信号重构理论及其应用

清

版
社

《信息、控制与系统》系列教材

# 信号重构理论及其应用

李衍达　常　迥

清华大学出版社

《信息、控制与系统》系列教材

# 信号重构理论及其应用

李衍达　常　迥

清 华 大 学 出 版 社

## 内 容 简 介

信号重构技术是近年来发展十分迅速的一种信号处理技术，它主要研究如何从观测得到的部分数据重构完整的信号。信号重构技术已广泛应用于光学通讯、图象处理、语音处理、地球物理信号处理、电子显微学、天文学、古地磁学、x 射线结晶学等学科领域，并越来越受到人们的重视。

本书是一本专著，系统整理信号重构的理论和算法，分别讨论从时域或频域的部分数据重构信号的条件和算法，并介绍其在图象复原、地震勘探、时延估计、语音处理中的应用。

本书除可供学习信号处理的高校师生参考外，亦可供在各种应用领域的科技人员、工程技术人员参考。

《信息、控制与系统》系列教材
信号重构理论及其应用
李衍达　常　迥
☆
清华大学出版社出版
北京　清华园
中国科学院印刷厂印刷
新华书店总店科技发行所发行
☆
开本：787×1092 1/16　印张：12　字数：284 千字
1991 年 7 月第 1 版　1991 年 7 月第 1 次印刷
印数：0001—4000
ISBN 7-302-00818-3/TP·294
定价：4.90 元

《信息、控制与系统》系列教材

# 出 版 说 明

《信息、控制与系统》系列教材是一套关于信息、控制和系统学科的基本理论和应用技术的高等学校教材。选题范围包括信号和信息处理、模式识别、知识工程、控制理论、自动化技术、传感技术、自动化仪表、系统理论、系统工程、机器人控制、智能控制、计算机应用和控制等方面。主要读者对象为自动控制、计算机、过程自动化、无线电等系科的高年级大学生和研究生，以及在这些领域和部门工作的科学工作者和工程技术人员。

信息、控制与系统科学是在本世纪上半叶形成和发展起来的新兴学科。它们的应用和影响已经遍及众多的部门和领域，贯穿其中的许多思想和方法已用于经济和社会现象的研究，而以这些学科为理论基础的自动化技术的广泛应用更是实现现代化的重要标志之一。这套系列教材，正是在这样的客观要求下，为适应教学和科研工作的需要而组织编写和出版的。它以清华大学自动化系、电机系等近年来经过教学实践的新编教材为主，力求反映这些学科的基本理论和最新进展，并且反映清华大学在这些学科中科学研究和教学研究的成果。我们希望这套系列教材，既能为在校大学生和研究生的学习提供较为系统的教科书，也能为广大科技人员提供有价值的参考书。

组编和出版这套教材是一次尝试。我们热忱欢迎选用本系列教材的老师、学生和科技工作者提出批评、建议。

《信息、控制与系统》系列教材编委会

## 《信息、控制与系统》系列教材编委会

# 前　　言

信号重构理论及其应用最初引起我们的注意是在1980年。当时，美国麻省理工学院的数字信号处理组对这一课题的研究在进行中，李衍达同志正在该组进修，由于这个问题是信号处理的基本问题之一，其可能的应用范围十分广阔，因此，我们逐步投入到这一课题的研究中来。我们最早的一项研究成果是于1981年在一次国际讨论会上发表的利用相位谱重构信号来进行时延估计。这项成果受到了 A. V. Oppenheim 教授的重视，在他的利用相位谱或幅度谱重构信号的总结性论文中提到了这项工作。其后，我们又进行了仅用相位谱重构信号及其算法的研究，得到了若干个新的定理，提出了零点扰动算法，从而扩展了 Hayes 等人的结果。进而，又进行了利用幅度谱及部分采样值重构信号的研究；有限时宽序列的半盲反褶积问题的研究和从幅度谱重构最小相位信号的算法研究等。从这些研究中又得到一系列新的结果。在算法研究上，针对现有迭代算法存在的不收敛问题又提出了"三域迭代法"，"带随机扰动的迭代算法"等新的算法。部分的研究成果已分别发表在"中国科学"，"科学通报"，"清华大学学报"及有关的国际、国内学术会议的论文集中。此外，我们还将理论研究的成果应用于地震勘探数据处理中，也取得了明显的效果。上述的研究成果有相当大一部分是由吴忠泽同志、徐雷同志在作博士论文期间取得的。

