现代数学译丛

偏微分方程的现代方法

M. 谢克特 著

科学出版社

现代数学译丛

偏微分方程的现代方法

M. 谢克特 著
叶其孝 译
齐民友 校

科学出版社
1983

内 容 简 介

本书介绍线性偏微分方程理论的最新成果，以及现代技巧和方法(泛函分析方法)．本书主要讨论任意阶的单个的线性偏微分算子、讨论各种问题的解的存在性、唯一性、估计和解的正则性．本书只要求读者具有扎实的数学分析知识，以及实变函数论和复变函数论初步知识，有关泛函分析的内容在本书中有专门章节介绍．

本书可供数学工作者、高等院校有关专业教师、高年级大学生和研究生参考．

Martin Schechter

MODERN METHODS IN PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS
——AN INTRODUCTION

McGraw-Hill 1977

现代数学译丛

偏微分方程的现代方法

M. 谢克特 著
叶其孝 译
齐民友 校

责任编辑 张鸿林
科学出版社 出版
北京朝阳门内大街137号

中国科学院开封印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1983年7月第一版　开本：850×1168 1/32
1983年7月第一次印刷　印张：8 3/4
印数：0001—9,760　字数：226,000

统一书号：13031·2266
本社书号：3106·13—1

定价：1.65 元

序　言

偏微分算子这个课题是非常广泛的，而且包含了分析的许多方面的内容．只要注意到以下事实就可以使我们相信这一点，即单个复变量解析函数的研究实际上是研究一个简单的偏微分方程组(Cauchy-Riemann 方程组)的解．况且，就我们现在的知识水平来说，我们只了解很少一点东西．随着科学理论变得愈复杂，所提出的偏微分方程就愈多而且更加变化多端．别的数学分支也做出了它们的一份贡献．可能出现的偏微分方程和方程组类型之多是出乎意想的．

在已经出版的以偏微分方程为课题的各种类型的书籍中，看来可以分为两类．其中一类介绍了古典物理方程(波动方程、传热方程和位势方程)的研究而且大多数是应用分离变量法和 Fourier 级数．这部分理论已经被彻底地研究了，而且近乎完备．关于这方面的课题有许多写得很出色的书．因为它们的主要部分在五十年以前就已经知道了，所以可以把它们称之为偏微分方程的古典理论．

在过去三十年中，在新的方向上的研究特别活跃．研究了高阶方程和方程组以及包括那些不能归入上面所说的范畴中的那些问题．甚至解的概念也扩大了，而且比偏微分算子更一般的算子也很普及了．

本书的目的是向学生介绍在较新的理论中用到的现代技巧和方法．我要求学生对所用到的有力工具有所体验，但是我并不要求学生埋头于细节，那会掩盖住隐藏在方法后面的基本概念．我试图采取中间道路——去对付比古典理论中所考虑的更一般的问题，但是不要求使用已有的最一般的和精细的方法．关于后者我试图有节制地介绍一些新的工具，而且只利用那些为了得到有意义的(虽然不一定是最强的)结果所需要的新工具．我希望通过这样一种方式以使学生将能从密林中辨别出大树来．

我把背景材料保持在一个最低限度上的另一个理由是为了使学生在较早的学习阶段中就可以学习这方面的理论. 本书的内容在 Yeshiva 大学一年级研究生中已经教了十多年. 而且我曾用这种方式来介绍现代偏微分方程理论使得大学生也可以接受. 读者应具有高等微积分的基本知识. 实际上没有用到 Lebesgue 积分理论. 只是提到 L^2 是完备的. 任何人如果他愿意接受这一事实, 那就用不着积分理论中更多的背景材料了. 单个复变量的解析函数理论只在几个地方用到, 即使用到也只是以一种初等的方式用到它们. 所有关于 Hilbert 空间和线性代数的背景材料在需要用到的地方都给出来了. 用这么少的一点知识就可以学到那么多的知识, 这一点确实有点出乎意料.

