再在下一目中，作一簡要的說明，以助理解，并供以后参考。

§2 数学发展的三个阶段

数学不仅因人类生活的需要而产生，也因人类生活的发展而发展。人类在原始共产社会时代，曾有一个极其漫长的时期，过着采集、漁猎和畜牧的生活。由于这种生活都具有数量关系，就引起人們对于数量发生了多寡的心理活动，因而不自觉地用了"一一对应（注2）"与"数一数"的方法来处理数量問題而得到量与数的概念。例如計算牲畜的多寡时，就在人們的意識中留下一头牛、二头牛、…，一只羊、二只羊、…等带有事物名称及单位的**数量**；或一头、二头、…，一只、二只、…等仅带有单位名称的**数量**，形成了数量的感性認識。人們凭借这种感性認識，又在实踐中，經过邏輯的思考，把单位名称去掉，得到1，2，

3，4，…等数的概念，同时，也得到量的概念。

概念是在感性認識的基础上发展起来的。它是人們对于事物的理性認識。它所反映的，不是事物的一切为感官所达到的屬性，而是經过人們的思考，从事物中抽出来的本質屬性，非本質屬性并不包含在概念中，例如单位与事物的名称就不包含在数的概念中。由于数是量的最抽象的表現，所以就产生了数学家高斯，黎曼以及狄德頓等人附和哲学家康德（注3）的唯心看法，認为数是先驗概念（即在經驗之前，已經有的先天概念。）以及数学家克郎內克❶認为整数是上帝所創造的其它的数是人創造的等等荒謬說法。

我国是世界上文明发达最早的国家之一，对于各門科学都有偉大的貢献，据說：在公元前一万七千年，我們祖先已有天文的知識❷。天文历法是和数学有密切关系的，由此可知，在很远的年代，我們祖先也有数学的知識。但因缺乏可信的史料，詳細情况不得而知了。我們祖先遺留下来的数学書，最古的有周髀算經和九章算术（注4），它們是公元前100年前后的作品，但是，原本早已失傳，現在所流傳的都是經过后人修改和补充过的。这两本数学書都总結了我国过去劳动人民由于生产斗爭而获得的算术，代数，几何及三角的宝貴知識。其內容系依实用的需要而分类，并且处处表現出数学与实际生活相联系的精神。

我国在数学上的成就，有許多方面都比其他各国来得早。例如：

（一）关于正負数的概念和运算方面：在九章算术的第八章“方程”中，就有正負数的加减法則；又在朱世杰著的算术启蒙（公元1299）中，还有正負数的乘除法則，而印度到了七世紀才有正負数的加减法則。欧洲大陆的数学家在16世紀时，还不了解

❶ 見F.Cajori: A History of mathematics (1919年)，p.362。

❷ 見李儼著：中国算术小史，第3頁。

正負数的意义。德国的代数学家史蒂費尔(注5)在1544年还說：負数是不合理或虛构的数，尤其两个負数相乘应当是正数，更使許多数学家覚得惊奇。后来法国笛卡儿在他所著的解析几何学中，把負数用之于坐标法，才認負数也是实在的数。

(二)关于π的近似值方面：我国数学家对于圓周率的研究也是很早的，到了南齐、祖冲之(429～500)，他用綴术(已失傳)就求得π的值在3.1415926与3.1415927之間，幷定$\pi=\frac{355}{113}$叫做密率；$\pi=\frac{22}{7}$叫做約率。其中的密率，在西方国家中，要到1000余年后才由德人渥图求出(1573年)。

(三)关于插值法方面：在九章算术的第七章"盈朒"中，就有直綫插值法(就是高中代数第七章"对数"中的补插法)，后来，刘焯(544～610)推广到二次曲綫插值法，郭守敬(1231～1316)又推广到高次曲綫插值法。在西方各国中，英国的华利士(1616～1703)首先用插值法研究π的值就比我們晚了一千多年。

(四)关于方程的解法方面：祖冲之应用九章算术中的开方法，求得一般二次方程及三次方程的正根，以及王孝通的三次方程的解法，都比阿拉伯人阿尔卡利斯密(注6)的解法早数百年。宋、刘益在他著的議古根源中(約1080年，已失傳)，提出高次方程的解法，后經賈宪加以改良，这和英人和湦在1819年所发現的方法相同。但比刘益、賈宪已晚了六七百年。

