

# 學 律

繆 天 瑞 著



上 海 萬 葉 書 店 印 行

---

# 學 律

繆 天 瑞 著

天瑞自存  
一九五〇年一月  
中央音乐学院

上 海 萬 葉 書 店 印 行

---

有著作權 • 不許翻印

一九四九年十二月十日印刷 • 一九五〇年一月十五月初版

音樂理論叢書 律 學 繆天瑞主編

著作者 繆天瑞 發行者 錢君匋

發行所 萬葉書店

上海(〇區)天潼路寶慶里三九號 電話 四二九七三

電報掛號 五九〇〇五〇

## 豐 序

學友穆天瑞君，長臺灣交響樂團，公餘致力於樂理研究，著述甚豐。戊子秋，予游臺北，天瑞出其近著律學原稿見示，屬爲作序，予讀其稿，深爲歡美。予昔年對此亦有興味，曾取朱載堉律呂精義之精義，用白話闡述爲文，發表於某雜誌。後擬再加增修，編成一書。終因人事冗繁，未遂斯願。今見天瑞之稿，恍如予昔年所欲言者，安得不歎美哉！夫律呂之學，乃音樂之數理的研究，即藝術之科學的研究。故一般音樂學者，對此往往不感興趣，或認爲無研究之必要。此雖爲學者見識疎淺所致，然亦半由吾國缺乏此種良好書籍之故。予嘗謂音樂之事，行易知難。人皆知七音 do re mi fa sol la si 之合於自然，而莫知其所以自然之理。人皆知三和弦 do mi sol 之協和，而莫知其所以協和之理。人皆知和聲學規則之必然，而莫知其所以必然之理。欲知其所以然，必習律學。我國古代研究律呂之書甚多，然文字艱晦，又雜以陰陽五行之說，使人難解。必須取其精義，加以科學的整理，用現代文說明，方可使一般音樂學者，易於研習。今觀天瑞之稿，條理井然，文字暢明，使音樂學者，人人可讀。此誠今日音樂界之福音也。遂書以報天瑞，聊以代序。

豐子愷

## 楊 序

律學對於音樂的重要性，是遠比一般音樂學習者所想像的爲高。它一向在刺激著音樂學習者們與物理學學習者們，推動他們去追求更完備的音律定法；對於樂器的改良、配合與新創，律學可以說是背後的主要動力之一。這種情形，至今依然存在。

但律學怎樣寫纔好？那是一個難題。要寫的淺顯，便不容易精確；要寫得精確，便會變成枯燥乏味。本書著者深入淺出，用生動的文筆寫成本書，頭頭是道，一絲不亂地由開卷寫至書末，由前面準備後面，由常識引到對專門問題的了解。這種設身處地，體諒學習者的態度，這種把握材料，適宜處理的手法，是我所衷心欽佩的。

中國古代論律的書，爲數很多。讀了本書以後，再去閱讀它們，可減少白化的心思不少。記得我過去曾在盲目的努力中，虛費過很多的時間，甚至曾爲了解久與音律外涉在一起的陰陽五行問題，而學習了好些算命和奇門等無聊的江湖玩意。我在學習那些玩意中所得的結論，不過如此而已：陰陽五行，與音律絕無關係，古人愛多講陰陽五行的，往往倒是對於音律不能徹底了解的。還有，有些古人愛用象徵的比喻，來解釋音律，如“宮爲君，商爲臣”之類；這些，非但與音律絕不相干，而且在消極方面，曾屢次給不懂音樂的古代音樂政客們所利用，去欺騙不懂音樂的專制帝王們，造成了音樂演進途中好些不幸的阻礙。

本書主要是說明五度相生律、純律和平均律三種律制各自的產生法，和它們相互間的異同之點。對這三種律制的了解，可以說是對於任何其他律制的了解的重要基礎。本書的目標，不是在處理比較律學的問題，故三種律制以外，不論及其他律制，這非但是合理，而且是當然的。