众所周知, 一本偏微分方程的书只能包括已有的基本材料的一小部分. 作者必须作出选择, 但是如何选择不是立足于逻辑基础上的. 许多作者选择他们认为最重要的内容, 但他们的选择的主观性是相当明显的.

在选材方面本书也是这样. 我选择的大部分材料是我认为将会启发学生并把他们引导到偏微分方程以及分析的其它分支的那样一些技巧, 这些技巧可以广泛地应用到许多其它问题中去. 关于在其它情形中可以期望什么, 可以采用什么方法, 我也要给读者一个清楚的概念. 此外, 我要有一个统一的主题和观点; 本书始终只考虑任意阶的单个线性偏微分算子. 对于每个问题我寻求解的存在性、唯一性、估计和正则性. 我试图挑出那些在本书中始终可用的而不是只在一、两个孤立的例子中能用的解析工具. 只要有可能, 我总是试图只采用同样一些函数空间(基本上是 $L^2(\Omega)$ 空间).

为了获得本书的材料而用到的各种研究论文, 我曾试图适当地声明. 但是我相信我还从无数其它的文献中直接或间接地得到帮助. 此外, 我在文献中加上了几本关于现代偏微分方程理论的书籍.

M. 谢克特

1976.6

目　录

第一章　解的存在性

1-1　引　　言

一个偏微分方程，顾名思义，是一个含有偏导数的方程．当然，导数是对多于一个变量的未知函数求的(如果函数是已知的，我们可以求出导数从而它就不再出现了．如果未知函数只依赖于一个变量，我们就把方程叫做常微分方程)．最简单的偏微分方程是

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x}=0 \tag{1-1}$$

其中未知函数 u 依赖于两个变量 x, y．方程(1-1)的解显然是

$$u(x, y)=g(y) \tag{1-2}$$

其中 $g(y)$ 是任意的只依赖于 y 的函数．尽管这个例子十分简单，但是我们还是应该更为仔细地考察一下．首先，方程(1-1)的“解”指的是什么呢？你们会说：“那是显然的；我们指的不过是一个函数 $u(x, y)$，当把它代入方程(1-1)时，使方程成立．”但是稍加思考立即得知会出现一些问题，虽然对于这个特殊的方程来说，这些问题是容易解决的．

我们恰恰不能把任何所提出的解代入方程(1-1)：因为我们首先要对这个解进行微分．因此，为了使得 $u(x, y)$ 是方程(1-1)的一个解而必须加在 $u(x, y)$ 上的第一个要求是 $u(x, y)$ 具有关于 x 的导数．第二个要求，方程(1-1)在 x, y 的哪些值上成立呢？是所有的实数值呢，还是一部分呢？无疑这是必须规定的．其次，让我们来考察一下我们的“解”——等式 (1-2)．$g(y)$ 是什么样的函数类呢？它一定具有关于 y 的导数吗？或者它甚至可能是间断的呢？或许它根本不必是一个普通意义下的函数，而是一个所谓的

“分布”呢(如果你从未听说过“分布”这个名词,那对最后一个说法就不必去理它).

另一个值得注意的事实是不管我们允许的是什么样的函数类,方程(1-1)将会有许多解.如果想要一个特解,那么我们必须规定附加的限制或“边界条件”.

最后,上述一切的结果是,有了一个偏微分方程,我们还必须知道该方程在什么地方适用,什么函数类可以作为解.这方面的资料通常是由导出该方程的应用学科所提供的.但是有一些重要的情形,即从应用来说“边界条件”是什么还不清楚时,那就必须通过对方程的研究来决定“边界条件”.然后用它们来确定在应用中“有意义”的那些情况.