印度、埃及和希腊等也是世界上文明发达很早的国家。埃及的測地术(几何的經驗知識)，在公元前六七世紀时傳到希腊，希腊人就在这种感性知識的基础上，經过分析，抽象幷不断地研究了一些个别問題(例如上古几何学三大問題，見本緒論末注7)，而发展成为有系統的几何学，編成几何原本。几何原本中，以欧几里得所編的內容为最丰富而組織最严密，因此，数学界曾以欧几里得作为几何学的代名詞来紀念这位偉大的几何学家。

印度在公元一世紀时，就和我国交流文化，特别是七世紀以后，由于佛教傳入我国，对于数学也发生过影响。印度在数学发展的第一阶段中，对于代数和三角都有特别的貢献。从八世紀起，印度与希腊的重要数学書都由阿拉伯数学家譯成阿拉伯文；于是古代东方与希腊的数学文化就汇合在阿拉伯，到了十一世紀末，十字軍东征后，阿拉伯的数学，又不断地傳入欧洲，譯成拉丁文。那时的欧洲，正从黑暗时代走向近代市民社会，随着生产的发展，需要科学日益迫切，于是数学在第一阶段形成的数、量与几何图形的概念以及算术、代数、几何、三角等初等数学就在欧洲轉入第二阶段发展。

数学发展的第二阶段，可以說是从1637年解析几何的出版开始，它的特征在于引入了运动与变化的概念，以及形与数的結合。它和第一阶段以靜止与孤立的观点研究数与形，有着显明的不同。恩格斯在自然辯証法中說："笛卡儿的变量是数学中的轉折点，运动与辯証法因此就进入了数学，微分法与积分法也因此慢慢成为必要的东西，于是，不久就产生了微积分。"这也說明了由第一阶段轉入第二阶段的特征。数学在第二阶段中，由于辯証法的引入，它就比較完善地反应了现实世界的空間形式和数量关系。它不仅直接地为社会生活服务，也通过力学、物理学和技术科学促进生产的发展，同时，自然科学与技术科学也不断地提出新的数学問題，推动数学的发展，給数学轉入第三阶段的发展准备了良好的条件。

数学发展的第三阶段是从19世紀下半期开始的，它的特征在于数学的对象推广到更高度的普遍化与抽象化，使过去已認为很抽象的对象也成为现在对象的特殊形式，并且数学自己的各部門也进一步地密切交融起来。

§3　实踐是眞理的标准

数学对象的高度抽象化是不是还能反映客观的实际情况呢？

这可以由实踐来証明。譬如黎曼几何应用于相对論，抽象代数与希氏空間应用于量子力学，量子力学与相对論又应用于原子能的研究，而原子能又应用于医学、农业、工业并由苏联建設起世界上第一座的原子能发电站、第一艘原子能破冰船以及在設計中的原子能飞机，这些都証明了数学的抽象化更能接近客观現实的实际情况。

实踐是眞理的标准，是馬列主义哲学的認識論的基本原理之一。馬克思在費尔巴哈論綱中曾經指出："人的思維是否具有客观的眞确性，这个問題并不是一个理論的問題，而是一个实踐的問題。人应該在实踐中証明自己思維的眞确性，即自己思維的現实性和力量，亦即自己思維的此岸性。关于离开实踐的思維是否現实的爭論，乃是一个純粹煩瑣哲学的問題❶。"毛主席在实踐論中也說："通过实踐而发現眞理，又通过实踐而証实眞理而发展眞理。…实踐、認識、再实踐、再認識，这种形式，循环往复以至无穷，而实踐和認識之每一循环的內容，都比較地进到高一級的程度。这就是辯証唯物論的全部認識論，这就是辯証唯物論的知行統一观❷。"我們从数学的发展史来看，也証明：实踐在人类認識过程中的主导作用。譬如負数的概念，初由阿拉伯傳到欧洲时，有許多数学家不能理解，后經数世紀的实踐，就逐漸認識了这个概念并发展它的作用。又如虛数在16世紀中叶是由于求方程的解而发生的。从它的命名，可知在当时并不知道它也是反映客观現实的量，經过数学家数世紀的实踐，到了19世紀初，才完全明白，并建立了复变函数論的一門数学。后来俄国力学家茹可夫斯基（1847～1922）又应用复变函数論創造了飞机翼的理論。数学史上还有許多实例，都可以証实列宁和毛主席的指示，所以我們学习数学，旣不可以犯教条主义，也不可以犯經驗主