著者天瑞，是我生平所最欽佩的朋友之一。他實事求是，不尚空談。他研究的努力，是驚人的。記得在重慶教育部同事時，宿舍狹小而人多，不利於閱讀和寫作。每天晚上，他爬到山上的高峯，在辦公室中，油燈影下，埋頭閱讀，

直至深更，纔回宿舍；天天如此的，祇他一人。他對於音樂理論了解的精進與無限，是他不懈努力的自然結果。整個的天瑞，從這本書中，還極難見到；讀完了他截止現在為止的一切寫作，雖然可以了解一些，卻未必真能看穿了它。因為，他是在天天努力，天天進步的。

最後，我在這篇序文中，借一些篇幅，對書中內容，夾雜提出幾點補充和商榷。每節前面，標明項數，以便與本書原文參看。

〔§16〕標準高度 一九三九年五月倫敦舉行“國際大會”(International Conference)，法、德、英、荷、意等有代表參加，瑞士與美國曾致送備忘錄。此會一致議決定“每秒鐘 440 周為高音譜表之 A 音”。此或可作為 440 最近重新被國際強調的證據。

〔§64〕“平均律”這一名詞的商榷 “平均律”這一名詞的應用，我最早看到是在清末出版的一本教科書裏面，後來王光祈也用這名詞。我自己在一九三七年所寫的平均律算律中，也是用這名詞。可是這一名詞，不很妥當。理由有二：第一，“平均”二字，有將若干大小不等的數目加在一起，而後用另一個數目去除，求得商數之意；例如，計算學生分數時所得的“總平均”。“平均律”的意義，卻並不是如此，它既不是振動數的平均，也不是長度的平均，它是由一種相等的比例所形成。因此，名詞與實際不很符合。第二，在複雜而多種的律制園地中，另有其他更適於應用“平均”二字的律制存在；看了這名詞，會使人錯覺地聯想到它們。舉兩個例：（一）清江永曾主張將高低八度的兩個弦長的相差距離間，勻分成十二等分，作為十二律的音位；這一種律制，我以前曾給它“等差律”的名稱，這其實纔是真的十二“平均律”。（二）我自己從去年起，和查阜西先生，因了小小一句討論國樂律制問題的話，惹起了很大的筆戰風波，信來信去，相持不下半年之久。這一爭執，曾迫著我去實驗管律，直至自己能手造各種高低、各種律制的簫笛為止。其間，我曾考證荀勗的簫，列和的簫，也曾照他們的尺寸，自己做了實驗。結果，我能斷言，現在流行的簫笛（它們與古琴、笙、琵琶相比，大多數音不能協和）的律制，是古代羌笛的律制，是七等差律。這其實是七“平均律”。

究竟用什麼名詞來代用，比較合適？對這，我還沒有肯定的解決。可作參考的名詞，有以下三個：（一）等律——在慶祝蔡元培先生六十五歲論文集

中，劉復的十二等律的發明者朱載堉一文用這名詞；（二）等比律——我在一九四二年所寫的弦樂器定音計述略一文中，曾用這一名詞，但這名詞，我現在已不很喜歡，因為覺得它太多數學的味兒；（三）等程律——去年國立編譯館在草擬物理學名詞時，關於音響一類的名詞，曾派人和我討論了好幾個半天，記得對於“平均律”原文的譯法，他們堅持著要用“等程律”三字。

本書著者目的在求一般讀者易於吸收，暫用大家所見慣了的“平均律”三字，當然有他的理由。我提出這問題，並不希望他立刻改用其他名詞。但是，我卻希望借他的書的流行，在讀者心中喚起對這問題的較廣的注意，而為後來對一類名詞的統一工作，事先預備道路。

〔§127〕古琴上的純律 古琴上三、六、八、十一這四個徵所發的泛音，都是本弦上的純律大十七度（即純律大三度的高二均音）。清代以來諸譜，在此四個徵上，確實不用泛音。但我們記得，滿口復古而其實自我作古的康熙皇帝，他抹殺了一切與五度相生律不合的事實，他的“聖言”影響了所有在他以後的琴家論調，這種人為的傾向，是與歷史的發展別扭的。看一看過去的史實怎樣？最古的琴譜存到今日，而譜中明載有十三徽位者，有丘明（494—590 A. D.）的碣石調幽蘭譜。這譜在三、六等徵上都用泛音。據此可知，古琴舊時泛音，早用純律。