不用说,可以凭空设想出来的偏微分方程(和方程组)的数目是无穷多的.在应用中提出的方程的数目也是不小的.经验已经向我们表明稍为修改一下方程(例如改变某一项的符号)就可能使解在性质上完全不同,也就要用完全不同的方法,去解这些方程,这就使问题变得复杂了.所以对以下情况不必感到惊讶,即,到目前为止我们距离系统地处理偏微分方程还差得远呢.充其量,现在的知识水平可以说只是积累了在特殊情形下所用的特殊的方法(用“技巧”这个词甚至更为恰当).因此任何偏微分方程的论著,不论它多么广博,一定只能限于一个相对说来是较小的课题范围内.

我们选定要讨论的主要是线性偏微分方程,因为它们最容易处理.包含一个未知函数 $u(x_1, \cdots, x_n)$ 的最一般的线性偏微分方程可以写成如下形式:

$$\sum_{\mu_1+\cdots+\mu_n\leqslant m} a_{\mu_1,\cdots,\mu_n}(x_1, \cdots, x_n)\frac{\partial^{\mu_1+\cdots+\mu_n}u}{\partial x_1^{\mu_1}\cdots\partial x_n^{\mu_n}}=f(x_1, \cdots, x_n) \quad (1\text{-}3)$$

其中求和是对所有的非负整数 $\mu_1, \cdots, \mu_n$ 进行的,而 $a_{\mu_1,\cdots,\mu_n}$ 和 f 是给定的函数(因为我们至今还没有定义什么叫线性方程,所以也可以把方程(1-3)作为线性方程的定义).

任何打算研究偏微分方程的人只要让他看看方程(1-3)就可

能望而生畏了(如果方程(1-3)没有起到这样的效果，那么我们在以后就会做得好些)．但是一旦我们经受住这最初的冲击，我们就会明白：写法上稍稍缩短一点就有许多好处．例如，如果我们令 μ 表示多重指标 $\mu=(\mu_1, \cdots, \mu_n)$，其模为 $|\mu|=\mu_1+\cdots+\mu_n$，又设 x 表示向量 $(x_1, \cdots, x_n)$，并记

$$D^\mu=\frac{\partial^{|\mu|}}{\partial x_1^{\mu_1}\cdots\partial x_n^{\mu_n}}$$

那么方程(1-3)就变成

$$\sum_{|\mu|\leqslant m} a_\mu(x) D^\mu u(x)=f(x) \tag{1-4}$$

(1-4)看起来要好得多．

让我们对方程(1-4)考察得更仔细一点．左端包含一些项的和，其中每一项都是一个系数与 u 的一个导数的乘积．我们可以把它看作是作用在 u 上的微分算子 A．那么，我们可以把方程(1-4)更简单地写作

$$Au=f \tag{1-5}$$

其中

$$A=\sum_{|\mu|\leqslant m} a_\mu(x) D^\mu \tag{1-6}$$

算子 A 称为线性的，因为对于所有的函数 u_1, u_2 和所有的常数 α_1, α_2,

$$A(\alpha_1 u_1+\alpha_2 u_2)=\alpha_1 A(u_1)+\alpha_2 A(u_2) \tag{1-7}$$

成立．因为算子 A 是线性的，所以方程(1-5)叫做线性方程．

关于方程(1-4)的解我们指的是什么意思呢？因为方程中包含一直到 m 阶且包括 m 阶在内的导数，看来要求这些导数存在且连续，而当把它们代入方程(1-4)时等号成立这是十分自然的．我们就把这作为目前的解的定义．后面，我们将发现，对于解的这个定义进行重大的修改，如果说不是必须的话也是方便的．

我们要求方程(1-4)在什么地方成立呢？显然，方程应在 $(x_1, \cdots, x_n)$ 空间的某个子集 Ω 中成立．这个子集必须具体规定．当然，为使 $u(x)$ 的适当阶的导数有定义，$u(x)$ 必须在 Ω 的每一点的邻域中有定义．因为我们要求解在 Ω 中有直到 m 阶的连续导