鉴于这一课题在理论上和应用上都有重要的意义，我们认为及时地把这一课题已取得的成果加以收集和系统的整理是十分必要的。因为，一方面这有利于指导我们今后的研究工作，另一方面，我们希望通过这一系统的整理能引起更多的人了解信号重构技术，从而使这一技术在各方面得到更广泛的应用。当然，将信号重构技术广泛应用于实际还需要从理论上和算法上解决一些重要的问题，例如，其中一个重要的问题就是利用带噪数据重构信号问题，对于这一问题虽然已经发表了一些重要的文章，但有很多问题仍待解决，而这也是我们正在研究的课题之一。由于这一方面的成果还不够完全，只好留待以后有机会再加以收集和整理了。本书编写计划是由我们共同讨论的，李衍达教授负责完成本书大部分内容的编写工作，常迥教授完成了部分内容的编写工作。

本书的内容除了收集国内、外有关文献外，还编入了我们自己的研究成果，包括吴忠泽、徐雷、阎平凡等同志的成果。在编写过程中，叶龙同志帮助查阅和收集了大量资料并对原稿提出了修改意见。马争鸣同志也阅读了原稿并提出了修改的建议，陈定国同志帮助抄写了部分草稿。对此，作者表示衷心的感谢。同时盼望得到读者的批评和指教。

本书是在一些研究项目成果基础上写成的，这些项目得到国家自然科学基金会的资助和国家教委博士点基金的资助，本书也是这些项目的成果之一。

李衍达　常迥

1990年7月17日

# 目　　录

# 第一章 绪 论

信号处理的一个重要内容是从观测数据中提取信息。在许多实际问题中，我们只知道部分时域或频域信号值，希望由此而重构整个信号。或者，要求利用部分信号值来表示整个信号，以达到数据压缩的目的。或者，观测数据被干扰而产生畸变，但其中部分数据没有产生畸变，希望由未被畸变的部分数据重构信号，以消除干扰的影响，等等。这些都是信号重构问题。这个问题涉及很广泛的领域，例如，在电子显微学、$x$射线结晶学和天文学等领域中，往往只记录了绕射图或干涉图的幅度或强度，而要求我们根据幅度或强度来重构原信号，这就是所谓的"相位补偿问题"。而在古磁场研究的问题中，只要检验地球的岩芯样本，我们总能获得原磁场的方向曲线，但得不到强度值，因此，常常希望仅仅根据这个相位或方向曲线就可以重构磁场的强度或幅度，这就是所谓的"幅度补偿问题"。在图象处理问题中，由于焦距不准而引起图象严重模糊，为了清除这种模糊，人们发现，由于镜头的对称性，散焦只影响图象的幅度而不影响其相位值，因而，可以仅仅从其相位函数重构原图象，从而得到清晰的图象。另外，在语音处理、地震勘探数据处理、通讯等领域中，信号重构理论都有着广泛的应用。

从部分已知数据重构信号，从概念上说，并不是说无条件地可以从部分已知的信息去恢复未知的信息。因为信息是不能由部分信息增减的，因而，没有的信息是不能加以"恢复"或"重构"的。这里所讨论的由部分数据重构信号是指在一定的条件下，可以仅由部分数据确定全部信号。也就是说，给定的条件和已知的部分数据已含有信号的全部信息。因而，我们并不是去"恢复"或"重构"没有的信息，而是利用包含全部信息的已知部分数据和条件去重构或恢复整个信号。通过上面的分析，我们知道，从部分数据重构信号是需要有一定条件的。如果实际应用的情况能符合指定的条件，我们就可以利用部分数据来重构整个信号。这种情况，我们是经常可以遇到的。例如，根据采样定理，如果信号是频谱有限信号(或称带限信号)，又假定采样率符合采样定理的要求，我们就可以用信号的采样值来重构整个连续信号。这里，指定的条件是：信号是频谱有限的，采样率是足够高的。而已知的部分数据就是信号的采样值。