〔§129〕朱載堉創立平均律的時期 朱載堉創立平均律的完成時期，應為1584年。因為律學新說有萬曆十二年甲申（1584）的序；平均律的計算，在這部書裏面，已完全成立了系統。後來律呂精義內篇雖然有萬曆二十四年丙申（1596）的序；但這部書不過用另一種更詳細的寫法，來說明律學新說中所已建立的理論而已。從律呂精義前的奏疏，可知樂律全書的進呈，是在萬曆三十四年（1606）七月。劉復在十二等律之發明者朱載堉一文中，說朱載堉創立平均律是在1593年，進呈律呂精義也在1593年，那是錯誤的。

楊蔭瀏，一九四九年十一月十二日國立音樂院遷津之前寫於南京。

## 自序

“律”就是構成音階的每個音；它與音階同是“音樂的基礎”。律在音樂上這麼重要，可是在今日的音樂理論中，它卻是十分生疏，且最多被人誤解的一門——在我國與外國，都是一樣。這原因大約在於：直至現在為止，關於律的這門學問，還沒有一部為一般音樂學習者而寫的有系統的入門書。

就是為此，我立意寫這樣的一本書。

數年間，我隨時收集這方面的材料，與做局部的計算工作。但是，這本書應當用怎樣的分類法，纔可使初學者容易閱讀與理解呢？這問題當時曾困惑了我，幾乎使我中止了工作。其間，我偶然翻閱德國克累爾（Stephan Krehl）的音樂通論（日文譯本）中講到律的一章，看見他把律分做基本的三類，即五度相生律、純律與平均律；這纔使我恍然，決定採用這分類法，著手寫成本書。

一般講述律的文字，常嫌其與實際音樂離開過遠，使人如讀數學一般。我國古時這方面的理論，即犯此弊。我寫本書，竭力避免這缺點，時時講到律的應用，使讀者不致索然無味。又為使讀者容易記憶與明瞭起見，對於某些重要音程的振動數比，故意再三再四地提到；對於若干計算式，不厭其詳地列入演算的經過算式；對於有些事物，創用新的名詞，如“古代大半音”（正文§28）、“古代小半音”（§25）、“曲調純律”、“和聲純律”（§94）等。

在“音程值計算法”一章，我詳細說明音程值應用的原理；並將東西各國現行的各種音程值，作一概括的說明。各種音程值與振動數，均根據本書的說理，重行算過；小數尾數容或與他書微有不同。音程值小數普通用到五位。五位以內捨去時，用四捨五入法；五位以下（六位起）逕行捨去。振動數只用小數二位；小數三位用四捨五入法。

在“律史”一章，我把古今中外關於這方面能够找到的重要材料，統統找來了，把它們加以整理，使之系統化。

我相信本書是關於律的全般學問的最淺顯的書。讀過本書，以後在別處

看到關於律的理論，就不致再發生困難了。

講到“律學”這書名，起初我定爲“樂律研究”，這書名曾出現在我的一篇關於律的問答中；後來改爲“律學”，這名稱古人曾經用過（如明朱載堉的律學新說），爲簡單明瞭起見，決計襲用古名。

本書材料大部取自中外名家的著述，其主要者有如下各種：王光祚：中國音樂史；明朱載堉：律呂精義；日本田邊尚雄：樂律論；德國利曼（Hugo Riemann）：音樂史問答（英文譯本）；德國黑爾姆荷爾茲（Hermann Ludwig Ferdimand Helmholtz）：音響感覺論（英文譯本）。