数，我们应当给这种函数集合一个名称．我们用 E^n 表示 n-维坐标空间．

定义 1-1 设 Ω 是 E^n 中一个集合．我们用 $C^m(\Omega)$ 来表示在 Ω 中每点的邻域内有定义且在 Ω 中具有阶数 $\leqslant m$ 的各阶连续导数的一切函数的集合．如果对于每个 m，函数 u 都属于 $C^m(\Omega)$，u 就叫做无穷次可微的，而且说成是属于 $C^\infty(\Omega)$ 的，即

$$C^\infty(\Omega)=\bigcap_{m=0}^{\infty}C^m(\Omega)$$

对于 $m=0$，我们记作 $C(\Omega)=C^0(\Omega)$．这就是 Ω 中的连续函数的集合．

1-2 无解的方程

关于方程 (1-4) 可以提的第一个问题是：在一给定的集合 Ω 中 (1-4) 是否有解．为使得我们的环境尽可能有助于说明问题，我们愿意把 Ω 取作由 E^n 中满足

$$x_1^2+\cdots+x_n^2<r^2$$

的点 $(x_1,\ \cdots,\ x_n)$ 组成的球 Σ_r，其中 r 是某个正数．（把 Σ_r 叫做球的理由是明显的．）我们甚至愿意假定函数 f 和 A 的系数在 Σ_r 中是无穷次可微的（即它们属于 $C^\infty(\Sigma_r)$）．在这样的条件下人们有理由期望方程 (1-4) 保证有解存在．遗憾的是事与愿违．H. Lewy (1957)（读音是 Layvee）发现了一个简单的例子，研究一下这个例子是有启发性的．

背景是三维空间，用 $x,\ y,\ t$ 表示坐标（把字母 z 留给另一个量）．方程写出来是简单的：

$$u_x+iu_y+2(ix-y)u_t=f(x,\ y,\ t) \tag{1-8}$$

有必要作一点解释．这个方程的系数是复值的，而到目前为止，假定所考虑的函数和系数都是实值函数是不言而喻的．下面的考虑澄清了这个问题．

假定我们允许 f 在下列意义下是复值的：存在两个真正的实

值函数$f_1(x, y, t)$和$f_2(x, y, t)$使得$f=f_1+if_2$. 这应理解为两个函数f_1和f_2之间不必有什么联系. 对于任何的解u我们也作同样假定. 那么,方程(1-8)等价于方程组

$$\begin{cases} u_{1x}-u_{2y}-2xu_{2t}-2yu_{1t}=f_1 & (1\text{-}9)\\ u_{2x}+u_{1y}+2xu_{1t}-2yu_{2t}=f_2 & (1\text{-}10)\end{cases}$$

这个方程组中只含实值函数. 这是两个未知函数两个方程的方程组. 因此, 方程(1-8)正好是方程(1-9)和(1-10)的一种简写. 方程(1-8)是个方程组这一事实并不是使得(1-8)无解的一个因素. 我们还将举出一个带有实的f和实系数的无解的单个方程的例子.

现在回到方程(1-8). 为了简化(1-8), 我们引进复变量$z=x+iy$. 那么$u(x, y, t)$是z和t的函数. 仅当u满足Cauchy-Riemann方程

$$u_{1x}=u_{2y},\ u_{1y}=-u_{2x} \tag{1-11}$$

或简写为

$$u_x+iu_y=0 \tag{1-12}$$

时, u才是z的解析函数.

为了进一步简化,令

$$2u_z=u_x-iu_y,\ 2u_{\bar{z}}=u_x+iu_y \tag{1-13}$$

则方程(1-12)变成

$$u_{\bar{z}}=0 \tag{1-14}$$

而方程(1-8)变成

$$u_{\bar{z}}+izu_t=\frac{1}{2}f \tag{1-15}$$

现在令Ω是集合$x^2+y^2<a$, $|t|<b$, 其中a和b是任意固定的正数. 我们将证明存在一个$f\in C^\infty(\Omega)$使得方程(1-8)在$C^1(\Omega)$中无解. 因为a和b是任意的,由此可知对于任何$r>0$, 方程(1-8)在Σ_r中无解.