由于实际的问题大都具有一定的限制，常常满足这种或那种条件，因而，我们可以充分地加以利用。为了便于说明各种条件或限制，先让我们简单地解释一些名词(其中一些名词的严格定义可参阅本书第三章)。一个实时采样的物理量，我们常称之为"时域信号"，将这个信号经过傅氏变换后，可以将其分解为不同的频率分量，我们称为变换到"频域"。变换后的结果是得到一个频谱，它含有许多个频率成份，每个成份均具有振幅和相位值。我们将经傅氏变换后的信号称为频域信号，其各个频率的振幅就组成幅度谱；各个频率的相位就组成相位谱(或相位函数)。类似地，若将时域离散信号进行Z变换，就变换到"$Z$域"。一个信号若不含有高于某一频率以上的频率成份时，则称之为频谱有限信号或带限信号。类似地，一个时域信号若当时间$t > T, T < \infty$时，信号值为零，则称之为有限时宽

信号(或时限信号)。在很多情况下,信号在时域、频域或Z域都受到一定的限制或符合一定的条件,这就给我们提供了关于这个信号的一些信息,是我们重构信号时可以充分加以利用的。

对信号重构理论来说,首先,我们需要解决的一个问题是:我们希望找到一些条件,在这些条件下,仅用部分的数据就可以确定全部信号,而这些条件在一般情况下,常常是可以满足的。这样,先在理论上证明了,用部分已知数据可以重构信号。但是,知道了这些条件可以被满足,又知道了部分数据,并不等于就知道了整个信号。因此,我们第二步还要研究如何利用这些条件和已知的部分数据去"重构"或得到全部信号,或者说,如何利用这些数据和条件,用计算机来产生全部信号,这就是所谓要解决重构信号的算法问题。一般来说,我们得到的数据总受到干扰或带有误差的,因此,我们希望重构信号的算法对数据的误差是不敏感的,而且计算量不是太大的,这才能实际使用,这就是我们需要解决的第二个基本的问题。

信息理论的发展对信号重构理论起着重要的指导作用。信息理论中的编码方法和理论与信号重构有着密切的关系。数据的传输码、紧密码、压缩码在本质上是从部分数据恢复更完全的数据,因而,也可以看为信号重构。信息理论中的采样定理就是一个信号重构问题。在含噪情况下的信号重构问题也可看作参数估计问题。因此,信号重构与编码、采样理论、估计理论有着密切的联系,作为这三者的理论基础则是信息理论。我们认为,信号重构技术是以信息理论作为其理论基础的。

信号重构理论的发展对信息理论,尤其是数字信号处理理论的发展起着十分重要的作用。1949年,仙农发表的采样理论,就是证明了在一定的条件下,可以用信号的采样序列来重构带限连续信号。这一结果,为使用数字计算机进行信号处理,在理论上奠定了基础。其后,许多学者发展了仙农的理论,将之扩展到可以应用各种积分变换的采样定理;从一维信号的采样理论扩展到多维的情况;由确定性信号的采样理论扩展到可应用于广义平稳或非平稳的随机信号的采样理论;由均匀间隔的采样序列扩展到非均匀间隔的采样序列,等等。这些研究工作对于信息理论的发展及其实际应用起了很重要的作用。在理论上,我们可以将采样理论归入由离散采样值重构带限连续信号的问题。在这一方面,除了令人注意的采样理论以外,由实数过零点重构信号问题也受到越来越多的注意。它的目的是利用信号的过零点重构带通或带限信号。D. Marr 等人发现带通信号的零交叉点包含了非常丰富的信息量。在他们的视觉计算理论中,把拾取零交叉点与视觉处理的初级阶段联系起来,认为在一定的条件下,零交叉点可以为后面的视觉处理过程提供足够的信息量。经过 B.F. Logan, T. Poggio 与 S.R. Curtis 等人的工作,已经提出了几个从零交叉点重构带通或带限信号的定理,而且,将一维信号重构问题扩展到两维的情况,并且也提出了一些算法。这项研究工作已初步应用于图象处理,数据压缩及视觉理论等方面,预计在这方面的研究工作将会继续得到发展。

另一方面,许多学者对频谱有限信号的外推问题作了很多的探索。所谓带限信号的外推问题是指已知带限信号在某一区间的值,由此而求出带限信号在区间以外的值。由于带限信号在时域上是无限长的,但在取实际观测值时,我们只能取其有限长的一段,因而,如何从有限长的一段信号重构(或外推)无限长的带限信号就是需要解决的问题。另