繆天瑞，一九四七年八月十二日，在臺灣省交響樂團。

# 目 次

|                     |     |
|---------------------|-----|
| 豐序                  | I   |
| 楊序                  | III |
| 自序                  | VII |
| 第一章 導論              | 1   |
| 律學的研究範圍及其在整個音樂學中的地位 | 1   |
| 音的性質                | 2   |
| 律的計算法               | 5   |
| 國際標準高度              | 8   |
| 第二章 五度相生律           | 10  |
| 五度相生法               | 10  |
| 古代大音階與古代小半音         | 12  |
| 古代大小半音與古代音差         | 14  |
| 第三章 純律              | 19  |
| 純律的產生法              | 19  |
| 純律大音階與普通音差          | 20  |
| 小音階與五度網             | 25  |
| 大半音與小半音             | 29  |
| 第四章 平均律             | 36  |
| 第五章 音程值計算法          | 41  |

|               |    |
|---------------|----|
| 音程值的由來        | 41 |
| 常用對數值         | 43 |
| 一數八度值         | 44 |
| 十二數八度值與六數八度值  | 45 |
| 第六章 三種律的比較與應用 | 49 |
| 高低的比較         | 49 |
| 三種律的應用        | 51 |
| 對純律的誤會        | 53 |
| 第七章 律史        | 55 |
| 律史的分期         | 55 |
| 古代期           | 55 |
| 中古期           | 63 |
| 近世期           | 72 |
| 第八章 結論        | 80 |

# 第一章 導 論

## 律學的研究範圍及其在整個音樂學中的地位

§1. “律”就是構成音階的每個音。音階中各音(即各律)在高度上精密的規定法，稱為“定律法”(Temperament)；例如同樣一個大音階，可照“五度相生律”(§18)而定律，可照“純律”(§18)而定律，又可照“十二平均律”(§18)而定律。對這種定律法，就其原因與法則加以研究，便是“律學”。

律與音階有不可分的關係；因此，許多理論書將律與音階，在“樂制”(或“音體系”)(Tone-System)的名下，一起加以研究。譬如，研究近世西洋的樂制，就一邊研究大小音階的組織，如全音與半音的位置，“主音”(即第一度)(Tonic)與“屬音”(即第五度)(Dominant)的機能，一邊研究這音階中各音的由來與精密的高度，即對音階作數理的研究。前者(如研究大小音階的組織)是音階的研究；後者(研究音階中各音的由來與精密的高度)便是律的研究，亦即律學。所以律學就是音階的數理的研究。

律學固然可與音階研究合併，但兩者詳細觀察起來，亦非無各自的領域。譬如，我們可不管甚麼平均律、純律，而專來研究大音階、小音階、以及各種調式(雖然這是不能十分精確的)；另一方面，我們又可可不重視音階的變化，單就一二種音階而研究其各種的定律法。所以我決計將律與音階分別研究。(音階方面，我將另外寫成一本書，叫做調式及其和聲，將中外古今各種音階與調式，加以敘述與研討，並加入各種調式的和聲法。)

§2. 其次，我們來看律學在整個“音樂學”(Musicology)的範圍中，究竟處於怎樣的一個地位。整個音樂學可分為三大類：——第一類觀察音樂所曾走過的路徑；這便是“音樂史”的研究。第二類分析音樂如何作成，找出其可為標準的要素，以便於後學者的學習的依據；這便是普通所謂“音樂理論”(Theory of Music)，包括和聲學、對位法、曲式學、配器法、作曲法等。第三類是將分析音樂如何作成時所發現的標準的“成立理由”，依據自然科學、精

神科學與社會科學的法則，作“音樂科學”(Musical Science)的研究，包括“音響學”(Acoustis)、“音響心理學”(Tone Psychology)、“音樂美學”(Musical Aesthetics)、“音樂社會學”(Musical Sociology)等。(亦有人將整個音樂學分爲二類，即將上面的第二類作爲一類，名爲“實用理論”，將上面的第一類與第三類合併，稱爲“科學理論”。)