为实现我们的证明, 设$\psi(\sigma, \tau)$是两个实变量σ, τ的连续可微复值函数, $\psi(\sigma, \tau)$在矩形$0<\sigma<a$, $|\tau|<b$外等于零. 令

$$\varphi(x, y, t)=\psi(\rho, t),\ \rho=x^2+y^2$$

注意到 φ 在 x, y, t 空间中有连续导数，并且在 Ω 外等于零. 由锁链法则，我们有

$$\varphi_z(x, y, t) = \bar{z}\psi_\rho(\rho, t) \tag{1-16}$$

现在我们假定方程(1-8)在 Ω 中有一个解 u. 那么

$$\iiint_\Omega (u_{\bar{z}} + izu_t)\bar{\varphi}\,dx\,dy\,dt = \frac{1}{2}\iiint_\Omega f\bar{\varphi}\,dx\,dy\,dt$$

其中字母上的一横表示复共轭. 对左端的积分进行分部积分（参看 1-3 节），我们有

$$-\iiint_\Omega u\overline{(\varphi_z - i\bar{z}\varphi_t)}\,dx\,dy\,dt = \frac{1}{2}\iiint_\Omega f\bar{\varphi}\,dx\,dy\,dt$$

（因为 φ 在 Ω 的边界上为零所以没有边界积分）. 由等式(1-16)，这就变成

$$-\iiint_\Omega zu\overline{(\psi_\rho - i\psi_t)}\,dx\,dy\,dt = \frac{1}{2}\iiint_\Omega f\bar{\varphi}\,dx\,dy\,dt \tag{1-17}$$

现在我们引进坐标 ρ, θ 来代替 x 和 y, 其中

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

注意到 $\frac{1}{2}d\rho\,d\theta = dx\,dy$, 我们看到等式(1-17)变成

$$-\int_{-b}^{b}\int_0^{2\pi}\int_0^a zu\overline{(\psi_\rho - i\psi_t)}\,d\rho\,d\theta\,dt = \frac{1}{2}\int_{-b}^{b}\int_0^{2\pi}\int_0^a f\bar{\psi}\,d\rho\,d\theta\,dt \tag{1-18}$$

现在我们令

$$U(\rho, t) = \int_0^{2\pi} zu\,d\theta \tag{1-19}$$

并且假定 f 与 θ 无关. 因为 ψ 也和 θ 无关，所以我们有

$$-\int_{-b}^{b}\int_0^a U\overline{(\psi_\rho - i\psi_t)}\,d\rho\,dt = \pi\int_{-b}^{b}\int_0^a f\bar{\psi}\,d\rho\,dt$$

对上式左端进行分部积分，得

$$\int_{-b}^{b}\int_0^a (U_\rho + iU_t - \pi f)\bar{\psi}\,d\rho\,dt = 0$$

下一步要注意到 ψ 是在 $0<\rho<a$, $|t|<b$ 外等于零的任意的连续

可微函数. 由众所周知的论证(参看 1-3 节), 得到

$$U_\rho+iU_t=\pi f,\ 0<\rho<a,\ |t|<b \tag{1-20}$$

其次取 $f=g'(t)$, 这里 g 是只依赖于 t 的光滑实值函数, 又令

$$V(\rho,\ t)=U+\pi ig \tag{1-21}$$

则

$$V_\rho+iV_t=0,\ 0<\rho<a,\ |t|<b$$

因此 V 是 $\rho+it$ 在集合 $0<\rho<a,\ |t|<b$ 上的解析函数. 因为 $u(x,\ y,\ t)$ 在 $0\leqslant\rho<a,\ |t|<b$ 上是连续的, 所以 $U(\rho,\ t)$ 也连续. 而且, 由方程(1-19) $U(0,\ t)=0$. 因此