外，带限信号外推在光学信号处理、谱估计、地震勘探数据处理等领域都有广泛的应用。对 $\sigma$ 频谱有限（简称带限）的连续信号 $f(t)$，由于 $f(t)\in L_2^\sigma$（即 $f(t)\in L_2(-\infty,\infty)$，$t\in(-\infty,\infty)$，且 $F(\omega)=0$，当 $|\omega|>\sigma$ 时），其 $f(z)$（$z$ 为复数）是在全平面解析的整函数，因此，在满足一定的条件下，完全可以利用解析延拓原理，由 $f(t)$ 在 $(-T,T)$ 内的值确定整个 $z$ 平面上的 $f(z)$ 的值，从而得到 $f(t)$ 的所有值。

因为：

$$f(z)=f(0)+f'(0)z+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n+\cdots$$

而从一小段 $f(t)$，$t\in(-T,T)$，可以求得 $f(0)$，和 $f^{(n)}(0)$，$n=1,2,\cdots$；从而可以求出 $f(z)$，进而可以得到 $f(t)$，$t\in(-\infty,\infty)$。但是，这种方法并不能实际应用，因为得到 $f^{(n)}(0)$ 的导求过程对很小的噪声都是很敏感的。因此，D. Slepian 等人提出了频谱有限连续信号外推的另一种方法——长球函数展开法。由于长球函数是 $L_2^\sigma$ 的完备正交系，而且，长球函数在有限长的区间内，仍然保持其正交性，因此，可以由带限信号的有限长度段求出长球函数展开的系数，从而，重构原信号。这种方法对于噪声较不敏感，因而成为带限信号外推的一种重要方法。但是，计算长球函数及其系数，无论在计算量或在存储量上都是很大的。比较实用的算法是由 A. Papoulis 与 R. W. Gerchberg 分别独立提出的，称为 Papoulis-Gerchberg 算法，它是反复应用傅氏变换与反变换及加入已知条件的迭代算法。1979 年，J. Cadzow 证明了在多维情况下，上述的迭代算法也是收敛的，并提出“一步外推法”。1984 年 C. Chamzas 与许文源提出了改进的 Papoulis-Gerchberg 迭代法，加快了收敛速度。1983 年，J. L.C.Sanz 和 T.S. Huang 对各种迭代算法进行了分析，以 H. Bialy 于 1959 年提出的基于 Hilbert 空间中线性算子方程的迭代最小平方解法为基础，统一了多种迭代算法。

对于时宽无限的 $\sigma$ 频谱有限离散信号的外推问题，情况比较复杂。已知一小段离散信号，如果不加其它的限制条件，其外推往往得不到唯一解。在一定的限制条件下的 $\sigma$ 频谱有限离散信号的外推及其迭代算法方面也已进行了一些研究，并取得了一定的成果。

自60年代末以来，如何利用部分频域信号值重构有限时宽的离散信号问题受到不少学者的重视。在这方面，A.V. Oppenheim 所领导的美国麻省理工学院数字信号处理小组的研究工作取得了许多有意义的成果，并已应用于图象处理、语言信号处理等领域。

对于长度为 $(N+1)$ 的物理可实现的离散信号，若给定其幅度谱，可以存在 $2^N$ 个具有该幅度谱但有不同的相位谱的离散信号。在这些离散信号中，只有一个为最小相位，一个为最大相位，其余称为混合相位。反之，若给定一相位幅，也存在着许多个具有该相位幅但有不同幅度谱的离散信号。因此，对于任何一个非最小相位（及非最大相位）信号来说，其傅氏变换的幅度与相位，一般来说是两个独立的函数，不能仅仅从已知的其中一个来恢复另一个。

但是，如前所述，在许多实际问题中，我们往往只能得到原信号的一部分频域信号值——或者是全部相位函数；或者是全部幅度谱值；或者是部分相位谱部分幅度谱值；或者是幅度谱加上部分采样点，等等。而希望由这些部分信号值重构原信号。在文献中，通常把仅仅根据幅度谱而企图重构原信号的问题称为“相位补偿问题”。与之相似的；把仅

仅根据相位谱而企图重构原信号的问题称为"幅度补偿问题"。这两个问题以及其它的根据部分频域信号值重构原信号问题有着重大的理论意义与实用价值。

对于"相位补偿问题"，1980 年，M.H. Hayes 等人在理论上证明了，对于一个有限长度的多维实信号来说，如果它的 $z$ 变换是不可因式分解的，那么，在某个平移，关于原点的反射和正负号因子的范围内，仅仅从离散幅度谱就可以唯一地重构原信号。一般的时宽有限多维信号，其 $z$ 变换通常是不可因式分解的，故可以在一定意义下，利用幅度谱来重构原信号。但对于时宽有限的一维实信号来说，其 $z$ 变换通常不能满足上述限制，因此，如果没有最小(或最大)相位条件，那么，仅从离散的幅度谱是不可能唯一地重构原信号的。其次，利用幅度谱恢复多维实信号尚没有有效的实用算法，因而，在应用上也存在一定的困难。