律學便是音樂科學方面的音響學的一部分，依據於數理方面；但它與其他音樂學(特別是音樂史)不無關係。故律學可說是“數理音響學”。

## 音 的 性 質

§3. 音大別爲樂音與噪音兩種。“樂音”(Musical Tone)便是有一定“高度”(Pitch)的音；“噪音”(Noise)是沒有一定高度的音。音樂中所用的音，幾乎全部都是樂音，噪音只是偶爾使用(如打樂器所發之音)，因此單說一“音”(Tone)，普通即指樂音而言。

音由物體振動而生。當該振動比較地單純，又有規則地周期地反覆著時，所發之音便有一定高度，而成為樂音。反之，如該振動毫無規則，或數種振動夾雜而起，零亂無章，都不能使音有一定高度，而成為噪音；又振動時間過短，使人不及把握其高度，亦易成為噪音。

§4. 音由振動而生，因此我們便可根據振動的速率來研究音的高低。計算振動的速率，即在一秒鐘內看音振動多少次，亦即看一秒鐘內振動數的多寡；振動數愈多，即振動愈速，則音亦愈高。

振動一往一復，算作一個振動數；所以這是一種“複振動”(Double Vibration)。(倘將振動中一往一復分爲兩個單位，則爲“單振動”(Single Vibration)。)我們計算每秒鐘振動數多寡時，便根據這種複振動。

音樂中所用的音，最低者每秒鐘振動數約 16(約  $C_2$ )，最高者可達 7000(約  $a^5$ )。

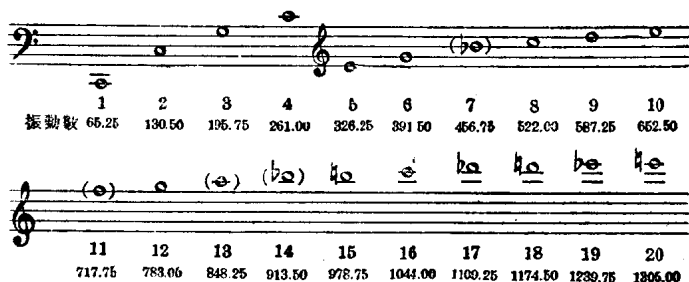
§5. 供律學上實驗的工具，普通用弦，或以弦爲基礎。古代希臘時代，曾用“一弦器”(Monochord)。我國古代用管；漢朝京房(約紀元前第一世紀)曾改用弦(§114)。用管發音，是“空氣柱”振動，即管中的空氣成一柱形，經衝擊而起振動，一如一條弦在振動一樣。管內空氣柱振動，不如弦的振動來得

簡單；因為空氣柱要稍凸出管外而振動，因此管的長度不一定便是空氣柱的長度，於是計算上便多一番周折了。所以，用弦來作實驗，較為方便。

一條兩端緊張著的弦，在同樣的張力下，弦愈短，則振動愈速（即振動數愈多），而音愈高。即弦長與振動數（及高度）成反比。將弦長減去一半，即弦的  $\frac{1}{2}$  部分起振動，則振動數加多一倍；所發之音比全弦所發之音高一“八度”（Octave）。參看下面第一圖。倘弦的  $\frac{1}{3}$  部分起振動，則振動數加多三倍；所發之音比全弦所發之音高十二度，即“八度”加“五度”。倘弦的  $\frac{1}{4}$  部分起振動，則振動數加多四倍；所發之音比全弦所發之音高兩個“八度”。以下類推。

〔6. 一條弦起振動時，實際不僅全弦振動，同時該弦等分為二段、三段、四段、五段……而振動。等分為二段時，所發之音，正與上項所述  $\frac{1}{2}$  部分所發之音相同（高一“八度”）；等分為三段時，所發之音，與  $\frac{1}{3}$  部分所發之音相同（高十二度）；以下類推。所以一個音，實際是混合著八度、五度、三度等許多音而成的一個“複合音”（Compound Tone），看下圖：