$$\operatorname{Re} V(0,\ t)=0,\ |t|<b \tag{1-22}$$

因为 V 在 $0<\rho<a,\ |t|<b$ 中是解析的, 而且其实部当 $\rho=0$ 时等于零, 我们知道可以越过直线 $\rho=0$ 对 V 进行解析开拓(参看任何一本好的复变函数方面的书). 特别是 $V(0,\ t)$ 在 $|t|<b$ 中是 t 的一个解析函数(即可展为 t 的幂级数). 但是 $V(0,\ t)=\pi ig(t)$. 因此, 我们已经证明了: 当 f 只依赖于 t 时, 为了使方程(1-8)有一个解, 则 f 必须是 t 的解析函数. 例如, 如果我们取

$$g(t)=\begin{cases} e^{-1/t}, & t>0 \\ 0, & t\leqslant 0 \end{cases} \tag{1-23}$$

则 f 有各阶的连续导数, 但它在 $t=0$ 的任何邻域中不是解析的. 因此, 对于这样的 f, 方程(1-8)不可能有解.

现在我们可以给出一个无解的"实"方程的例子了. 设 Au 表示方程 (1-15) 的左端. 设 $\overline{A}$ 表示通过对 A 的所有系数取复共轭而从 A 得到的算子. 那么

$$A\overline{A}u=\frac{1}{4}(u_{xx}+u_{yy})+(xu_{yt}-yu_{xt})+(x^2+y^2)u_{tt}-iu_t \tag{1-24}$$

遗憾的是因为有最后一项, 所以这样做并不成为"实"方程. 但是我们有

$$A\overline{A}=B-i\frac{\partial}{\partial t}$$

其中 B 是一个实系数的线性算子. 因此

$$A\overline{A}\,\overline{(A\overline{A})}=\left(B-i\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(B+i\frac{\partial}{\partial t}\right)=B^2+\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

现在我们断言方程

$$B^2u+u_{tt}=f \tag{1-25}$$

当 $f=g'$ 而 g 是由方程 (1-23) 给出时不可能有解. 因为, 如果 u 是方程(1-25)的解, 则 $v=\frac{1}{2}\overline{A}(\overline{A\overline{A}})u$ 就应是方程(1-8)的解, 与前面得到的结果矛盾. 这个例子是由 F. Treves (1962)给出的.

应该指出直接讨论方程(1-25)要困难得多. 允许利用复值函数这一事实带来了巨大的帮助. 在研究偏微分方程时许多别的情形中也是如此.

1-3 分部积分

在 1-2 节中我们利用了一个初等的但是非常有用的技巧, 即分部积分, 为了帮助对此有点生疏了的人们, 我们在这里复习一下. 设 Ω 是 E^n 中具有分片光滑边界的开连通集(区域). 这就是说 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 由有限块曲面组成, 其中每一块曲面都可对某个 j 表为形式

$$x_j=h(x_1, \cdots, x_{j-1}, x_{j+1}, \cdots, x_n)$$

函数 h 具有连续的一阶导数. Ω 的闭包 $\overline{\Omega}$ 是 Ω 及其边界 $\partial\Omega$ 的并集. 假定 Ω 是有界的, 即 Ω 包含在某个 R 充分大的球 Σ_R 中. 如果 $f\in C^1(\overline{\Omega})$, 则

$$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_k}dx=\int_{\partial\Omega} f\gamma_k d\sigma,\ 1\leqslant k\leqslant n \tag{1-26}$$

其中 $dx=dx_1\cdots dx_n$, γ_k 是 x_k 轴和 $\partial\Omega$ 的外法向间夹角的余弦, 而 $d\sigma$ 是 $\partial\Omega$ 上的曲面微元. (注意我们只用一重积分号来表示一个体积分; 要写 n 个积分号稍嫌麻烦.) 有许多名称都与等式(1-26)相联系, 包括 Gauss 定理, Green 定理, Stokes 定理, 散度定理等等. 至于(1-26)的证明, 我们介绍大家去看任何一本好的高等微积分的书, 例如, Spivak (1965)的书.

现在假定 u 和 v 在 $\overline{\Omega}$ 中有连续导数而且 u 和 v 的积在 $\partial\Omega$ 上