另一方面，对于"幅度补偿问题"，却取得了很多的进展。在一般情况下，仅从信号的相位谱是不可能唯一地确定原信号的，但是 A.V. Oppenheim 等人的研究结果表明，如果我们所考虑的离散信号是一个有限长度的实序列，并且其 $z$ 变换为有理分式，收敛域包括单位圆，那么，若其 $z$ 变换不存在任何成倒数对的零点，而且在单位圆上也没有任何零点时，仅仅利用信号的相位谱就可以在一个比例系数的范围内唯一地确定这个离散信号，而不需有最小或最大相位条件的限制。这个结果也已推广到多维信号的情况。为了实现仅用相位谱重构原信号，已经发展了多种算法，其中包括求解一组联立线性方程算法；交替进行时域中的"序列截断"和频域中的"相位替代"的时-频域迭代算法和时域、频域、$z$ 域的三域迭代算法等，在算法上也达到了实用化的要求。吴忠泽、李衍达、常迵等人的工作使这方面的研究向实用方向更前进了一步。

然而，在很多实际的场合，往往无法得到准确的相位谱，这时，不能利用上述的结果来重构原信号。相反地，在通常的情况下，我们比较容易得到信号的幅度谱。例如，在地震勘探数据处理中，由于反射系数序列近似于白噪序列，因此，地震记录的平均幅度谱就与地震子波的幅度谱只相差一个常数。也就是说，可以通过地震记录比较容易求得地震子波的幅度谱。在这种情况下，如前所述，如果没有最小相位条件，仅仅依靠幅度谱，是不能唯一地重构地震子波的，为了唯一地重构地震子波，必须增加有关地震子波的信息。通常来说，有两种可供选择的途径。一个是设法增加时域中部分数据，例如，已知一些时域的采样值。另一个途径就是增加频域中的部分数据，例如，除了已知的幅度谱以外，再增加一部分相位函数值，以满足重构信号的唯一性要求。

P.L. Van Hove 等人(1983 年)的研究结果表明，如果所考虑的离散信号是一个因果的有限长度的实序列，那么，只要它们的 $z$ 变换在单位圆上不存在任何零点时，即可仅仅利用符号化的幅度谱（即幅度谱和一个比特的相位信息）来唯一地重构这个离散信号。若把限制条件改为其 Z 变换在单位超平面上不存在任何零点，这个结果也可推广到多维离散信号的重构。对于大多数的一维或多维信号，都能满足上述的唯一性条件。为了实现仅用符号化的幅度谱来重构原信号，仍可采用类似于仅用相位谱重构信号的时-频迭代法。此时，在时域中除了用"有限长度"这个限制以外，还须增加"因果"的限制；在频域中也不再是"相位替代"，而应为"幅度替代"及相应相位符号替代了。这种方法是在幅度谱信息以外，增加一个比特的相位信息，从而满足重构信号的唯一性要求。

但是，在实用中即使是一个比特的相位信息(即过零点信息)常常也是难以获得的。因此，又发展了另一个途径，即从时域部分增加信息的方法，也就是说，利用部分时域和部分频域的数据重构时宽有限的离散信号。S. H. Nawab 等人 (1983 年)提出了利用有限长离散信号的前半部分采样点 (或后半部分采样点) 和已知的幅度谱来重构原信号的方法，并将之应用于语言信号处理中。吴忠泽、李衍达、常迥等人 (1986，1987 年)的工作进一步证明了，在一定条件下，仅用幅度谱和少至三分之一的采样点，甚至，只用一个采样点(或端点)即可唯一地重构原信号，并且提出了两种新的迭代算法。李衍达等 (1988 年)进一步证明，所需的采样点占信号总长度的比例与采样频率有关，若提高采样频率，将可使所需的采样点数占整个信号长度的比例大大下降，从而，可以更广泛地应用。以上结果，在地震勘探数据处理中得到了初步的应用。