〔第一圖〕 分音列



第一個叫做“基礎音”（Fundamental）；第二個起都叫做“泛音”（或“倍音”）（Overtone）。但我們亦可總稱為“分音”（Partial），如第一分音（即基礎音），第二分音（即第一泛音）等。第一分音最強，蓋過其他分音；所以平常我們只聽到這個音，而以這個音為高度的標準。各分音中高方的變數分音，都是低方某分音的高八度的音，如第四分音是第二分音的高八度音，第十分音是第五分音的高八度音。因為前面講過，弦的  $\frac{1}{2}$  部分所發之音，比全弦所發之音高一八度。第七分音（包括第十四分音）與第十三分音，比譜上所記（不

論根據五度相生律、純律或平均律而記的譜)稍低；第十一分音則比譜上所記稍高。

上圖音符下面，振動數上面的數字，有好幾種作用：

a)表示分音的序數。

b)表示弦分為幾段而振動，如第三分音，即分為三段。

c)表示振動數的倍數，如第三分音，振動數為第一分音的三倍。

d)並可用以表示各分音的振動數的比例(簡稱“振動數比”)，如第二分音對第一分音，振動數比為  $\frac{2}{1}$ ，第三分音對第一分音，振動數比為  $\frac{3}{1}$ ，對第二分音為  $\frac{3}{2}$ 〔參看 §10〕。

§7. 第二分音起的各分音，在我們的“肉耳”雖不能全部聽出，卻在某種情形下，確能聽出一部分。試在鋼琴上彈出一個稍低的音，任其延長，凝神聽辨：先聽到基礎音(第一分音)，然後微微聽到高八度的音(第二分音)、高十二度的音(第三分音)與高兩個八度的音(第四分音)，有時還可聽到大三度的音(第五分音)。

再在小提琴上作試驗。將 $a^1$ 弦等分為三段、四段、五段等。將手指輕輕地按在弦的前方 $\frac{1}{3}$ 處(相當 $a^1$ 音位置)，用弓輕擦，便發比原弦之音( $a^1$ )高十二度的音( $a^2$ )。同樣，手指倘按在 $\frac{1}{4}$ 處(相當 $g^1$ 音位置)，便發比原弦之音高兩個八度的音( $d^2$ )；倘按在 $\frac{1}{5}$ 處(相當 $\sharp f^1$ 音位置)，便發比原弦之音高兩個八度又大三度的音( $\sharp f^2$ )。倘手指不按在弦的前方部分，而按在後方部分(即近“音橋”(Bridge)部分)，也是 $\frac{1}{3}$ ， $\frac{1}{4}$ ， $\frac{1}{5}$ 處，所發之音亦是一樣。這個實驗，雖不能使我們聽出泛音(第二分音以上)，因為所聽到的已是基礎音了，但是這實驗可證明弦的分段振動的事實。手指輕按在 $\frac{1}{3}$ 處，便是促成弦分作三段而振動。 $\frac{1}{3}$ 處，照普通情形(如手指重按)，應發 $a^1$ 音；而現在卻是高八度( $a^2$ )，故為分段振動而無疑。又所以按在弦的前方與後方，結果卻是一樣，就因為兩種按法所促成的分段振動原是相同的緣故。

分段振動的事實，又可在管內空氣柱試驗出來。例如，拿一隻喇叭，輕吹發生基礎音，加緊而縮小來吹，便發生高八度、高十二度、高兩個八度等的音。這是學過喇叭的人都有的經驗。這些在同一管內所發的較高的音，便是管內空氣柱因某種壓力而起分段振動所生的結果。

一個音除基礎音完全被我們聽出之外，其他各泛音，有時特別微弱，甚至全無，非有器械的幫助，不能辨出。這些泛音的變化（如某些泛音強顯，或某些消失），可使基礎音產生音色的變化。

§8. 音樂中所用的各種高度的音（即律），視定律法的不同，或多或少地根據於分段振動的事實或分音原則。試看所有的定律法，都是在八度內作各種高度的分畫。八度便根據第二分音而成。又五度亦極普遍地應用在定律法上；關於這，以後會詳細講述。不過不一定世界上所有的定律法，永遠都根據這種自然的法則；大抵起先多少總根據自然法則，繼因種種情形而起變遷。