❶ 見馬克思恩格斯文选（两卷集），第二卷，401頁。

❷ 見毛泽东选集，第一卷，285頁。

义，必须以“認識与实踐統一”的观点来学习。

§4　初等数学与高等数学的区别

通常所謂初等数学是指中学的算术，初等代数，初等几何及三角等科目而言，其它的数学科目都是高等数学。但这不是根据数学本身某一特性而划分的，所以，这不是数学的分类，这只是数学教育上的习慣語。現在从观点与方法两方面指出它們的特征如下。

第一：初等数学是以静止的观点研究对象，而高等数学是以运动的观点研究对象的。初等数学的对象是不变的数量与不变的图形。高等数学的对象是变化的量和变化的图形。

初等数学是以孤立观点研究对象的，因此，初等代数与初等几何就各自独立地建立起来，也各自独立地向前发展，并沒有一个基本原理把数与形結合起来。但是，高等数学就与此相反。

第二：高等数学常用极限方法来研究它的对象。极限是以动的，有联系的，以及量变引起質变的观点研究数量变化的一种方法。它是高等数学的重要方法，沒有它，就沒有高等数学，但是初等数学沒有它，并不受影响。

总起来簡单地講：初等数学的研究对象是常量，高等数学的研究对象是变量。但这并不是說高等数学中沒有常量。我們应該知道：常量与变量是对立統一、互相依存、互相轉化的。它們在高等数学中都是一样的重要。只不过变量是占主导的地位，所以我們就說高等数学的研究对象是变量。在下一目，再把它們詳細地講一講，这对于以后的学习是有很大帮助的。

§5　常量与变量

量是客观事物的屬性之一，它常表現出可以被测量而得到数。所以，凡是可以测量的对象都叫做量。例如：长、寬、面积、体积、温度、时間、速度、加速度，以及电路中的电压、潤滑油的

粘滞度、…都是量。由量测出来的数，叫做量的值，或数值。

凡討論一問題时，在該問題中，始終保持相同数值的量，叫做常量；取不同数值的量，叫做变量。譬如：

（一）公共汽車由甲站向乙站开动时，我們把車中的汽油测量10次，就有10个不同的数。此时車离甲站的距离也有不同的数。但是，把車中的乘客"数"10次，就会得到10个相同的数。所以，車的乘客是常量，汽油与距离是变量。常量与变量不同之点，在于前者取得10个相同的数，而后者取得10个不同的数。由这一点，可知常量是变量的特殊情形。又在甲乙两站之間，乘客虽然是常量，但在車的整个行程中，乘客又是变量而不是常量；至于車的汽油，当机器停止不动时，它又是常量而不是变量；所以常量与变量，在一定的条件下，要向对方轉化的。这就說明它們是对立統一的；也說明現实世界中，沒有不变的量。常量是暫时的、相对的，只有变量是永恒的、絕对的。

（二）玻意耳和馬略特研究定量的气体时，把温度看作是常量，求出气体体积 V 与压强 P 的依从变化的关系为

$$PV=C, \qquad C\ 为常量。$$

又盖呂薩克研究气体时，把压强看作是常量，求出气体体积 V 与温度 T 的依从变化的关系为

$$\frac{V}{T}=\frac{V_0}{T_0}.$$

又查理研究气体时，把体积看作是常量，求出压强与温度的依从变化的关系为

$$\frac{P}{T}=\frac{P_0}{T_0}.$$

但是，在自然界或工程上所遇到的气体幷不如此。譬如地面空气受热以后，向空中上升时，它的压强、体积、温度等都是同时发生变化的。它們只在一定条件下，才轉化为常量。