从时域的部分数据重构信号与从频域的部分数据重构信号，看起来是两个问题，但是，利用时域与频域的对偶性，我们可以找到两者之间的内在联系。S. Shitz 与 Y. Y. Zeevi 利用时域与频域的对偶性，证明了 Logan 提出的从时域的实过零点确定带通信号的条件等效于在频域从相位函数确定有限长的离散信号的条件。这一分析不仅向我们揭示了有限时宽信号的重构与带限信号重构条件之间的内在联系，而且，通过这一对偶性，我们可以将一个域上的信号重构定理得到在另一个域上的相应的定理，因而，对于信号重构理论是很有意义的。

在更广泛的意义上，信号重构问题可以看为一种“半盲反褶积问题”。若把信号 $z(n)$ 看作是输入 $x(n)$ 通过一个系统 $y(n)$ 后的输出，即 $z(n)$ 等于 $x(n)$与 $y(n)$的褶积。仅已知 $z(n)$，求 $x(n)$ 或 $y(n)$ 称为盲反褶积，一般情况下没有唯一解，而存在无穷多的解。若不仅知道 $z(n)$ 而且还知道部分的 $x(n)$ 与 $y(n)$，则可能得到唯一解。从已知的 $z(n)$ 及 $x(n)$、$y(n)$ 的部分数据，求解 $x(n)$ 与 $y(n)$ 问题可称为“半盲反褶积问题”。这个问题可以看作一种范围更广的信号重构问题。例如，令 $y(n)=x(-n)$，则 $z(n)$ 为 $x(n)$ 的自相关序列。这时，已知 $z(n)$ 及部分 $x(n)$ 的采样点，求解 $x(n)$ 问题就等效于已知 $x(n)$ 的幅度谱(其平方的反傅氏变换即为自相关序列)及部分采样点重构原信号问题。所以，半盲反褶积问题是包括内容更广泛的一类信号重构问题。事实上，从 $z(n)$ 求 $x(n)$ 或 $y(n)$ 也被称为反问题。这类反问题在投影重建、地震勘探、图象重构等领域中是常常遇到的。半盲反褶积问题按照已知 $x(n)$、$y(n)$ 的情况，可以分为两大类型，即线性问题类型与非线性问题类型。当已知的 $x(n)$、$y(n)$ 的信息量较多时，重构 $x(n)$ 或 $y(n)$ 问题可以归结为求解一个线性方程组问题。其求解方法可以利用已有的解线性方程组的方法。若已知的 $x(n)$、$y(n)$ 的信息量较少时，则求解 $x(n)$ 与 $y(n)$ 的问题将变成求解一组非线性方程问题。这时，称为非线性问题类型。其求解方法需应用解非线性方程的迭代算法。其解对噪声也更为敏感。实际上，线性问题类型只是非线性问题类型的一个特例。更一般地说，我们可以用非线性规划的方法来表示半盲反褶积问题。这种方法在表示上更具一般性，可以包括各种已知 $x(n)$ 及 $y(n)$ 的情况，而且，更容易处理在有噪情况下的半盲反褶积问题。这种表示方法对其它类型的信号重构问题也是适用的，因而，更具有一般性的意义。

综上所述，不论是对哪种信号重构问题，从部分已知数据重构信号都需要解决两个基

本问题：第一，在什么条件下，可以用较少的数据唯一地重构原信号？第二，重构信号的有效算法。这两个问题就组成了信号重构理论中的基本问题。围绕以上两个基本问题，根据重构信号的已知数据的情况，本书大体上分为四个部分。第一部分（包括第三章、第四章）着重讨论已知部分时域数据的重构信号的问题。其中主要包括 (1). 由离散采样值重构带限连续信号：讨论各种采样理论及由实数过零点重构信号问题。(2). 带限信号外推：主要讨论带限连续信号与带限离散信号的外推。第二部分（包括第五章、第六章）着重讨论由已知的部分傅氏变换的数据重构信号问题：主要讨论仅由相位谱重构信号；仅由幅度谱重构信号；由幅度谱及一位相位信息重构信号；以及由幅度谱及部分采样点重构信号等问题。第三部分（包括第二章、第七章、第八章、第九章）着重讨论一些共同性的问题，包括：信号重构技术的理论基础，时域与频域的对偶关系；一类迭代算法 (Bialy 迭代算法）及其一般形式；以及有限时宽的半盲反褶积问题。第四部分是信号重构理论的应用举例。信号重构理论还在发展之中，其中一部分尚在理论阶段，还没有实用算法，另外，也有相当一部分已应用在不同的领域。由于其应用领域涉及面广，难以全都包括在一本书中。故这一章只以举例方式讨论了一些已有初步应用效果或有应用前景的一些问题，供读者参考。本书的目的是较系统地整理信号重构理论方面的已有的较重要的成果及著者的成果，说明在这些方面已解决的及尚待解决的问题，以及这些理论的某些应用，以便促进这一方面理论和应用的发展。