分音最初為十七世紀法國的音樂理論家美孫（P. Mersenne, 1588-1648）（§125）所發現，後由法國的數學家索發爾（J. Sauveur, 1653-1716）（§131）加以說明；至近世黑爾姆荷爾茲（H. Helmholtz, 1821-1894）等而大加開發。

### 律的計算法

§9. 計算律的方法有好幾種，現在我們先根據振動數來計算。這個方法是比較基礎的，即使採用別的計算法，對於這種根據振動數的計算法，亦不得不知道。等到稍後，我們再來說明別種計算法（第五章）。

根據振動數來計算，便是用“振動數比”（即兩個振動數的比例）來表示兩音的距離——即用振動數比來表示音程的大小。這種振動數比有兩種：第一種是指音階中各律與主音所構成的音程的振動數比（參看第三圖），第二種是指音階中相鄰兩律間的音程的振動數比（參看第四圖）。如何從第一種變成第二種，或第二種變成第一種，下面就要講到。

在 §6d 曾講到，第一圖中譜表下方第一行數字，可表示振動數比。即我們可用  $\frac{2}{1}$  作為八度音程的振動數比。第一圖中第二分音對第一分音，第四分音對第二分音，第八分音對第四分音，都是同一的振動數比（即都是八度）。

§10. 欲求兩音程的振動數比之差，可從較大音程的振動數比，除去較小音程的振動數比，即得。例如，第一圖中 C-g 的振動數比  $\frac{3}{1}$ ，除去 C-c 的振動數比  $\frac{2}{1}$ ，即得 c-g（五度）的振動數比：

$$\frac{3}{1} \div \frac{2}{1} = \frac{3}{2} \text{ (五度)}$$

第一圖中其他在一個八度內的各分音，均可用此法，求得鄰接各分音的振動數比；如第五分音對第四分音爲  $\frac{5}{4}$ （大三度）（此爲純律大三度，詳第三章），第六分音對第五分音爲  $\frac{6}{5}$ （小三度）（此爲純律小三度，詳第三章）。§9 所提起的第一種振動數比變爲第二種，便可用這個除法變過來。

§11. 欲求兩音程的振動數比之和，則將兩音程的振動數比相乘，即得。  
例如：

$$\frac{5}{4}(\text{純律大三度}) \times \frac{6}{5}(\text{純律小三度}) = \frac{3}{2}(\text{五度})$$

在 §9 提起的第二種振動數比變爲第一種，便可用這個乘法變過來。

§12. 如果我們已經知道一音的上方某度音程的振動數比（如已知道 C 音的上方五度音程的振動數比爲  $\frac{3}{2}$ ），那麼欲求得該音下方同度數音程（C 音的下方五度）的振動數比，只要用上方音程的振動數比去除該音，便得。例如：

$$1(\text{原音}) \div \frac{3}{2}(\text{上方五度}) = \frac{2}{3}(\text{下方五度})$$

§13. a) 欲知不同兩音程中大的一個比小的一個大幾倍或大幾多，則只要求得較大音程的振動數比爲較小音程振動數比的幾方，便可知道。例如我們欲知道古代大音階中的全音（ $\frac{9}{8}$ ）比半音（ $\frac{256}{243}$ ）大幾多〔參看 §23〕，可用這樣的公式：

$$\left(\frac{256}{243}\right)^x = \frac{9}{8}$$

這個原則，其實與 §11 求數音程之和的原則，正是一樣，因爲  $\frac{256}{243}$  自乘幾次，便是幾個半音之和。我們可用對數求得上式的結果：

先將上式化爲整式：

$$\begin{aligned} (1.05349)^x &= 1.12500 \\ x \log 1.05349 &= \log 1.12500 \\ \log 1.05349 &= .02263 \\ \log 1.12500 &= .05115 \\ x &= \frac{.05115}{.02263} = 2.26 (\text{即 } 2.3) \end{aligned}$$