# 第二章 信息理论是信号重构技术的理论基础

## 2.1 引 言

信息理论实质上是信号重构技术的理论基础。譬如，在含有噪声的情况下，信号重构问题可以看为参数估计问题。这时的信号重构方法往往与熵概念相联系。基于最大熵概念的 AR 参数估计[1]或基于联合熵概念的信号谱估计方法[2]就是一个明显的例子。在含有噪声情况下，基于最小交叉熵原理的信号重构的迭代算法[3]是另一个明显的例子。信息理论中的编码方法和理论与信号重构技术有着密切的关系。数据的传输码（*transmission codes*）、紧密码（*compaction codes*）、压缩码（*compression codes*）实质上都是借助于编码的方法和原理从部分数据恢复更完全的数据。所以可称为数据恢复。显然，数据恢复与信号恢复是密切相关的，甚至可以说是同义词，有人将信号恢复说成是“信息恢复”，其根源大概在此。这里，将信息理论中的编码问题再详细讨论一下。

离散信道（*discrete channel*）可以认为是最为根本的和最常遇到的一类信道。假设有一组有限个符号（$a_1,a_2,\cdots,a_n$）可以任意抽取而组成不同的字。如从 26 个英文字母抽取可以组成全部英文字。再如传真信道或电报信道也是这样的信道。这种信道就称为离散信道。在这组有限个符号（$a_1,a_2,\cdots,a_n$）中，每一符号 $a_j$ 占据一定的时间 $t_j$。$t_j$ 一般是随 $j$ 而变。但也有时 $t_j$ 是一固定时间，不随 $j$ 而变。一般来说，一个信道可以传输某一给定的从（$a_1,a_2,\cdots,a_n$）中抽取的一组符号序列，例如在电报信道中，符号为点，划、符号间空间和字间空间。这些符号定义如下：

1. 一符号点 · 占据一单位时间，在这单位时间以外全部为空的。
2. 一符号划一占据三单位时间。
3. 符号间空间占三单位时间。
4. 字间空间占六单位时间。

莫尔斯码（Morse *code*）就是这样选定的，其对应的时间 $t_j$ 与概率可列表如下：

| 国际莫尔斯码 | 时间 $t_j$ | 概率 $P_j$ | 国际莫尔斯码 | 时间 $t_j$ | 概率 $P_j$ |
|---|---|---|---|---|---|
| ·— | 9 | 0.0642 | ·· | 7 | 0.0575 |
| —··· | 13 | 0.0127 | ·——— | 17 | 0.0008 |
| —·—· | 15 | 0.0318 | —·— | 17 | 0.0008 |
| —·· | 11 | 0.0317 | ·—· | 11 | 0.0484 |
| · | 5 | 0.1031 | ··· | 9 | 0.0484 |
| ··—· | 13 | 0.0008 | — | 7 | 0.0796 |
| ···· | 11 | 0.0152 | ⋮ | ⋮ | ⋮ |

## 2.2 数据传输码

一个含噪的通讯信道指的是，这类信道的输出（*output*）不可能完全由它的输入所决定，即可能存在误差（*errors*）。一个数据传输码是指将含噪信道变为一个无误差的可靠信道，即使在输出中含有误差，则解码器的输出是无误的（*error free*）。若从信号重构理论来看，这是一个信号恢复问题。首先，应该讨论在什么条件下，可能存在较好的数据传输码。大多数的信道可以用一个信道容量（*Channel Capacity*）来表示。信道容量告诉我们存在有数据传输码的最大传输速率。

含噪信道的质量是由信道容量来判断的。它决定于解码误差（*decoding error*）的概率 $Pe$。假设在信道中的传输率低于信道容量，则可得到有任意小的误差概率情况下的巨大的传输码。相反，如果数据是在大于信道容量条件下在信道中传输的，则不存在有满意的传输码。所以，根据信道容量与数据的传输率就可以判别出传输码的存在与否。由此我们可以清楚地看到信息理论在信号恢复技术中是起指导作用的。

含噪信道的两个重要范例是：(1). 含噪的二进制信道（*noisy binary channel*）和(2). 含深度空间高斯噪声的信道。前者就是常常见到的离散信道，后者是连续时间和连续幅度的连续信道。通过调制/解调可以将连续信道变为离散信道。因此，离散信道较连续信道更具有一般性。

## 2.3 数据紧密码

从一串给定的符号中，按离散时间抽取符号送到信道中去，构成各个不同的消息（*messages*），称为信源符号（*source alphabet*）。当信源符号是有限个时，则称为离散信源（*discrete source*）。从离散信源发出的数据可能含有大量的多余数据，因而造成数据的浪费。数据紧密码（*Data Compaction Code*）就是使数据源变得更加有效。从信号重构的观点来看，就是仅用较少的数据就足以表示整个信号。一般从数据发出的序列可借助于紧密码流有效地表达出来。实际的紧密码与一般的传输码相比较可以大大减少所需的二进位符号流的位数。对于连续信道的情况，可以通过量化过程，先转化为离散信号，再考虑紧密问题。

数据紧密码是由一长串信源输出的符号所组成。大致来讲，一信源的信息含量等于每一信源符号的二进制码位数，即该信源的最佳紧密码所需的平均码位。一个无记忆信源的信息容量 $p$ 是由它的熵（*entropy*）值 $H(p)$ 来度量。一概率信源的熵等于该信源中各符号的信息量的平均值。紧密码一定是一个可解码（*decodable code*）。含有 $K$ 个符号的唯一可解码的平均码字长(每一信源符号)必须满足

$$\bar{l} \cdot \log K \geqslant H(p)$$

这里 $\bar{l}$ 是码字长的平均值。

## 2.4 数据压缩码

有时需要在信源传输率小于信源熵率的条件下来表示信源的输出。这时，无紧密码存在。但可用数据压缩码（*Data Compression Codes*）来减少误差的产生。实际上压缩码是在忽略数据的仔细部分所提出的紧密码。在理论上，这时信源输出是不可能完全准确地恢复的。一定有误差存在。问题就在于如何使数据压缩码的误差为最小。这种思想对信号重构技术的应用也是很有启发的，特别是应用于作数据压缩时，情况是很类似的。

对于连续信道来说，信道的量化数理论上是无限大，这是因为需要无限多个码位才能将连续信道变为离散信道的缘故。数据压缩码可以用来将连续信道的输出码位减少到有限个。误差永远是存在的，但输出码位必将随误差的减少而增加。

## 2.5 数据译码

最简单的信道是无噪、无记忆的无制约信道。所谓无记忆信道是指这样的信道，即不存在有符号间的干扰，相继的噪声抽样是相互独立的；在通过该信道传输时，相继符号之间不会相互作用；误差随符号的不同而有所不同。无噪信道是指从一个输入端到一个输出端不会产生误差的信道。无制约信道是指输入符号可按任何序列传输的信道。

无噪、无记忆的无制约信道是这样的简单，关于它没有什么值得讨论的内容。实际上，经常遇到的信道是有噪的制约和孤立的制约信道。译码是用来将数据序列改译为新序列，改译码的目的是减少噪声进入含噪信道的输出数据之中。制约的一个典型例子就是二进制信道（*binary channel*），通常称为符号长度制约（*numlength constraint*），一个二进制信道含有两个符号，即 0 和 1，这两个符号具有相同的时间间隔。长度制约是指对符号的相继次数的限制的一种制约。

例如，当限制一个二进制码不能出现两个 0，可以采取以下的译码：

$$\text{原码}\left\{\begin{array}{l} 00 \longleftrightarrow 010 \\ 01 \longleftrightarrow 011 \\ 10 \longleftrightarrow 110 \\ 11 \longleftrightarrow 101 \end{array}\right\}\text{译码}$$

经译码后的一组码字不含有相联的符号 0，它具有 0.667 的二进制码率，与信道容量 0.879 相近。若增加码块长度（*blocklength*），该码率还可以大大地增加。

## 2.6 估计理论

估计理论（*Estimation Theory*）是企图从可能的数值域中找出未知参数的最佳值，从而得到一组不完善的度量（*imperfect measurements*）。估计理论的最简单的问题就是包括一个未知实参数 $\theta$ 和一个随机变量 $x$，$\theta$ 即待估计的参数。从这一简单的例子可导致更为一般的估计问题。对一个或数个待估参数问题是根据对一组随机变量的观测值而